(1a)

$$\begin{cases} u' = 2u - 4v \\ v' = u - 3v \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{cc} u & v \\ \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda-2 & 4 \\ -1 & \lambda+3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda-2 & 4 \\ (\lambda-2)(\lambda+3)+4 & -4(\lambda+3)+4(\lambda+3) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-2 & 4 \\ \lambda^2+\lambda-2 & 0 \end{pmatrix}$$

ree: $u'' + u' - 2 = 0$ $\qquad \underline{u = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}}$

$(\lambda+2)(\lambda-1) = 0$

$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 1$

pak $\quad u' - 2u + 4v = 0$

$4v = -(-2c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}) + 2c_1 e^{-2x} + 2c_2 e^{x}$

$\underline{v = c_1 e^{-2x} + \frac{1}{4} c_2 e^{x}}$ $\qquad c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$

(15) $u' = u - 4v$

$v' = 2u - 3v$

$$\begin{matrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda-1 & 4 \\ -2 & \lambda+3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & \lambda+3 \\ 0 & 8+(\lambda-1)(\lambda+3) \end{pmatrix} \sim \begin{array}{cc} u & v \\ \hline \end{array}\begin{pmatrix} -2 & \lambda+3 \\ 0 & \lambda^2+2\lambda+8-3 \end{pmatrix}$$

$\lambda + 2\lambda + 5 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2}$$

$\lambda_1 = -1 + 2i$

$\lambda_2 = -1 - 2i$

$$v = c_1 e^{-x} \cos 2x + c_2 e^{-x} \sin 2x$$

$-2u + v' + 3v = 0$

$$2u = -c_1 e^{-x} \cos 2x - 2c_1 e^{-x} \sin 2x - c_2 e^{-x} \sin 2x + 2c_2 e^{-x} \cos 2x + 3c_1 e^{-x} \cos 2x + 3c_2 e^{-x} \sin 2x$$

$$2u = (2c_1 + 2c_2) e^{-x} \cos 2x + (2c_2 - 2c_1) e^{-x} \sin 2x$$

$$u = (c_1 + c_2) e^{-x} \cos 2x + (c_2 - c_1) e^{-x} \sin 2x$$

(1c) $u' = -7u + 9v$

$v' = -u - v$

$$\begin{matrix} -7 & 9 \\ -1 & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda+7 & -9 \\ 1 & \lambda+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 \\ 0 & (\lambda+1)(\lambda+7)+9 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{cc} u & v \\ \left(\begin{matrix} 1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda^2+8\lambda+16 \end{matrix}\right) & \end{array}$$

$\lambda_{1,2} = -4$ $\qquad v = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}$

$u + v' + v = 0 \qquad u = -\left(-4c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-4x} - 4c_2 x e^{-4x}\right)$

$$- c_1 e^{-4x} - c_2 x e^{-4x}$$

$$u = 3c_1 e^{-4x} - c_2 e^{-4x} + 3c_2 x e^{-4x}$$

(1d)

$u' = 2u - 4v$ $\qquad$ $A = \begin{array}{cc} u & v \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $u(0) = 0$

$v' = u - 2v$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $v(0) = -1$

$\lambda I - A$:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ -1 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & \lambda + 2 \\ 0 & (\lambda+2)(\lambda-2) + 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & \lambda + 2 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$v'' = 0$ $\qquad$ $\underline{v = c_1 + c_2 x}$

$\lambda^2 = 0$ $\qquad$ $\lambda_{1,2} = 0$

$-u + v' + 2v = 0$ $\qquad$ $u = c_2 + 2c_1 + 2c_2 x$ $\qquad$ $c_{1,2}, x \in \mathbb{R}$

$\underline{u = 2c_2 x + (2c_1 + c_2)}$

$u(0)$: $\qquad$ $\underline{0 = c_2 + 2c_1}$ $\qquad$ $\boxed{c_2 = 2}$ $\qquad$ $u = 4x$

$\boxed{-1 = c_1}$ $\qquad$ $v = \underline{-1 + 2x}$

(1e)

$$u' = v$$
$$v' = -u$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{array}{cc} u & v \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \lambda^2+1 & 0 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$\lambda = \pm i$ $\qquad u = c_1 \underline{\cos x} + c_2 \sin x$

$v = u'$ $\qquad v = \underline{-c_1 \sin x} + c_2 \cos x$

(1f) $u' = 2u - 3v$

$v' = u - 2v$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda-2 & 3 \\ -1 & \lambda+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & \lambda+2 \\ 0 & (\lambda+2)(\lambda-2)+3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{cc} u & v \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} -1 & \lambda+2 \\ 0 & \lambda^2-1 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$\lambda = \pm 1$ $\qquad v = \underline{c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}}$

$-u + v' + 2v = 0$ $\qquad u = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x} + 2c_1 e^{x} + 2c_2 e^{-x}$

$u = \underline{3c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}}$

## Řešení soustav pomocí úprav $\lambda$-matice

Tento způsob řešení se od předchozího liší pouze formou zápisu. Díky přehlednějšímu formalismu však umožňuje řešit i větší soustavy. Buď $\lambda$ operátor derivování, tj. $\lambda z := z'$, $\lambda^2 z = z''$, .... S využitím tohoto označení můžeme namísto operací s rovnicemi provádět operace s řádky matice, ve které se vyskytují polynomy v proměnné $\lambda$. Konkrétně se jedná o úpravy:

- záměna pořadí řádků matice,
- vynásobení řádku matice číslem,
- přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P$ je polynom.

Matici snadno upravíme na trojúhelníkový tvar pomocí Gaussovy eliminace. Navíc můžeme takto upravovat rozšířenou matici o sloupec pravých stran a řešit tak rovnou nehomogenní rovnici.
**Pozor**, není možné vynásobit řádek polynomem v $\lambda$, tím by se zvýšil řád soustavy. Také není možné polynomy dělit.

(1g) **Příklad 2.** Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\left|\begin{aligned} x' &= 2x + y - z\,, \\ y' &= 7x + 4y - z\,, \\ z' &= 13x + 7y - 3z\,. \end{aligned}\right.$$

*Řešení.* S využitím zápisu pomocí $\lambda$ dostáváme

$$\begin{aligned} \lambda x - 2x - y + z &= 0\,, \\ -7x + \lambda y - 4y + z &= 0\,, \\ -13x - 7y + \lambda z + 3z &= 0\,. \end{aligned}$$

Upravujme tedy matici

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -7 & \lambda - 4 & 1 \\ -13 & -7 & \lambda + 3 \end{pmatrix}$$

Od druhého řádku odečteme první řádek a od třetího řádku odečteme $(\lambda+3)$ násobek prvního řádku:

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -\lambda - 5 & \lambda - 3 & 0 \\ -(\lambda-2)(\lambda+3) - 13 & (\lambda+3) - 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -\lambda - 5 & \lambda - 3 & 0 \\ -\lambda^2 - \lambda - 7 & \lambda - 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Od druhého řádku odečteme třetí řádek a poté od třetího řádku odečteme $(\lambda-4)$-násobek druhého řádku

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ \lambda^2+2 & 1 & 0 \\ -\lambda^2-\lambda-7 & \lambda-4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ \lambda^2+2 & 1 & 0 \\ -\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V posledním řádku máme nyní rovnici $-x'''+3x''-3x'+x=0$, v matici je tedy rovnou charakteristický polynom této rovnice. Dostáváme tedy řešení

$$x(t)=c_1e^t+c_2te^t+c_3t^2e^t\,,\qquad t\in\mathbb{R}\,, c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}\,.$$

Z druhého řádku matice dopočítáme $y$:

$$y(t)=-x''-2x=-e^t(3c_1+2c_2+2c_3+t(3c_2+4c_3)+t^2\cdot 3c_3)\,,\qquad t\in\mathbb{R}\,.$$

Z první rovnice dopočítáme $z$:

$$z(t)=e^t(-2c_1-3c_2-2c_3+t(-2c_2-6c_3)+t^2\cdot(-2c_3))\,,\qquad t\in\mathbb{R}\,.$$

**Příklad 3.** Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 2y''+3z''-7y-6z &= t+1 \\ 4y''+3z''-4y-3z &= 2t. \end{aligned}$$

*Řešení.* Napíšeme si $\lambda$-matici s pravou stranou:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2\lambda^2-7 & 3\lambda^2-6 & t+1 \\ 4\lambda^2-4 & 3\lambda^2-3 & 2t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2\lambda^2-7 & 3\lambda^2-6 & t+1 \\ 2\lambda^2+3 & 3 & t-1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 2\lambda^2-7-(\lambda^2-2)(2\lambda^2+3) & 0 & t+1-(t-1)''+2(t-1) \\ 2\lambda^2+3 & 3 & t-1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} -2\lambda^4+3\lambda^2-1 & 0 & 3t-1 \\ 2\lambda^2+3 & 3 & t-1 \end{array}\right).$$

Řešení charakteristického polynomu v prvním řádku jsou $\lambda_{1,2}=\pm 1$, $\lambda_{3,4}=\pm\sqrt{2}/2$. Tedy řešení homogenní rovnice

$$-2y^{(4)}+3y''-y=0$$

jsou

$$ae^t+be^{-t}+ce^{\sqrt{2}/2t}+de^{-\sqrt{2}/2t}.$$

(2a) $$y' = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} y$$

$$-\left(\begin{pmatrix} \lambda-4 & 2 & 4 \\ -4 & \lambda+2 & 3 \\ -2 & 2 & \lambda+2 \end{pmatrix}\right) \begin{matrix} \cdot(\lambda+2) \\ + \\ \cdot(-2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-4 & 2 & 4 \\ (\lambda+2)(\lambda-4)+8 & 0 & 4\lambda+2 \\ \lambda-2 & 0 & -\lambda+2 \end{pmatrix} \sim$$

(jen zjednodušení)

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda-4 & 2 & 4 \\ \lambda(\lambda-2) & 0 & 2(2\lambda+1) \\ \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot(-\lambda) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-4 & 2 & 4 \\ \lambda(\lambda-2) & 0 & 2(2\lambda+1) \\ 0 & 0 & -\lambda(2-\lambda)+2(2\lambda+1) \end{pmatrix}$$

$y_3$: $-2\lambda+\lambda^2+4\lambda+2$ $\qquad$ $y_3 = c_1 e^{-x}\cos x + c_2 e^{-x}\sin x$

$$\lambda^2+2\lambda+2=0$$

$$\lambda = -1 \pm i$$

$y_1$: $$y_1' - 2y_1 = -2y_3 + y_3'$$

$$y_1' - 2y_1 = e^{-x}\left((-3c_1+c_2)\cos x + (-c_1-3c_2)\sin x\right)$$

spec PS

$\lambda - 2 = 0 \qquad y_{1H} = c_3 e^{2x}$

$\lambda = 2$

$-1+1i$ není kořen

$$y_{1p} = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$$

pak $$e^{-x}\left((-3A+B)\cos x + (-A-3B)\sin x\right) = e^{-x}\left((-3c_1+c_2)\cos x + (-c_1-3c_2)\sin x\right)$$

zřejmě $A = c_1$, $B = c_2$

pak $$y_1 = c_3 e^{2x} + c_1 e^{-x}\cos x + c_2 e^{-x}\sin x$$

nakonec $$y_2 = \frac{1}{2}\left(2y_1 - y_3' - 2y_3\right)$$

$$y_2 = \frac{1}{2}e^{-x}\left((c_1+c_2)\sin x + (c_1-c_2)\cos x + 2c_3 e^{3x}\right)$$

(2b) $y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} y$

$$\begin{array}{c} (\lambda-4)\cdot \\ + \\ (2) \end{array} \left( \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda-1 & -2 \\ -3 & -1 & \lambda-4 \end{pmatrix} \right)+ \sim \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ -\lambda-2 & (\lambda-1)(\lambda-4)-2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \; + \left( \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ -\lambda-2 & \lambda^2-5\lambda+2 & 0 \end{pmatrix} \right. \sim \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ -4 & \lambda^2-4\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 4 \\ + \\ \cdot(\lambda-2) \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & \begin{array}{c}(\lambda^2-4\lambda)(\lambda-2) \\ +4(\lambda-2)\end{array} & 0 \end{pmatrix}$$

$y_2$:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda^2 + 8\lambda + 4\lambda - 8 = 0$$
$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$$
$$(\lambda-2)^3 = 0$$

3-nás koreň $\lambda = 2$

$$y_2 = c_1 e^{2x} \underline{+ c_2 x e^{2x}} + c_3 x^2 e^{2x}$$

$y_1$:

$$4y_1 = y_2'' - 4y_2'$$
$$4y_1 = -2e^{2x}(2c_1 + 2c_2 x + c_3(2x^2-1))$$
$$y_1 = -e^{2x}(c_1 + c_2 + c_3(x^2 - \tfrac{1}{2}))$$

$y_3$:

$$-2y_3 = y_1' - y_1 - y_2$$
$$y_3 = e^{2x}(c_1 + \tfrac{c_2}{x}x + \tfrac{c_2}{2} + c_3 x^2 + c_3 x - \tfrac{c_3}{4})$$

(2c)

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} y$$

$$\begin{array}{c} (\lambda-1)\cdot \\ + \\ (-1) \end{array} \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & \lambda-1 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ (\lambda-1)^2+1 & \lambda-1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & \lambda-1 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$ 2-ná's $\quad \underline{y_1 = c_1 e^x + c_2 x e^x}$

pak $\quad y_2' - y_2 = -c_1 e^x - c_2 x e^x$

$$e^{-x} y_2' - e^{-x} y_2 = -c_1 - c_2 x$$

$$(e^{-x} y_2)' = -c_1 - c_2 x$$

$$y_2 = \underline{e^x \left(-c_1 x - \tfrac{1}{2} c_2 x^2 + c_3\right)}$$

$y_3 = -y_2 - y_1' + y_1 \qquad y_3 = \frac{1}{2} e^x \left(\underline{2c_1 x - 2c_2 - 2c_3} + c_2 x^2\right)$

(201)

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} y$$

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & 3 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (\lambda+1) \\ + \lambda-3 \\ \sim \\ * \end{matrix} \begin{pmatrix} (\lambda-3)(\lambda+1)+3 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$\lambda^2 - 2\lambda = 0$

$\lambda(\lambda-2) \rightarrow$ $\qquad$ $\underline{y_1 = c_1 + c_2 e^{2x}}$

$$\begin{matrix} * & (1)\cdot(\lambda-1) \\ & +(2)\cdot(-3) \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} (\lambda-3)(\lambda-1)+3 & 3(\lambda-1)-3(\lambda+1) & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda^2-4\lambda+6 & -6 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$+6y_2 = y_1'' - 4y_1' + 6y_1$ $\qquad$ $6y_2 = 6c_1 + 2c_2 e^{2x}$

$\underline{y_2 = c_1 + \frac{1}{3}c_2 e^{2x}}$

nakonec $\qquad y_3' - y_3 = 2y_1 - 2y_2$

$y_3' - y_3 = \cancel{2c_1} + 2c_2e^{2x} - \cancel{2c_1} - \frac{2}{3}c_2e^{2x}$

$y_3' - y_3 = \frac{4}{3}c_2e^{2x}$

I faktor: $\qquad e^{-x}y_3' - y_3e^{-x} = \frac{4}{3}c_2 e^{x}$

$(e^{-x}y_3)' = \frac{4}{3}c_2e^{x}$

$y_3 \underline{= e^{x}\left[\frac{4}{3}c_2e^{x} + c_3\right]}$

(2e)

$$y' = \begin{pmatrix} 9 & -10 & -4 \\ 4 & -5 & 1 \\ 10 & -10 & -5 \end{pmatrix} y$$

$$\begin{pmatrix} \lambda-9 & 10 & 4 \\ -4 & \lambda+5 & -1 \\ -10 & 10 & \lambda+5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-10) \\ )+ \\ (\cdot \lambda+5) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-9 & 10 & 4 \\ \lambda+1 & 0 & -\lambda-1 \\ 40-10\lambda-50 & 0 & 10+(\lambda+5)^2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda-9 & 10 & 4 \\ \lambda+1 & 0 & -(\lambda+1) \\ -10(\lambda+1) & 0 & \lambda^2+10\lambda+35 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 10 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-9 & 10 & 4 \\ \lambda+1 & 0 & -(\lambda+1) \\ 0 & 0 & \underbrace{\lambda^2+10\lambda+35-10\lambda-10}_{\lambda^2-25} \end{pmatrix}$$

*

$$\lambda^2+25=0 \qquad y_3 = c_1\cos 5x + c_2 \sin 5x$$

$$\lambda = \pm 5i$$

$$y_1'+y_1 = y_3'+y_3$$

$$y_1'+y_1 = (\cos 5x)(c_1+5c_2)+(c_2-5c_1)\sin 5x$$

$$(y_1e^x)' = e^x[\cos 5x\,(c_1+5c_2)+(c_2-5c_1)\sin 5x] \quad \text{pmoll PC}$$

$$y_1 = c_1\cos 5x + c_2\sin 5x + c_3e^{-x}$$

$$10y_2 = -4y_3 + 9y_1 - y_1'$$

$$y_2 = \tfrac{1}{2}(c_1+c_2)\sin 5x + \tfrac{1}{2}(c_1-c_2)\cos 5x + c_3e^{-x}$$

$u' = 2u - 4v$

$v' = u - 3v$

$$\begin{pmatrix} \lambda-2 & 4 \\ -1 & \lambda+3 \end{pmatrix}_{\cdot(\lambda-2)} \sim \begin{pmatrix} \lambda-2 & 4 \\ -(\lambda-2) & (\lambda+3)(\lambda-2) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-2 & 4 \\ 0 & 4+\lambda^2-6+\lambda \end{pmatrix}$$

$\lambda^2+\lambda-2=0$

$(\lambda+2)(\lambda-1)$

$\lambda_1=-2 \quad \lambda_2=1$

$v''-v'-2v=0$

$$\underline{v = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}}$$

$u = v' + 3v$

$u = c_1 e^{x} + (-2)c_2 e^{-2x} + 3c_1 e^{x} + 3c_2 e^{-2x}$

$$\underline{u = 4c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}}$$

Chyba: Řádek nesmíme násobit $\lambda$