

## 7. cvičení - Funkce více proměnných - totální diferenciál

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

### Teorie

**Definice 1.** Parciální derivací funkce  $f$  v bodě  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  podle proměnné  $x_i$  definujeme jako limitu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)}{t}.$$

### Definice 2. Derivace (totální diferenciál)

Nechť je dána reálná funkce  $n$ -proměnných  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definovaná na nějakém okolí bodu  $a \in \mathbb{R}^n$ . Pokud existuje lineární zobrazení  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  takové, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0,$$

potom toto lineární zobrazení  $L$  značíme  $df(a)$  nebo také  $f'(a)$  a nazýváme jej **derivací** nebo také **totálním diferenciálem** funkce  $f$  v bodě  $a$ . Zobrazení, které bodu  $a$  přiřazuje  $df(a)$ , resp.  $f'(a)$ , značíme  $df$ , resp.  $f'$  a nazýváme jej diferenciálem funkce  $f$ .

**Věta 3.** Nechť funkce  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  má totální diferenciál  $df(a)$  v bodě  $a$ . Potom  $df(a)$  je lineární zobrazení, které vektoru  $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$  přiřazuje číslo  $df(a)(h)$  a platí, že

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} h_i.$$

**Věta 4.** Nechť  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je reálná funkce, jejíž všechny parciální derivace jsou spojité v bodě  $a$ . Potom funkce  $f$  má v bodě  $a$  totální diferenciál určený předpisem

$$df(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} dx_i.$$

**Definice 5.** Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina,  $a \in G$ ,  $f \in C^1(G)$ . Pak graf funkce

$$T : x \mapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)(x_2 - a) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a)$$

$x \in \mathbb{R}^n$  se nazývá *tečnou nadrovinou* ke grafu funkce  $f$  v bodě  $[a, f(a)]$ .

**Věta 6.** Nechť je funkce  $f(x, y)$  diferencovatelná v bodě  $A = [x_0; y_0]$ . Pak v bodě  $[x_0; y_0; f(x_0; y_0)]$  existuje tečná rovina ke grafu funkce  $z = f(x, y)$  určená rovnicí

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)(y - y_0).$$

### Hinty

$$\begin{aligned} 2|xy| &\leq x^2 + y^2, & \pm 2xy &\leq x^2 + y^2 \\ \max\{|x|, |y|\} &\leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2} \max\{|x|, |y|\} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|x| + |y|) &\leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \\ |a|^3 + |b|^3 &\leq (|a| + |b|)(|a|^2 + |b|^2) \end{aligned}$$

## Algoritmus - Totální diferenciál $f(x, y)$

1. Určíme **definiční obor**  $f(x, y)$ .
2. Pokud je to potřeba, **spojitě dodefinujeme** funkci  $f(x, y)$ . (Stačí dodefinovat např. dvojnásobnou limitou, případnou spojitost dá existence tot. diferenciálu.)
3. Spočteme **parciální derivace** mechanicky nebo podle definice (jako minule) všude, kde to jde (nebo v bodě, na který jsme tázáni).
4. Spočteme **totální diferenciál**.
  - (a) Jestliže má funkce v daném bodě spojitě parciální derivace, pak je totální diferenciál dán předpisem z Věty 4.
  - (b) Jestliže funkce má parciální derivace (ale nejsou spojitě nebo nevíme, zda jsou spojitě), dopočítáme totální diferenciál z definice - kandidátem jsou pak parciální derivace.
  - (c) Jestliže funkce někde není spojitá nebo dokonce definovaná, totální diferenciál tam funkce nemá.
  - (d) Jestliže parciální derivace v nějakém bodě neexistují nebo nejsou vlastní, totální diferenciál tam funkce nemá.

## Příklady

1. Určete definiční obor, parciální derivace a totální diferenciál následujících funkcí
  - (a)  $x^2 - 2xy - 3y^2$
  - (b)  $\arctan \frac{x-y}{x+y}$
  - (c)  $xy \ln(x+y)$
2. Určete parciální derivace a tot. diferenciál v bodě  $(0, 0)$ :
  - (a)  $|y| \sin x$
  - (b)  $\cos \sqrt[3]{xy}$
  - (c)  $\sqrt{|x|^3 + |y|^3}$
  - (d)  $\sqrt[3]{xy}$
  - (e)  $f(x) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
3. Dodefinujte funkci  $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}$  tak, aby měla totální diferenciál ve všech bodech a spočtěte ho.
4. Dodefinujte funkci  $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  tak, aby měla totální diferenciál ve všech bodech a spočtěte ho.
5. Lze dodefinovat funkci  $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \ln(1+xy)$  tak, aby měla totální diferenciál ve všech bodech?
6. Ověřte z definice totální diferenciál funkce  $x^2 + y^2$  v bodě  $[x_0, y_0]$ .