

## 10. cvičení - Funkce více proměnných - Implicitní funkce 2

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

### Teorie

**Věta 1.** Necht'  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Necht'  $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$  je otevřená množina,  $F : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{y} \in \mathbb{R}$ ,  $[\bar{x}, \bar{y}] \in G$  a necht' platí:

1.  $F \in C^k(G)$

2.  $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$

3.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\bar{x}, \bar{y}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak existuje okolí bodu  $U \subset \mathbb{R}^n$  bodu  $\bar{x}$  a okolí  $V \subset \mathbb{R}^m$  bodu  $\bar{y}$  tak, že  $U \times V \subset G$  a pro každé  $x \in U$  existuje právě jedno  $y \in V$  s vlastností  $F(x, y) = 0$ . Označíme-li toto  $y$  symbolem  $\varphi(x)$ , pak pak  $\varphi \in C^k(U)$ .

### Příklady

1. Jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} e^{u/x} \cos(v/y) &= \frac{x}{\sqrt{2}} \\ e^{u/x} \sin(v/y) &= \frac{y}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Dokažte, že vztahy definují na okolí bodu  $[1, 1, 0, \frac{\pi}{4}]$  funkce  $u(x, y)$  a  $v(x, y)$  třídy  $C^\infty$ . Spočítejte parciální derivace  $\frac{\partial u}{\partial x}$  a  $\frac{\partial v}{\partial x}$ .

2. Ukažte, že existují funkce  $u(x, y)$  a  $v(x, y)$  definované na nějakém okolí  $U$  bodu  $[1, 2]$ , které jsou na  $U$  třídy  $C^1$ , splňují  $u(1, 2) = 0$ ,  $v(1, 2) = 0$  a platí pro ně rovnice

$$\begin{aligned} xe^{u+v} + 2uv &= 1 \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} &= 2x. \end{aligned}$$

Spočítejte  $u'(1, 2)$  a  $v'(1, 2)$ .

3. Dokažte, že existují funkce  $z(x, y)$  a  $t(x, y)$ , které jsou třídy  $C^\infty$  na nějakém okolí  $U$  obsahujícím  $[1, -1]$  a splňují rovnice

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 &= 0 \\ x + y + z - t - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Spočítejte  $z''(1, -1)$ .

4. Ukažte, že rovnice

$$\begin{aligned}x &= u + v^2 \\ y &= u^2 - v^3\end{aligned}$$

definují na jistém okolí bodu  $[3, 3]$  funkce  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  třídy  $C^\infty$ , které splňují  $u(3, 3) = 2$ ,  $v(3, 3) = 1$ . Spočtete  $z_{xy}(3, 3)$ , pokud  $z = 2uv$ .

5. Spočtete  $x_v$ ,  $y_v$  a  $z_v$ , pokud

$$\begin{aligned}u &= x^2 + y^2, \\ v &= x^2 - 2xy^2, \\ z &= \ln(y^2 - x^2)\end{aligned}$$

v bodě  $u = 5$ ,  $v = -7$ ,  $x(5, -7) = 1$  a  $y(5, -7) = 2$ .

(Rada: Prve řešte první dvě rovnice pomocí Věty o implicitních funkcích,  $z_v$  pak vyjádřete řetízkovým pravidlem.)

### Zkouškové příklady

6. Ukažte, že vztahy

$$\begin{aligned}u &= \ln(xy) + \cos v \\ v &= e^{x-u} - y^2 - v\end{aligned}$$

definují na jistém okolí bodu  $[x, y, u, v] = [1, 1, 1, 0]$  hladké funkce  $x, y$  proměnných  $u, v$  takové, že  $x(1, 0) = 1$  a  $y(1, 0) = 1$ . Rozhodněte, zda existuje totální diferenciál funkce  $y(u, v)$  v bodě  $[1, 0]$  a pokud ano, nalezněte jej.

7. Ukažte, že vztahy

$$\begin{aligned}u &= \ln(x^2 + y^2) - 2xy \\ v &= e^x \sin y + \frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

definují na jistém okolí bodu  $[x, y, u, v] = [1, 0, 0, 1]$  hladké funkce  $x, y$  proměnných  $u, v$  takové, že  $x(0, 1) = 1$  a  $y(0, 1) = 0$ . Nechť navíc je  $z$  funkce proměnných  $x$  a  $y$  definovaná na okolí bodu  $[x, y] = [1, 0]$  předpisem  $z(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$  a nechť  $\Phi$  je funkce proměnných  $u$  a  $v$  definovaná na okolí bodu  $[u, v] = [0, 1]$  předpisem  $\Phi(u, v) = z(x(u, v), y(u, v))$ . Spočtete  $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(0, 1)$ .

### Teorie

8. Rozhodněte, zda je podmínka  $\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$  ve větě o implicitní funkci nutná. Dokážete sestrojit funkci (alespoň obrázkem), u níž platí všechny předpoklady až na tento, a přesto platí závěr?

9. Nechť  $T : (C([0, 1]), \rho_{\text{sup}}) \rightarrow \mathbb{R}$  je zobrazení definované jako  $T(f) = \int_0^1 f(x) dx$ . Ukažte, že  $T$  je spojitě.

$$x = \varepsilon^{\hbar} \text{ oq} \text{e} \text{u} \text{ I} = |\hbar| \hbar + \varepsilon x \text{ (8)}$$