

11. cvičení - Funkce více proměnných - Extrémy

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Nutná podmínka existence extrému). Necht' $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $i \in \{1, \dots, n\}$. Necht' funkce $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě a lokální extrém. Potom buď $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ neexistuje nebo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Věta 2 (Postačující podmínky pro lokální extrém). Necht' $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a necht' $f \in C^2(G)$. Necht' $\text{grad } f(a) = 0$. Pak

1. Je-li kvadratická forma $f''(a)$ **pozitivně definitní**, pak funkce f nabývá v bodě a svého ostrého **lokálního minima**.
2. Je-li kvadratická forma $f''(a)$ **negativně definitní**, pak funkce f nabývá v bodě a svého ostrého **lokálního maxima**.
3. Je-li kvadratická forma $f''(a)$ **indefinitní**, pak funkce f **nenabývá** v bodě a lokálního extrému.

Poznámka 3 (Sylvesterovo kritérium). Necht' \mathbf{A} je symetrická matice reálných čísel typu (n, n) . Označme $\{D_k\}$ posloupnost determinantů levých horních rohů. Pak

1. \mathbf{A} je pozitivně definitní, právě když všechna $D_k > 0$;
2. \mathbf{A} je negativně definitní, právě když $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0 \dots$;
3. jestliže všechny hlavní subdeterminanty jsou **nenulové** a navíc nenastaly předchozí případy, pak \mathbf{A} je indefinitní.

Algoritmus: Lokální extrémy (v závorce dimenze pro funkci 2 proměnných):

1. Zderivujeme - máme (dvě) parciální derivace.
2. Položíme derivace rovny nule. Vyřešíme soustavu a najdeme podezřelé body.
3. Vytvoříme matici druhých derivací (2x2).
4. Dosadíme podezřelé body. Pro každý dostaneme matici. Vyhodnotíme ji Sylvesterovým kritériem (příp. technikami z lingebrý) - zjistíme definitnost. Tím vyšetříme podezřelé body a získáme lokální extrémy nebo sedla.
5. Pokud je matice semidefinitní, vyšetříme funkci „nějak jinak“.

Algoritmus: Extrémy na omezené množině:

1. Je-li množina uzavřená, tak odůvodníme, že spojitá funkce na kpt. nabývá extrémy.
2. Extrémy mohou být:
 - (a) na vnitřku množiny jen v místech s nulovými derivacemi (jejich typ nevyšetřujeme, pokud na to nejsme přímo tázáni);
 - (b) v bodech vnitřku, kde neexistuje derivace;
 - (c) na hranici: hraniční křivky (nebo plochy) - obvykle lze dosadit a výraz zjednodušit.
 - (d) na hranici hranice: krajní body, hroty trojúhelníku atp.
3. Všechny podezřelé body sepíšeme a porovnáme jejich funkční hodnoty. Vybereme maximum a minimum.

Příklady

1. Najděte lokální extrémů funkcí

(a) $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$

(b) $f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$

(c) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2)$

(d) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

(e) $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, x, y > 0$

(f) $f(x, y) = (x - y + 1)^2$

(g) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz)$

2. Najděte lokální extrémů funkcí

(a) $f(x, y) = 2y^2 - 4xy + x^4 + 3$

(b) $f(x, y) = y^3 + y^2x - x^2 - 4x$

(c) $f(x, y) = 2x^3 + 9xy^2 + 15x^2 + 27y^2$

(d) $f(x, y) = x^2y + xy^2 + x^2 - x$

(e) $f(x, y) = 5y^2 + 2y^3 + yx^2 + x^2$

3. Najděte lokální extrémů funkcí

(a) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

(b) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz)$

(c) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + \frac{z^2}{2} - 3xz - 2y + 2z$

4. Najděte extrémů funkcí na množině

(a) $f(x, y) = x^3 - 2x^2y + 3y^3$ na $M = [-1; 1]^2$

(b) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 + xy$ na $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

(c) $f(x, y) = x + y$ na $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1\}$

Hint: zobecněné polární souřadnice

(d) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - x + 18y + 4$ na $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 4\}$

(e) $f(x, y) = (x - y)^2 + x^2$ na M ,

kde M je čtverec s vrcholy $A = [2, 0]$, $B = [0, 2]$, $C = [-2, 0]$, $D = [0, -2]$

(f) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ na $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Hint: polární souřadnice

Bonus

5. Najděte lokální extrémů funkce $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy + 2z$

Hint: V $[0, 0, -1]$ zkoumáme přímkou $[x, 0, -1]$.

6. Ukažte, že funkce $f(x, y) = (x - y^2)(2x - y^2)$ má v $[0, 0]$ lok. minimum vzhledem ke všem přímkám, ale nemá tam minimum.

Hint: Zkoumejte hodnoty na křivce $[\frac{3}{4}y^2, y]$.

7. Najděte Hessovu matici v následujících funkcí $[0, 0]$ a diskutujte existenci maxima/minima/sedla vzhledem k semidefinitnosti matice.

(a) $x^4 + y^4$

(b) $-x^4 - y^4$

(c) $x^4 - y^4$