1. cvičení

6. 10. 2011

http://www.karlin.mff.cuni.cz/ kuncova/

Teorie

Definice 1. Nechť funkce f je definována na neprázdném otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je *primitivní funkce k f na I*, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 2 (Rovnost až na konstantu)**.** Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Věta 3 (Integrace per partes)**.** Nechť I je neprázdný otevřený interval, F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí

$$\int g(x)F(x)\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\mathrm{d}x \text{ na } I.$$

Pokud je f navíc spojitá na I, pak množiny na obou stranách rovnosti jsou neprázdné.

Věta 4 (O substituci)**.** (i) Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b). Nechť φ je funkce definovaná na (α,β) s hodnotami v intervalu (a,b), která má v každém bodě $t \in (\alpha,\beta)$ vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) \text{ na } (\alpha,\beta).$$

(ii) Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α,β) nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha,\beta)) = (a,b)$. Nechť funkce f je definována na intervalu (a,b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t) \text{ na } (\alpha,\beta).$$

Pak

$$\int f(x)\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(x)) \text{ na } (a,b).$$

Některé substituce

Typ $\int R(\sin t, \cos t)\, dt$

- vždy lze užít substituci $\tan \frac{t}{2} = x$
- je-li $R(a,-b) = -R(a,b)$, lze užít substituci $\sin t = x$
- je-li $R(-a,b) = -R(a,b)$, lze užít substituci $\cos t = x$
- je-li $R(-a,-b) = R(a,b)$, lze užít substituci $\tan t = x$

Typ $\int R(t, (\frac{at+b}{ct+f})^{1/q})\, dt$

$q \in \mathbb{N}$, $q > 1$, $a, b, c, f \in \mathbb{R}$, $af \neq bc$

- substituce $(\frac{at+b}{ct+f})^{1/q} = x$

Typ $\int R(t, (\frac{at+b}{ct+f})^{1/q})\, dt$

$q \in \mathbb{N}$, $q > 1$, $a, b, c, f \in \mathbb{R}$, $af \neq bc$

- substituce $(\frac{at+b}{ct+f})^{1/q} = x$

Typ $\int R(t, \sqrt{at^2 + bt + c})\, dt$**,** $a \neq 0$

- $at^2 + bt + c$ má dvojnásobný kořen $\alpha \in \mathbb{R}$:
  $\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{a}|t - \alpha|$, pro $a > 0$
- $at^2 + bt + c$ má dva reálné kořeny $\alpha_1 < \alpha_2$: $\sqrt{at^2 + bt + c} = |t - \alpha_1|\sqrt{a\frac{t-\alpha_2}{t-\alpha_1}}$
- $at^2 + bt + c$ nemá reálné kořeny: pak $a > 0$, $c > 0$, a lze užít některou z *Eulerových substitucí*
  $\sqrt{at^2 + bt + c} = \pm\sqrt{a}t + x$ nebo $\sqrt{at^2 + bt + c} = tx + \sqrt{c}$

Věta 5 (O rozkladu na parciální zlomky)**.** Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

(i) st $P <$ st Q,

(ii) $Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_l x + \ beta_l)^{q_l}$,

(iii) a_n, $x_1, \dots, x_k$, $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, $\beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$,

(iv) $p_1, \dots, p_k$, $q_1, \dots, q_l \in \mathbb{N}$,

(v) žádné dva z mnohočlenů $x - x_1$, $x - x_2, \dots, x - x_k$, $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1$, $\dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají společný kořen,

(vi) mnohočleny $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1$, $\dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají reálný kořen.

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k$, B_1^1, $C_1^1, \dots, B_{q_1}^1$, $C_{q_1}^1, \dots$, B_1^l, $C_1^l, \dots, B_{q_l}^l$, $C_{q_l}^l$ taková, že platí

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{(x-x_1)^{p_1}} + \dots + \frac{A_{p_1}^1}{x-x_1} \\ &+ \dots + \frac{A_1^k}{(x-x_k)^{p_k}} + \dots + \frac{A_{p_k}^k}{x-x_k} \\ &+ \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \dots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \ dots \\ 105 &+ \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}} + \dots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{x^2+\alpha_l x+\beta_l}.\end{aligned}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující $Q(x) \neq 0$.

Postup při integraci racionální funkce

1. $\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int P_1(x) + \int \frac{P_2(x)}{Q(x)}$, kde st $P_2 <$ st Q, $Q \neq 0$.
2. Provedeme rozklad na parciální zlomky.
3. Integrace parciálních zlomků:

   (a)

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} = \begin{cases} \frac{-A}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} & n > 1 \\ A\ln|x-a| & n = 1 \end{cases}$$

   toto pro $x \in (-\infty, a)$ nebo (a, ∞).

   (b)

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+\alpha x+\beta)^q} = \frac{B}{2}\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\mathrm{d}x + \left(C - \frac{B\alpha}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}$$

$$\frac{B}{2}\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{-1}{q-1}\frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^{q-1}} & q > 1 \\ \ln(x^2+\alpha x+\beta) & q = 1 \end{cases}$$

   pro $x \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+\alpha x+\beta)^q} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)\right)^q} = \frac{1}{\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)^q}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left[\left(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}}\right)^2 + 1\right]^q}$$

provedeme substituci $t = \frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}}$, celý integrál bude

$$\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}-q} \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^q}$$

pro $q = 1$ získáme arkustangens, pro jiná q je potřeba použít perpartes a postupně snižovat mocninu:

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^q} = \int \frac{1+t^2}{(t^2+1)^q}\mathrm{d}t - \int \frac{t^2}{(t^2+1)^q} = \int \frac{1}{(t^2+1)^{q-1}}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int t\frac{2t}{(t^2+1)^q}$$

První integrál je o stupeň nižší, druhý integrál proženeme per partes a získáme:

$$\int t\frac{2t}{(t^2+1)^q} = \frac{1}{1-q}\frac{t}{(t^2+1)^{q-1}} - \frac{1}{1-q}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{q-1}}$$

celkem tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^q} = \frac{1}{2q-2}\frac{t}{(t^2+1)^{q-1}} + \frac{2q-3}{2q-2}\int \frac{1}{(t^2+1)^{q-1}}\mathrm{d}t$$

Základní integrály

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan\ x + c = -\mathrm{arcctg}\ x + c$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\ x + c = -\arccos\ x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + c$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\mathrm{cotg}\ x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan\ x + c$$

$$\int \sinh\ x \mathrm{d}x = \cosh\ x + c$$

$$\int \cosh\ x \mathrm{d}x = \sinh\ x + c$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x}\mathrm{d}x = -\mathrm{cotanh}\ x + c$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\mathrm{d}x = \mathrm{tgh}\ x + c$$

Příklady

Hint

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Příklady

Integrály

1. $$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$$
2. $$\int \sin^2 x \mathrm{d}x$$
3. $$\int \text{arctan } x \mathrm{d}x$$
4. $$\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+x} \mathrm{d}x$$
5. $$\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x$$
6. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$$
7. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x \sin^2 x}$$
8. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$$
9. $$\int \frac{2y^3+2y}{y^2+2y-3}$$

Diferenciální rovnice

10. $$y'(x) = \frac{x^2}{y^2(x)}$$
11. $$y' + 2y = e^{-x}$$
12. $$y'xy = x^2 + y^2$$
13. $$y'' - y = 0$$
14. $$y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} y$$
15. $$y' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 3e^{2x} \\ x \end{pmatrix}$$