

1. cvičení

6. 10. 2011

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>

Příklady

Hint

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= 1 - \cos^2 x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x\end{aligned}$$

Příklady

Integrály

1.

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \\ \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + c\end{aligned}$$

2.

$$\int \sin^2 x dx$$

užijeme hint, sečteme dvě nápovědné rovnice a $\cos 2x$ již snadno zintegrujeme, výsledek

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

3.

$$\int \arctan x dx$$

per partes,

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

4.

$$\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+x} dx$$

substituce $y = \sqrt{x}$,

$$\arctan^2(\sqrt{x}) + c$$

5.

$$\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$$

substituce $y = 1 + \cos^2 x$,

$$-\frac{1}{2}(1 + \cos^2 x - \ln(1 + \cos^2 x)) + c$$

6.

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x}$$

substituce $y = \tan \frac{x}{2}$

$$-2 \frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 1} + c,$$

nezapomeňte funkci poslepotvat

7.

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin^2 x}$$

substituce $y = \sin x$,

$$-\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2} \ln |1 + \sin x| - \frac{1}{2} \ln |1 - \sin x|$$

8.

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$$

Substituce je $t = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$,

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1} - \ln |\sqrt{x} + \sqrt{x+1}| - \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} + \frac{1}{2(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})^2} \right)$$

9.

$$\int \frac{2y^3 + 2y}{y^2 + 2y - 3}$$

parciální zlomky

$$y^2 - 4y + \ln |y - 1| + 15 \ln |y + 3|$$

Diferenciální rovnice

10.

$$y'(x) = \frac{x^2}{y^2(x)}$$

11.

$$y' + 2y = e^{-x}$$
$$y(x) = e^{-x} + ce^{-2x}$$

na \mathbb{R} .

12.

$$y'xy = x^2 + y^2$$
$$y(x) = \pm x \sqrt{2 \ln |x| + c}$$

na $(-\infty, -e^{-\frac{c}{2}}), (e^{-\frac{c}{2}}, \infty)$

13.

$$y'' - y = 0$$
$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

na \mathbb{R}

14.

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} y$$
$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}$$

15.

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 3e^{2x} \\ x \end{pmatrix}$$
$$y(x) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} 3x \\ -1 + 2x \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}$$

na \mathbb{R}