Masarykova univerzita

Přírodovědecká fakulta

Limity funkcí více proměnných

Bakalářská práce

Zdeněk Kadeřábek

2007

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně za odborné pomoci doc. RNDr. Josefa Kalase, CSc. a že jsem použil pouze literaturu, která je uvedena v seznamu literatury.

V Brně dne 14. května 2007

....

Rád bych poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce doc. RNDr. Josefu Kalasovi, CSc. za jeho pomoc, kterou mi poskytl při vypracovávání bakalářské práce.

Obsah

Úvod

Předmětem bakalářské práce jsou limity funkcí více proměnných a jejím cílem je shrnutí teorie o vlastních limitách funkcí více proměnných a rozšíření tohoto pojmu o limity nevlastní a v nevlastním bodě. Text byl zpracován z různých zdrojů, zejména čerpám z [1], [4] a [6].

Bakalářská práce je členěna do čtyř částí. V první kapitole se zabývám metrickými prostory. Jsou zde uvedeny nejdůležitější pojmy, které jsou ve zbylém textu používány. Podstatné je rozšíření metrického prostoru o nevlastní body, které jsou důležité pro limity v nevlastních bodech. Náplní druhé kapitoly je definování pojmu limity a uvedení vět pojednávajících o jejích vlastnostech. Důkazy jsou uvedeny jen k vybraným větám, ostatní je možné nalézt v uvedené použité litaratuře. Třetí kapitola je věnována výpočtům limit. V její první části jsou uvedeny postupy při výpočtech vlastních limit a v druhé části jsou řešeny nevlastní limity a limity v nevlastních bodech. Teorie je doplněna o konkrétní příklady, na které se aplikují uvedené postupy. Poslední kapitola obsahuje řešené příklady, které završují problematiku limit funkcí více proměnných.

Bakalářská práce je vysázena systémem LaTeX.

Limity funkcí více proměnných

Na základě znalosti limit u funkcí jedné proměnné jsme schopni vyšetřit chování funkčních hodnot v případě, kdy se nezávisle proměnná blíží k nějakému bodu X_0. Díky limitě můžeme odhalovat spojitosti nebo nespojitosti funkcí v určitém bodě, definovat derivaci funkce. Pojem limity funkcí více proměnných je v diferenciálním počtu stejně důležitý jako limita funkce jedné proměnné, ale podstatně komplikovanější. U funkce jedné proměnné jsme se přibližovali k bodu vždy v jednom směru, ale u funkcí více proměnných se lze blížit k bodu X_0 nekonečně mnoha způsoby (po přímkách, po parabolách,...). Tyto a jiné vlastnosti si názorně ukážeme na příkladech.

K definování pojmu limity funkce n-proměnných potřebujeme s množinou $\mathbb{R}^n$ zacházet jako s metrickým prostorem. Zavedeme tedy na $\mathbb{R}^n$ metriku. Z toho důvodu si připomeneme základní poznatky z teorie metrických prostorů.

Kapitola 1

Základy metrických prostorů

Definice 1.0.1. Buď P neprázdná množina. Uspořádanou dvojici (P, ρ), kde $\rho : P \times P \to \langle 0, \infty)$ je zobrazení, nazveme *metrickým prostorem*, jestliže pro všechna $X, Y, Z \in P$ jsou splněny následující axiomy:

$$\begin{array}{lll} (M1) & \rho(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y & \text{(axiom totožnosti)} \\ (M2) & \rho(X,Y) = \rho(Y,X) & \text{(axiom symetrie)} \\ (M3) & \rho(X,Y) + \rho(Y,Z) \geq \rho(X,Z) & \text{(trojúhelníková nerovnost).} \end{array}$$

Zobrazení ρ nazýváme *metrika na* P, prvky množiny P nazýváme *body metrického prostoru* (P, ρ), číslo $\rho(X, Y)$ nazýváme *vzdálenost* bodů X, Y.

Nyní připomeňme několik metrik, které později použijeme při definování okolí bodu v $\mathbb{R}^n$. Nechť je $P = \mathbb{R}^n, X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{ll} \text{Euklidovská metrika:} & \rho_2(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \\ \text{Součtová metrika:} & \rho_1(X,Y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \\ \text{Maximální metrika:} & \rho_\infty(X,Y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, 2, \ldots, n\} \end{array}$$

Pro metrický prostor $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$ je zaveden název *euklidovský prostor*. V případě $n = 2$ odpovídá vzdálenost $\rho_2(X, Y)$ délce úsečky s krajními body X, Y v rovině (pro $n = 3$ je rovna vzdálenosti dvou bodů v trojrozměrném prostoru).
Metrický prostor $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$ budeme značit symbolem $\mathbb{E}^n$.

Abychom mohli definovat ekvivalentnost dvou metrik, uvedeme nyní definici, která se týká konvergence posloupnosti bodů.

Definice 1.0.2. Řekneme, že posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ bodů metrického prostoru (P, ρ) *konverguje k bodu* $X_0 \in P$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\rho(X_n, X_0) < \varepsilon$. Říkáme také, že posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ je *konvergentní*, a značíme $X_n \xrightarrow{\rho} X_0$ nebo $X_n \to X_0$.

Definice 1.0.3. Buď P množina, v níž jsou definovány dvě metriky ρ, σ tak, že máme dva metrické prostory $(P, \rho), (P, \sigma)$. Metriky ρ, σ nazýváme *ekvivalentní* v množině P, jestliže pro libovolnou posloupnost bodů $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ množiny P platí

$$X_n \xrightarrow{\rho} X_0 \in P \quad \text{právě tehdy, když} \quad X_n \xrightarrow{\sigma} X_0 \in P.$$

Metriky ρ_∞, ρ_1 a ρ_2 jsou v $\mathbb{R}^n$ navzájem ekvivalentní.

Definice 1.0.4. Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $X_0 \in P$. *Okolím bodu* X_0 nazveme libovolnou otevřenou množinu $\mathcal{O}(X_0)$ takovou, že $X_0 \in \mathcal{O}(X_0)$.
Ryzím okolím bodu X_0 rozumíme množinu $\mathcal{O}^*(X_0) = \mathcal{O}(X_0) \setminus \{X_0\}$, kde $\mathcal{O}(X_0)$ je otevřená množina v (P, ρ) taková, že $X_0 \in \mathcal{O}(X_0)$.

Definice 1.0.5. Buď (P, ρ) metrický prostor. Pro $X_0 \in P, r > 0$ definujeme:
uzavřenou kouli se středem X_0 a poloměrem r — $K[X_0, r] = \{X \in P : \rho(X, X_0) \leq r\}$,
otevřenou kouli se středem X_0 a poloměrem r — $K(X_0, r) = \{X \in P : \rho(X, X_0) < r\}$.

Speciálně rozumíme kouli $K(X_0, \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, *kulovým okolím* $\mathcal{O}(X_0)$ *bodu* X_0 metrického prostoru (P, ρ). Kulové okolí bodu X_0, kde $\varepsilon > 0$, můžeme také nazývat jako ε — okolí bodu X_0. Ryzím kulovým okolím $\mathcal{O}^*(X_0)$ bodu X_0 budeme rozumět množinu

$$\mathcal{O}^*(X_0) = \{X \in \mathbb{R}^n, \rho(X, X_0) < \varepsilon\} \setminus \{X_0\}, \quad \text{kde} \quad \varepsilon > 0.$$

Na základě zvolené metriky získáme různé druhy okolí. Např. na množině $\mathbb{R}^2$ obdržíme kruhové okolí, použijeme-li euklidovskou metriku. Čtvercové okolí získáme při použití maximální metriky. Pokud si vybereme součtovou metriku, bude okolí bodu vypadat jako čtverec postavený na jednom vrcholu.

Zvolíme-li maximální metriku, je okolím bodu X_0 kartézský součin okolí jednotlivých souřadnic bodu X_0:

$$\mathcal{O}(X_0) = (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \times (x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon) \times \cdots \times (x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon).$$

Uveďme ještě, že bod $X_0 \in P$ se nazývá *hromadný bod množiny* M, jestliže pro každé okolí $\mathcal{O}(X_0)$ bodu X_0 platí $(\mathcal{O}(X_0) \cap M) \setminus \{X_0\} \neq \emptyset$. Množina všech hromadných bodů množiny M se nazývá *derivace množiny* M a značí se M'. *Izolovaným bodem množiny* M rozumíme bod $X_0 \in P$, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(X_0)$ bodu X_0 takové, že $\mathcal{O}(X_0) \cap M = \{X_0\}$.

V následujícím textu budeme potřebovat spojitost funkce v bodě, proto si uvedeme definici tohoto pojmu.

Definice 1.0.6. Mějme dva metrické prostory $(P_1, \rho), (P_2, \sigma)$. Zobrazení $f : P_1 \multimap P_2$ nazveme *spojité v bodě* $X_0 \in P_1$, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechny body $X \in P_1$ splňující $\rho(X, X_0) < \delta$ platí $\sigma\big(f(X), f(X_0)\big) < \varepsilon$.

Je-li bod X_0 izolovaný bod metrického prostoru P_1, pak každé zobrazení f definované na P_1 je v izolovaném bodě X_0 spojité.

Následující definice o spojitosti funkce je speciálním případem definice 1.0.6.

Definice 1.0.7. Nechť P je neprázdná množina. O funkci $f : P \multimap \mathbb{R}$ říkáme, že je *spojitá v bodě* $X_0 \in P$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechny body $X \in P$ splňující $|X - X_0| < \delta$ platí $|f(X) - f(X_0)| < \varepsilon$.

Rozšíření metrického prostoru o nevlastní body

Z předchozího textu známe například maximální metriku v metrickém prostoru $\mathbb{E}^n$. Nevýhodou je, že metrický prostor s touto metrikou neobsahuje nevlastní body, které budeme v následujícím textu potřebovat. Proto k $\mathbb{R}$ přidáme dva nevlastní body $+\infty$ a $-\infty$. Tím dostaneme množinu $\mathbb{R}^*$, do níž chceme zavést metriku, abychom dostali metrický prostor.

K tomuto cíli sestrojíme nějakou konečnou reálnou funkci φ jedné reálné proměnné, která je rostoucí, spojitá a omezená v intervalu $(-\infty, +\infty)$. Takovou funkcí je

$$\varphi(X) = \frac{X}{1 + |X|}.$$

Tato funkce je rostoucí, spojitá, lichá v intervalu $(-\infty, +\infty)$ a $\lim_{X \to +\infty} \varphi(X) = 1$. Položme $\varphi(+\infty) = 1, \varphi(-\infty) = -1$. Nyní funkce φ zobrazuje $\mathbb{R}^*$ na $\langle -1, 1 \rangle$ a množinu $\mathbb{R}$ na $(-1, 1)$. Protože je funkce φ prostá, existuje k ní inverzní zobrazení ψ:

$$\psi(Y) = \frac{Y}{1 - |Y|}.$$

Definujme nyní v $\mathbb{R}^*$ metriku ρ^* rovnicí

$$\rho^*(X, Y) = |\varphi(X) - \varphi(Y)|.$$

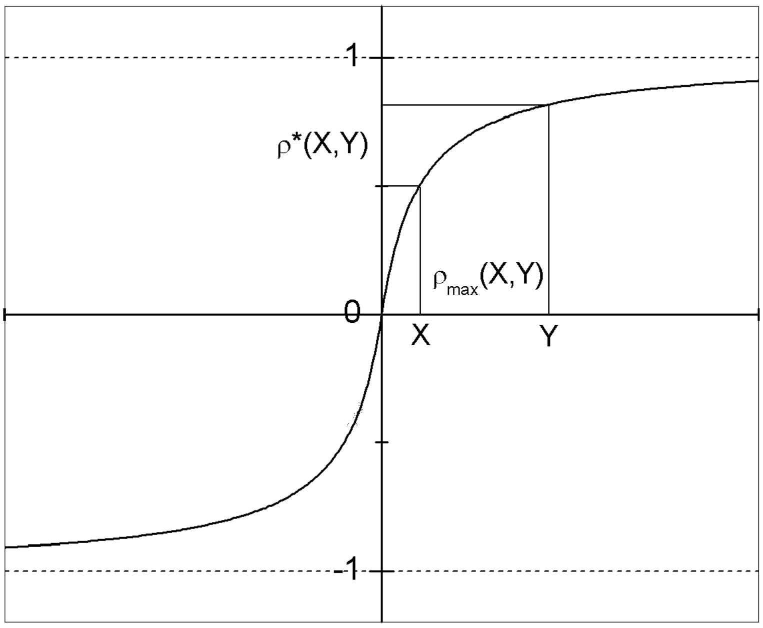
Ověříme vlastnosti, které musí podle definice 1.0.1 metrika splňovat. Axiom totožnosti a symetrie je zřejmý. Trojúhelníková nerovnost také platí, protože

$$|\varphi(X) - \varphi(Z)| = |\varphi(X) - \varphi(Z) + \varphi(Y) - \varphi(Y)| \leq |\varphi(X) - \varphi(Y)| + |\varphi(Y) - \varphi(Z)|.$$

Nově nadefinovaná metrika ρ^* se nazývá *redukovaná metrika* a v $\mathbb{R}$ je s metrikami $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$ ekvivalentní. Metrický prostor $(\mathbb{R}^*, \rho^*)$ budeme značit $\mathbb{E}^*$.

Okolí bodu $+\infty$ v metrickém prostoru $\mathbb{E}^*$ je otevřený interval $(d, +\infty)$, kde $d \in \mathbb{R}$, a okolím bodu $-\infty$ rozumíme interval $(-\infty, d)$.

Díky konstrukci rozšířeného metrického prostoru $\mathbb{E}^*$ můžeme pracovat s metrickým prostorem $\mathbb{E}^{*^n} = \big(\mathbb{R}^{*^n}, \rho_n^* = \max\{\rho^*(x_1, y_1), \rho^*(x_2, y_2), \ldots, \rho^*(x_n, y_n)\}\big)$, kde $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{*^n}$.



Obrázek 1.1: Graf funkce $\varphi(X) = \frac{X}{1+|X|}$. Je zde znázorněna vzdálenost bodů X, Y pomocí redukované a maximální metriky.

Poznámka 1.0.1. Uvažujeme-li n-rozměrné *kvádrové okolí* nevlastního bodu $(a, +\infty, -\infty) \in \mathbb{R}^{*^3}$, kde $a \in \mathbb{R}$, pak uvedené okolí bodu $(a, +\infty, -\infty)$ vypadá takto: $\mathcal{O}\big((a, +\infty, -\infty)\big) = \{X \in \mathbb{R}^{*^3}; |x - a| < \delta_1, y > \delta_2, z < \delta_3\}$, kde $\delta_1 > 0, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R}$.

Druhou cestou, jak dostat metrický prostor rozšířený o nevlastní body, je přidání jediného nevlastního bodu ∞ (nezaměňovat s $+\infty$) k množině $\mathbb{R}^n$. Takto rozšířenou množinu budeme značit ${}^*\mathbb{R}^n$.
Abychom dostali metrický prostor na množině ${}^*\mathbb{R}^n$, musíme na této množině zavést metriku. Pro jednoduchost nalezneme metriku k množině ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Metriku v ${}^*\mathbb{R}$ zkonstruujeme následujícím způsobem: V prostoru $\mathbb{R}^2$ (s metrikou ρ_2) sestrojíme kružnici k o rovnici $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (souřadnice bodu v $\mathbb{R}^2$ budeme značit α, β). Každému bodu $X \in \mathbb{R}$ přiřadíme bod na kružnici k takto: Spojíme bod $X \in \mathbb{R}$ přímkou se 'severním pólem' kružnice $(0, 1)$. Tato přímka protne k v bodě $(0, 1)$ a v jednom bodě se souřadnicemi

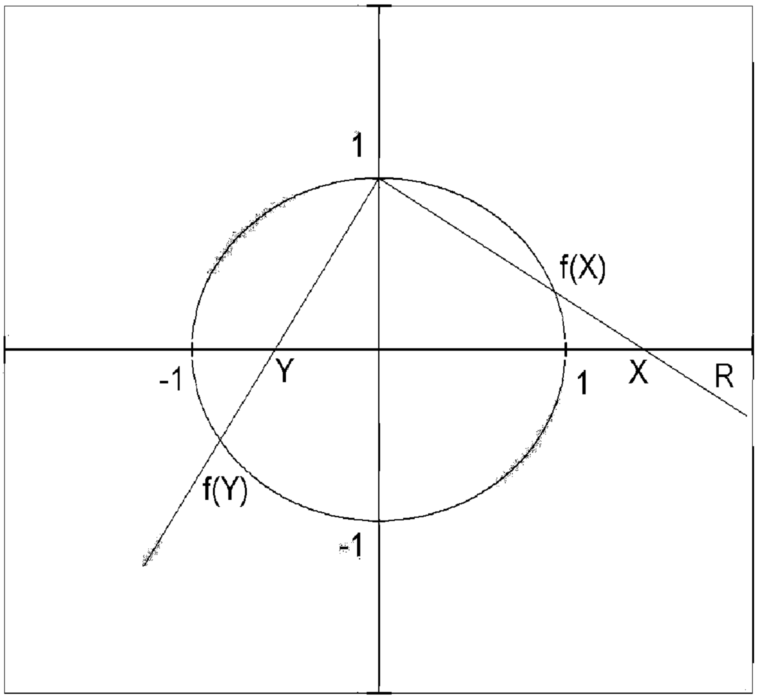
$$\alpha = \lambda X, \quad \beta = 1 - \lambda \quad (\lambda \neq 0).$$

Číslo λ nalezneme z podmínky $(\lambda X)^2 + (1 - \lambda)^2 = 1$, která nám dává pro λ kořeny 0 (ten nás nezajímá) a $\lambda = \frac{2}{X^2+1} \neq 0$. Bodu X tedy přiřadíme právě tento bod (α, β):

$$\alpha = \frac{2X}{X^2 + 1}, \quad \beta = \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1}. \tag{1.1}$$

Naopak, je-li dán libovolný bod (α, β) kružnice k, různý od bodu $(0, 1)$, tzn.

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad \beta < 1, \tag{1.2}$$



Obrázek 1.2: Ukázka přiřazení obrazů $f(X), f(Y) \in k$ bodům $X, Y \in {}^*\mathbb{R}$.

existuje k němu právě jeden bod $X \in \mathbb{R}$, pro který platí vztahy (1.1).
Dokažme toto tvrzení. Nechť jsou dány α, β tak, že platí (1.2). Pak druhá rovnice (1.1) je splněna právě tehdy, když platí

$$X^2 + 1 = \frac{2}{1-\beta}. \tag{1.3}$$

(Tato rovnice vznikla úpravou kvadratické rovnice, z které jsme na začátku dostali kořeny λ, a dosazením za λ.) Dále první rovnice z (1.1) je ekvivalentní s rovnicí

$$X = \frac{\alpha}{1-\beta}. \tag{1.4}$$

Budeme-li tedy volit X podle (1.4), bude platit (1.1), jakmile ještě dokážeme, že platí (1.3).
Ale z (1.4), (1.2) plyne

$$X^2 + 1 = \frac{\alpha^2 + (1-\beta)^2}{(1-\beta)^2} = \frac{2}{1-\beta}.$$

Dokázali jsme tedy platnost tvrzení.
Sestrojme nyní zobrazení f množiny ${}^*\mathbb{R}$ na kružnici k v $\mathbb{R}^2$ takto: Je-li $X \in \mathbb{R}$, buď $f(X)$ právě bod $(\alpha, \beta) \in k$, který je dán vztahy:

$$\alpha = \frac{2X}{X^2+1}, \quad \beta = \frac{X^2-1}{X^2+1}.$$

Pro nevlastní bod ∞ klademe $f(\infty) = (0,1)$. Tím je dáno prosté zobrazení $^*\mathbb{R}$ na k. Nyní definujme metriku $^*\rho$ v $^*\mathbb{R}$ následovně: Pro dva body $X, Y \in {}^*\mathbb{R}$ definujeme

$$^*\rho(X,Y) = \rho_2\big(f(X), f(Y)\big).$$

Axiomy, které musí metrika $^*\rho$ podle definice 1.0.1 splňovat, plynou z toho, že funkce f je prostá a ρ_2 je metrika. V $\mathbb{R}$ jsou metriky $^*\rho, \rho_1, \rho_2$ a ρ_∞ ekvivalentní.

Metrický prostor $(^*\mathbb{R}, {}^*\rho)$ budeme značit symbolem $^*\mathbb{E}$. Okolí bodu ∞ v metrice $^*\rho$ je $(-\infty, -d) \cup (d, +\infty)$, kde d je nezáporné reálné číslo.

Sestrojili jsme tedy metrický prostor $(^*\mathbb{R}, {}^*\rho)$. Analogicky se sestrojí metrický prostor $(^*\mathbb{R}_2, {}^*\rho_2)$, $^*\mathbb{R}_2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, kde budeme bodu $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ přiřazovat bod (α, β, γ) na povrchu koule $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, který vznikne průnikem přímky procházející body (x,y) a $(0,0,1)$ s povrchem koule. Nevlastní bod ∞ zobrazíme na bod $(0,0,1)$. Pro takto určené souřadnice bodu (α, β, γ) platí:

$$\alpha = \frac{2x}{x^2+y^2+1}, \quad \beta = \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \quad \gamma = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}.$$

Podrobnější sestrojení metrického prostoru $(^*\mathbb{R}_2, {}^*\rho_2)$ lze najít v [4]. Podobnou úvahou lze sestrojit i metrické prostory $(^*\mathbb{R}_n, {}^*\rho_n)$. Metrický prostor $(^*\mathbb{R}_n, {}^*\rho_n)$ budeme značit symbolem $^*\mathbb{E}_n$.

Poznámka 1.0.2. Kulové δ-okolí $\mathcal{O}(\infty)$ bodu $\infty \in {}^*\mathbb{R}_n$ je množina $\mathcal{O}(\infty) = \{X \in {}^*\mathbb{R}_n; {}^*\rho_n(X,0) > \delta\}, \delta > 0$, kde $0 = (0, \ldots, 0)$, a představuje doplněk uzávěru n-rozměrné koule $K(0,\delta)$ v $^*\mathbb{E}_n$ se středem v počátku 0.

Na základě rozšíření metrického prostoru o nevlastní body, můžeme v následujícím textu pracovat s nejrůznějšími metrickými prostory, např. $\mathbb{E}^{*^2} = (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, \rho_2^*)$, $^*\mathbb{E}^2 = \big(^*\mathbb{R} \times {}^*\mathbb{R}, \max\{^*\rho(x_1,y_1), {}^*\rho(x_2,y_2)\}\big)$, kde $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in {}^*\mathbb{R}^2$, nebo $^*\mathbb{E}_2 = (\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}, {}^*\rho_2)$. Pokud budeme uvažovat metriku $\rho(X,Y) = \max\{^*\rho(x_1,y_1), \rho^*(x_2,y_2)\}$, můžeme používat i prostor $(^*\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \rho)$.

Kapitola 2

Limita funkce

2.1 Definice limity

Definice 2.1.1. Mějme dva metrické prostory $(P_1, \rho), (P_2, \sigma)$, bod $A \in P_1$ a zobrazení $f : P_1 \multimap\!\!\!\longrightarrow P_2$ definované v ryzím okolí bodu A. Řekneme, že *zobrazení f má v bodě A limitu* rovnu $L \in P_2$, a píšeme

$$\lim_{X \to A} f(X) = L,$$

když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$X \in P_1, 0 < \rho(X, A) < \delta \quad \text{implikuje} \quad \sigma(f(X), L) < \varepsilon.$$

Definice 2.1.2. Nechť máme dva metrické prostory $(P_1, \rho), (P_2, \sigma), M \subseteq P_1$, bod $A \in P_1$, zobrazení $f : P_1 \multimap\!\!\!\longrightarrow P_2$, a nechť bod A je hromadným bodem množiny M. Řekneme, že *funkce f má v bodě A limitu vzhledem k množině M* rovnu $L \in P_2$, a píšeme

$$\lim_{X \overset{M}{\to} A} f(X) = L,$$

když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$X \in M, 0 < \rho(X, A) < \delta \qquad \text{implikuje} \qquad \sigma(f(X), L) < \varepsilon.$$

Limitu funkce definujeme jako speciální případ definice 2.1.1 pro $(P_1, \rho) = \mathbb{E}^{*^n}$, $(P_2, \sigma) = \mathbb{E}^*$, kdy zobrazení f je funkcí (podobně lze formulovat definici limity v ${}^*\mathbb{E}_n$).

Definice 2.1.3. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^{*n} \multimap\!\!\!\longrightarrow \mathbb{R}^*$ definovaná v ryzím okolí bodu $A \in \mathbb{R}^{*n}$ má v bodě A limitu $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $\mathcal{O}^*(A)$ takové, že pro všechna $X \in \mathcal{O}^*(A)$ platí $f(X) \in \mathcal{O}(L)$.
Jestliže $L \in \mathbb{R}$, nazývá se limita *vlastní*. Pokud je L rovna $+\infty$, $-\infty$ nebo ∞, jde o *nevlastní* limitu. Bod A se nazývá *limitní bod.*

Kromě zápisu limity $\lim_{X \to A} f(X) = L$ se můžeme setkat s následujícími tvary:

$$\lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(a_1,\dots,a_n)} f(x_1,\dots,x_n) = L$$

nebo

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \vdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1,\dots,x_n) = L.$$

Příklad 2.1.1. Na základě konkrétního výběru okolí limitního bodu a limity definujte následující limity:

$$\text{a)} \lim_{(x,y,z)\to(3,2,-1)} f(x,y,z) = 1$$

Řešení: Nyní zformulujeme pomocí konkrétní specifikace okolí bodu tzv. $\varepsilon - \delta$ *definici limity*. Řekneme, že funkce $f(x,y,z)$ definovaná v ryzím okolí bodu $(3,2,-1)$ má v bodě $(3,2,-1)$ limitu 1, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každý bod (x,y,z) splňující $|x-3| < \delta, |y-2| < \delta, |z+1| < \delta, (x,y,z) \neq (3,2,-1)$ platí $|f(x,y,z)-1| < \varepsilon$.

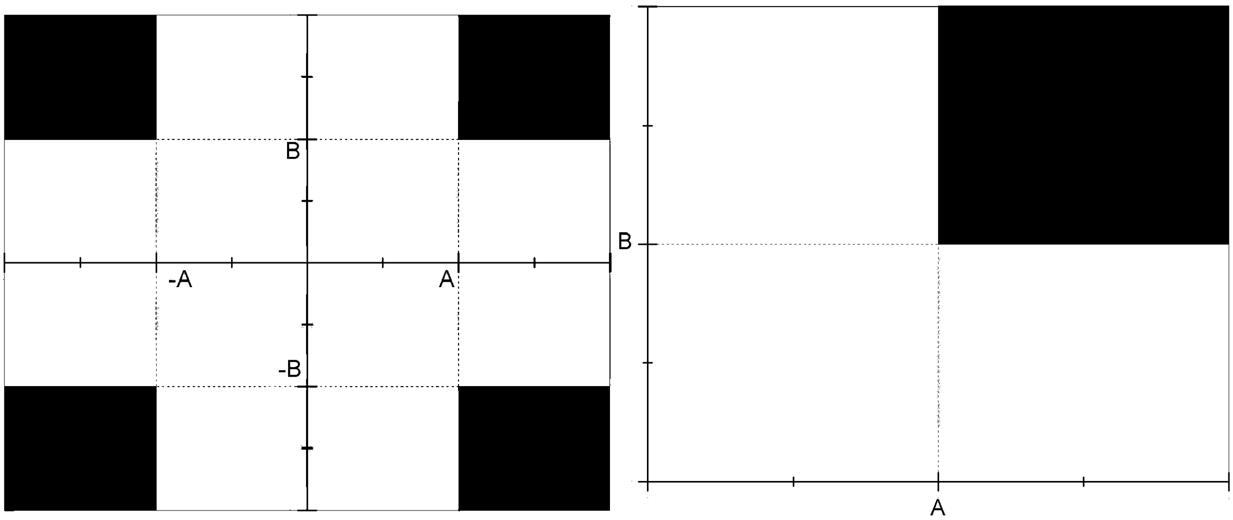
$$\text{b)} \lim_{(x,y,z)\to(-1,0,3)} f(x,y,z) = +\infty$$

Řešení: Řekneme, že funkce $f(x,y,z)$ definovaná v ryzím okolí bodu $(-1,0,3)$ má v bodě $(-1,0,3)$ nevlastní limitu $+\infty$, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každý bod (x,y,z) splňující $|x+1| < \delta, |y| < \delta, |z-3| < \delta, (x,y,z) \neq (-1,0,3)$ platí $f(x,y,z) > K$.

Poznámka 2.1.1. (o nevlastních bodech) U funkce jedné proměnné jsme se setkali s nevlastními limitami (o kterých již byla řeč) a s limitami v nevlastních bodech $-\infty$ a $+\infty$. Např. Eulerovo číslo e je limita funkce $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ v nevlastním bodě $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. V předcházející kapitole jsme zavedli metrické prostory s nevlastními body $\mathbb{E}^{*n}$ a ${}^*\mathbb{E}_n$, které nám umožňují počítat limity v nevlastních bodech. Zamysleme se nyní nad pojmem nevlastního bodu.

Nevlastním bodem rozumíme takový bod, jehož alespoň jedna souřadnice je rovna $-\infty$, $+\infty$ nebo ∞. Uvedeme příklady nevlastních bodů pro následující prostory:

$$\begin{aligned}
&{}^*\mathbb{R}_3: \quad \infty,\\
&{}^*\mathbb{R}^3: \quad (\infty,\infty,\infty), (\infty,2,0), (1,2,\infty),\\
&\mathbb{R}^{*4}: \quad (+\infty,0,1,-\infty), (+\infty,+\infty,-\infty,1), (-\infty,1,2,3),\\
&\mathbb{R}^* \times {}^*\mathbb{R}: \quad (+\infty,2), (-\infty,\infty), (1,\infty),\\
&\mathbb{R}^* \times {}^*\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*: (+\infty,\infty,2,-\infty), (0,\infty,\infty,+\infty), (-\infty,3,\infty,-1).
\end{aligned}$$



Obrázek 2.1: Na levém obrázku je znázorněno okolí nevlastního bodu $(\infty, \infty) \in {}^*\mathbb{R}^2$. Druhý obrázek nám ukazuje okolí nevlastního bodu $(+\infty, +\infty) \in \mathbb{R}^{*2}$.

V dalším textu budeme také používat zápis $\lim\limits_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x, y) = L$ a budeme tím myslet $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} f(x, y) = L$.

Příklad 2.1.2. Definujte následující nevlastní limitu v nevlastním bodě:

$$\lim_{(x,y,z)\to(+\infty,1,-\infty)} f(x, y, z) = -\infty$$

Řešení: Řekneme, že funkce $f(x, y, z)$ má v nevlastním bodě $(+\infty, 1, -\infty)$ nevlastní limitu $-\infty$, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$ existují $\delta > 0, N \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, kde $x > N, |y - 1| < \delta, z < N$ a $y \neq 1$, platí $f(x, y, z) < K$.

2.2 Věty o limitě

Pro limitu funkce více proměnných platí některé věty, které jsou obdobné větám o limitě funkce jedné proměnné. U vybraných vět bude uveden příslušný důkaz, ostatní necháváme bez důkazu s tím, že jsou většinou podobné jako u limit funkcí jedné proměnné.

Věta 2.2.1. *Zobrazení* $f : (P_1, \rho) \multimap (P_2, \sigma)$ *má v bodě* X_0 *nejvýše jednu limitu.*

Důkaz: Větu dokážeme sporem. Nechť $(P_1, \rho), (P_2, \sigma)$ jsou metrické prostory. Předpokládejme, že zobrazení f má dvě různé limity L_1, L_2. Buď $\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma(L_1, L_2) > 0$.

Na základě poznatku, že $\lim_{X\to X_0} f(X) = L_1$, existuje ryzí okolí $\mathcal{O}_1^*(X_0)$ takové, že pro všechna $X \in \mathcal{O}_1^*(X_0)$ platí $\sigma(f(X), L_1) < \varepsilon$. Protože $\lim_{X\to X_0} f(X) = L_2$, existuje ryzí okolí $\mathcal{O}_2^*(X_0)$ takové, že pro všechna $X \in \mathcal{O}_2^*(X_0)$ platí $\sigma(f(X), L_2) < \varepsilon$. Položme $\mathcal{O} = \big(\mathcal{O}_1^*(X_0) \cap \mathcal{O}_2^*(X_0)\big)$. Pak $\mathcal{O}$ je také ryzí okolí bodu X_0 a pro všechna $X \in \mathcal{O}$ platí, že

$$\sigma(L_1, L_2) \leq \sigma(L_1, f(X)) + \sigma(f(X), L_2) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \sigma(L_1, L_2),$$

což je spor.

Věta 2.2.2. *Nechť* $\lim_{X\to X_0} f(X) = 0$*, funkce* f *je definovaná v ryzím okolí bodu* X_0 *a funkce* g *je ohraničená v tomto ryzím okolí bodu* X_0 *(tj. existuje konstanta* $K \geq 0$ *taková, že* $|g(X)| \leq K$ *v tomto ryzím okolí). Pak*

$$\lim_{X\to X_0} f(X)g(X) = 0.$$

Důkaz: Nechť $\varepsilon > 0$ a $\mathcal{V}(0)$ je ε — okolí bodu 0. Protože funkce g je ohraničená, pak k jistému okolí $\mathcal{O}(X_0)$ bodu X_0, existuje číslo $k \in \mathbb{R}$ takové, že $|g(X)| \leq k$ pro každý bod $X \in \mathcal{O}(X_0), X \neq X_0$. Buď $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{k}$. K ε_1 - okolí $\mathcal{V}_1(0)$ bodu 0 existuje okolí $\mathcal{O}_1(X_0)$ bodu X_0 takové, že pro každý bod $X \in \mathcal{O}_1(X_0), X \neq X_0$ je $f(X) \in \mathcal{V}_1(0)$, tj. $|f(X)| < \varepsilon_1$ (což plyne z předpokladu, že $\lim_{X\to X_0} f(X) = 0$). Nechť $\mathcal{O}_2(X_0) = \big(\mathcal{O}(X_0) \cap \mathcal{O}_1(X_0)\big)$. Potom $\mathcal{O}_2(X_0)$ je okolí bodu X_0 a pro každý bod $X \in \mathcal{O}_2(X_0), X \neq X_0$ platí:

$$|f(X)| < \varepsilon_1, \quad |g(X)| \leq k, \quad \text{což implikuje} \quad |f(X)g(X)| < \varepsilon_1 k = \frac{\varepsilon}{k}k = \varepsilon.$$

Tedy $f(X)g(X) \in \mathcal{V}(0)$ a platí $\lim_{X\to X_0} f(X)g(X) = 0$.

Příklad 2.2.1. Určete hodnotu limity

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}.$$

Řešení: Pokud zkusíme do vztahu dosadit limitní bod, zjistíme, že dostaneme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$. Zadanou funkci proto rozložíme na součin $\frac{x^2y}{x^2+y^2} = x\frac{xy}{x^2+y^2}$ a položíme $f(x,y) = x, \quad g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Budeme se snažit použít větu 2.2.2, ale musíme ověřit, zda v tomto příkladě platí výchozí podmínky věty 2.2.2. Zřejmě platí

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

a f je definována v ryzím okolí bodu $(0,0)$. Nyní musíme dokázat, že funkce $g(x,y)$ je ohraničená.
Pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$ je $(|x| - |y|)^2 \geq 0$. Z toho plyne:

$$x^2 - 2|x||y| + y^2 \geq 0 \quad \text{a} \quad 2|x||y| \leq x^2 + y^2.$$

Předpokládáme-li nyní, že $(x, y) \neq 0$, dostaneme po úpravě:

$$\frac{|x||y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Ale

$$\frac{|x||y|}{x^2 + y^2} = \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| = |g(x, y)|,$$

tedy pro všechny body $(x, y) \neq 0$ je

$$|g(x, y)| \leq \frac{1}{2}.$$

Funkce g je definována všude s výjimkou bodu 0 a je ohraničená. Podle věty 2.2.2 je tedy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Věta 2.2.3. (o limitě složeného zobrazení) *Nechť existuje složené zobrazení $f \circ g$, nechť platí $\lim_{X \to A} g(X) = B$ a zobrazení f je v bodě B spojité. Pak*

$$\lim_{X \to A} f(g(X)) = f(B).$$

Důkaz: Máme dokázat, že ke každému okolí $\mathcal{O}(f(B))$ bodu $f(B)$ existuje okolí $\mathcal{O}(A)$ bodu A takové, že pro každé $X \in \mathcal{O}(A) \setminus \{A\}$ je $f(g(X)) \in \mathcal{O}(f(B))$.

Ze spojitosti zobrazení f v bodě B vyplývá následující tvrzení: $\lim_{X \to B} f(X) = f(B)$. To znamená, že ke každému okolí $\mathcal{O}(f(B))$ bodu $f(B)$ existuje okolí $\mathcal{O}(B)$ bodu B takové, že pro každé $X \in \mathcal{O}(B)$ je $f(X) \in \mathcal{O}(f(B))$. Dále k okolí $\mathcal{O}(B)$ bodu B existuje okolí $\mathcal{O}(A)$ bodu A tak, že pro každé $X \in \mathcal{O}(A) \setminus \{A\}$ platí $g(X) \in \mathcal{O}(B)$. Pro $X \in \mathcal{O}(A) \setminus \{A\}$ je $g(X) \in \mathcal{O}(B)$, a tedy $f(g(X)) \in \mathcal{O}(f(B))$.

Následující věta je podobná větě 2.2.3, ale je v ní uvažována nespojitost funkce g v bodě B.

Věta 2.2.4. (druhá o limitě složeného zobrazení) *Nechť g je definována v ryzím okolí $\mathcal{O}^*(A)$ bodu A, $\lim_{X \to A} g(X) = B$ a $g(X) \neq B$ pro $X \in \mathcal{O}^*(A)$. Je-li f definována v ryzím okolí bodu B a $\lim_{T \to B} f(T) = C$, pak*

$$\lim_{X \to A} f(g(X)) = C.$$

Věta 2.2.5. (o aritmetických operacích s limitami funkcí) *Nechť f, g jsou reálné funkce definované v ryzím okolí bodu A a existují limity $\lim_{X\to A} f(X) = L_1 \in \mathbb{R}$, $\lim_{X\to A} g(X) = L_2 \in \mathbb{R}$. Pak platí*

$$\begin{aligned}
&\lim_{X\to A} |f(X)| = |L_1|,\\
&\lim_{X\to A} \big(c_1 f(X) + c_2 g(X)\big) = c_1 L_1 + c_2 L_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},\\
&\lim_{X\to A} \big(f(X) g(X)\big) = L_1 L_2,\\
&\lim_{X\to A} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad \textit{je-li} \quad L_2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Tato tvrzení platí též pro nevlastní limity, mají-li pravé strany rovností smysl (tj. nevedou k neurčitým výrazům).

Věta 2.2.6. (o limitách dvou funkcí vyhovujících nerovnosti) *Nechť existují limity $\lim_{X\to A} f(X)$, $\lim_{X\to A} g(X)$, a nechť v jistém ryzím okolí $\mathcal{O}^*(A)$ platí $f(X) \le g(X)$. Pak*

$$\lim_{X\to A} f(X) \le \lim_{X\to A} g(X).$$

Věta 2.2.7. (o limitě funkce sevřené dvěma funkcemi)
Jestliže pro každý bod X z ryzího okolí $\mathcal{O}^*(A)$ platí $f(X) \le g(X) \le h(X)$ a zároveň $\lim_{X\to A} f(X) = \lim_{X\to A} h(X) = c$, kde $c \in \mathbb{R}^*$, pak též $\lim_{X\to A} g(X) = c$.

Speciálně, když $|g(X)| \le h(X)$ pro X z ryzího okolí $\mathcal{O}^*(A)$ a $\lim_{X\to A} h(X) = 0$, pak $\lim_{X\to A} g(X) = 0$.

Věta 2.2.8. (o limitě souřadnic zobrazení f) *Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^m$ definované v ryzím okolí bodu $A \in \mathbb{R}^n$ má v daném bodě A limitu, právě když v bodě A mají limitu všechny souřadnice zobrazení, a platí pak*

$$\lim_{X\to A} (f_1(X), \dots, f_m(X)) = (\lim_{X\to A} f_1(X), \dots, \lim_{X\to A} f_m(X)),$$

pokud existuje alespoň jedna strana tohoto vzorce.

Věta 2.2.9. (Heinova o limitě) *Zobrazení $f : P_1 \multimap P_2$ definované v ryzím okolí bodu $X_0 \in P_1$ má v bodě X_0 limitu rovnu L (tj. $\lim_{X\to X_0} f(X) = L$) právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}, X_k \neq X_0, X_k \in P_1$, konvergující k bodu X_0 (tj. $\lim_{k\to\infty} X_k = X_0$), konverguje příslušná posloupnost obrazů k bodu L (tj. $\lim_{k\to\infty} f(X_k) = L$).*

Důkaz: Abychom dokázali tuto větu, musíme dokázat obě implikace.

$\Rightarrow$: Nechť $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost taková, že $X_k \neq X_0, X_k \in P_1, \lim_{k\to\infty} X_k = X_0$. Podle předpokladu k libovolnému okolí $\mathcal{O}(L)$ existuje okolí $\mathcal{O}(X_0)$ takové, že pro $X \in \mathcal{O}(X_0)\backslash\{X_0\}$ platí $f(X) \in \mathcal{O}(L)$. Dále k okolí $\mathcal{O}(X_0)$ existuje k_0 tak, že pro $k \ge k_0$ je $X_k \in \mathcal{O}(X_0)$. Protože $X_k \neq X_0$, je pro $k \ge k_0$ také $f(X_k) \in \mathcal{O}(L)$.

$\Leftarrow$: Nechť platí podmínka a připusťme, že neplatí $\lim_{X\to X_0} f(X) = L$. Pak existuje okolí $\mathcal{O}(L)$ takové, že pro každé $\mathcal{O}(X_0)$ můžeme nalézt $X \in \mathcal{O}(X_0)\setminus\{X_0\}$ tak, že $f(X) \notin \mathcal{O}(L)$. Můžeme tedy vytvořit posloupnost $\{X_k\}$, $X_k \neq X_0$, pro kterou $X_k \to X_0$ a $f(X_k) \notin \mathcal{O}(L)$. Což je spor s tím, že pro takovou posloupnost musí platit $f(X_k) \to L$.

Poznámka 2.2.1. Poslední dvojice limit ve větě 2.2.9 znamená, že v příslušném metrickém prostoru platí

$$\lim_{k\to\infty} \rho(X_k, X_0) = 0 \qquad \text{a} \qquad \lim_{k\to\infty} \sigma(f(X_k), L) = 0.$$

Příklad 2.2.2. Dokažte, že funkce $f(x,y,z) = \frac{x+y-z+1}{x^2+y^2+z^2}$ má v bodě $A = (1,0,1)$ limitu $L = \frac{1}{2}$.

Řešení: Funkce $f(x,y,z)$ je definována v každém bodě prostoru $\mathbb{R}^3$ kromě počátku. Příklad budeme řešit pomocí Heinovy věty 2.2.9.
Nechť $X_k = (x_k, y_k, z_k)$ a nechť posloupnost $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k bodu A. Pak platí

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 1, \quad \lim_{k\to\infty} y_k = 0, \quad \lim_{k\to\infty} z_k = 1,$$

$$\lim_{k\to\infty} f(X_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k + y_k - z_k + 1}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} = \frac{\lim_{k\to\infty} x_k + \lim_{k\to\infty} y_k - \lim_{k\to\infty} z_k + 1}{\lim_{k\to\infty} x_k^2 + \lim_{k\to\infty} y_k^2 + \lim_{k\to\infty} z_k^2} = \\ = \frac{1+0-1+1}{1+0+1} = \frac{1}{2}.$$

Věta 2.2.10. *Je-li funkce f definovaná v ryzím okolí bodu A a $\lim_{X\to A} f(X) = L > 0$, pak existuje ryzí okolí bodu A v němž $f(X) > \frac{L}{2}$.*

Poznámka 2.2.2. $\big($**o postupné (dvojnásobné) limitě funkce $f(x,y)$ ve vlastním bodě (a_1,a_2)**$\big)$ Výpočty limit funkcí více proměnných jsou mnohem obtížnější než u funkcí jedné proměnné, proto je vítána každá vlastnost, která nám pomůže ve výpočtech. Pokud chceme dokázat neexistenci limity, pak nám ulehčí práci *postupné (násobné) limity.*

Avšak musíme důsledně odlišovat *dvojnásobné* limity od limity *dvojné*

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = L.$$

Dvojnásobné limity mají tvar

$$a)\ \lim_{y\to a_2}\big[\lim_{x\to a_1} f(x,y)\big] = L_{12}, \qquad b)\ \lim_{x\to a_1}\big[\lim_{y\to a_2} f(x,y)\big] = L_{21}.$$

Hodnotu postupných limit funkce zjistíme dvojím limitním přechodem. V případě a) vypočítáme nejprve limitu funkce jedné proměnné pro $x \to a_1$, přičemž druhou neznámou budeme uvažovat jako konstantu. Poté určíme zbývající limitu pro $y \to a_2$. Z geometrického hlediska to znamená, že se bod (x, y) blíží k bodu (a_1, a_2) po rovnoběžce s osou x až do bodu (a_1, y), a pak po rovnoběžce s osou y až do bodu (a_1, a_2). Podobně se postupuje i v případě b).

Nyní uvedeme důležitá tvrzení týkající se vztahu mezi dvojnásobnými a dvojnými limitami.

- *Z rovnosti postupných limit L_{12} a L_{21} neplyne existence dvojné limity L dané funkce v bodě A.*
- *Existuje-li limita L (i nevlastní), nemusí existovat ani limita L_{12} ani L_{21}, avšak existuje-li L a existuje-li některá z nich (L_{12} nebo L_{21}), pak se nutně musí obě rovnat.*
- *Existují-li všechny tři limity, pak nutně $L = L_{12} = L_{21}$.*
- *Určovat limitu L funkce v bodě postupnými limitami L_{12}, L_{21} má smysl jen tehdy, je-li předem známa existence L. To je vždy možné, je-li to funkce spojitá v okolí vyšetřovaného bodu.* **Existují-li L_{12}, L_{21}, avšak $L_{12} \neq L_{21}$, pak neexistuje limita** *L (tj. rovnost postupných limit je nutnou podmínkou existence dvojné limity).*

Příklad 2.2.3. Rozhodněte, zda existuje limita. Pokud ano, určete její hodnotu.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2 - 3y^2}{x^2 + 2y^2}$$

Řešení: O existenci limity rozhodneme pomocí postupných limit:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{5x^2 - 3y^2}{x^2 + 2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^2}{x^2} = 5, \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{5x^2 - 3y^2}{x^2 + 2y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-3y^2}{2y^2} = -\frac{3}{2}.$$

Z rozdílných výsledků postupných limit vyplývá, že dvojná limita neexistuje (viz předcházející poznámka 2.2.2).

Věta 2.2.11. *Nechť $B \subseteq A$ a X_0 je hromadný bod množiny B. Existuje-li*

$$\lim_{X \xrightarrow{A} X_0} f(X) = c, \quad \textit{pak je také} \quad \lim_{X \xrightarrow{B} X_0} f(X) = c.$$

Věta 2.2.12. *Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^n$ a nechť X_0 je hromadný bod A i B. Potom následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*

a) existuje limita $\displaystyle\lim_{X \xrightarrow{A\cup B} X_0} f(X) = c,$

b) existují limity $\displaystyle\lim_{X \xrightarrow{A} X_0} f(X) = c$ *a* $\displaystyle\lim_{X \xrightarrow{B} X_0} f(X) = c.$

Pokud si promyslíme obě předchozí věty o limitě na podmnožině, dostaneme následující dvě **kritéria pro neexistenci limity funkce**:

- Nechť $B \subseteq A$ a X_0 je hromadný bod množiny B. Neexistuje-li
$$\lim_{X \xrightarrow{B} X_0} f(X), \quad \text{pak neexistuje ani} \quad \lim_{X \xrightarrow{A} X_0} f(X).$$
- Nechť X_0 je hromadný bod množiny B i C, kde $B \subseteq A, C \subseteq A$. Nechť existují limity
$$\lim_{X \xrightarrow{B} X_0} f(X) = b \quad \text{a} \quad \lim_{X \xrightarrow{C} X_0} f(X) = c \quad \text{a platí} \quad b \neq c.$$
$$\text{Potom limita} \quad \lim_{X \xrightarrow{A} X_0} f(X) \quad \text{neexistuje.}$$

Nechť funkce f je definovaná v ryzím okolí bodu $X_0 = (x_0, y_0)$. Existence vlastní limity funkce $f(x, y)$ v daném bodě X_0 znamená podle definice, že vztah $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ platí pro všechna (x, y) z ryzího okolí bodu X_0 zcela nezávisle na tom, jakým způsobem se bod (x, y) přibližuje k bodu X_0. Bod (x, y) se tedy může přibližovat k bodu X_0 po libovolné křivce $y = \varphi(x)$, procházející bodem X_0 (např. po polopřímkách vycházejících z bodu X_0 nebo po parabolách jdoucích bodem X_0). Přitom funkce $f(x, y)$ nemusí být v bodě X_0 definována. Pokud je limitní přibližování k bodu X_0 vázáno rovnicí $y = \varphi(x)$, pak limitu funkce $f(x, y)$ v tomto bodě vypočteme dosazením $\varphi(x)$ za y. Dále postupujeme jako u limity funkce jedné proměnné pro $x \to x_0$.

Uvažujeme-li systém takovýchto křivek a vypočtená limita L je závislá na výběru křivky, potom limita v bodě X_0 neexistuje. Je-li výsledek limity pro různé křivky $y = \varphi(x)$ totožný, může *limita funkce $f(x, y)$ v bodě X_0 existovat.* Nesmíme zapomenout, že stačí nalézt dvě různé cesty přibližování k bodu X_0 vedoucí k různým hodnotám L, a limita funkce $f(x, y)$ v bodě X_0 neexistuje. Tento výpočet je tedy především využíván pro důkaz neexistence limity funkce.

Neexistenci limity funkce dvou proměnných ve vlastním bodě (x_0, y_0) můžeme zjistit zavedením **polárních souřadnic $\boldsymbol{\rho, \varphi}$** definovaných vztahy
$$x = x_0 + \rho \cos \varphi, \qquad y = y_0 + \rho \sin \varphi,$$
kde $\rho \geq 0$ znamená vzdálenost bodů (x_0, y_0) a (x, y), $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ je úhel, který svírá spojnice těchto bodů s kladným směrem osy x.

Limita funkce neexistuje, pokud je hodnota limity závislá na úhlu φ. Jestliže ale limita nezávisí na parametru φ, *neznamená to*, že limita funkce existuje (tzn. je to pouze nutná podmínka pro existenci limity).

Následující věta udává postačující podmínku pro existenci limity po přechodu k polárním souřadnicím.

Věta 2.2.13. *Je-li $L \in \mathbb{R}$ a existuje-li nezáporná funkce $g(\rho)$ taková, že*

$$\lim_{\rho \to 0^+} g(\rho) = 0 \quad a \quad |f(x_0 + \rho\cos\varphi, y_0 + \rho\sin\varphi) - L| \leq g(\rho)$$

pro každé ρ z nějakého pravého ryzího okolí bodu 0 a každé $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, pak

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L.$$

Příklad 2.2.4. Rozhodněte, zda existuje limita. Pokud ano, určete její hodnotu.

$$\text{a)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

Řešení: Zavedeme substituci $y = kx, k \in \mathbb{R}$ (přibližujeme se k bodu po přímkách s parametrem k) a z výsledku určíme, zda limita *může* existovat nebo neexistuje:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2kx^2}{x^2(1+k^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2k}{1+k^2} = \frac{2k}{1+k^2}.$$

Výsledek je závislý na parametru k (tzn. přibližování závisí na cestě), z toho vyplývá, že daná limita neexistuje.

$$\text{b)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

Řešení: Nejprve zavedeme substituci $y = kx, k \in \mathbb{R}$, jako v minulém případě. Pokud se tedy k počátku blížíme po těchto přímkách, platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{kx^3}{x^4+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{x^2+k^2} = 0.$$

Počátkem ale prochází ještě přímka $x = 0$, kterou jsme neověřili. Snadno se zjistí, že je pro ní limita také rovna 0. I když je limita spočítána pro všechny přímky procházející počátkem, ukazuje nám tento výsledek jen to, že daná limita může existovat. Zda existuje, zjistíme při následující substituci $y = kx^2, k \in \mathbb{R}$ (jdeme po parabolách). Platí:

$$\lim_{x\to 0} \frac{kx^4}{x^4+k^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2} \neq 0 \quad \text{pro} \quad \forall k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Z našeho výsledku je vidět, že limita závisí na zvolené cestě, a proto limita neexistuje.

$$\text{c)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$$

Řešení: Na začátku provedeme transformaci do polárních souřadnic:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = \lim_{\rho\to0^+} [\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)]^{\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi} = \lim_{\rho\to0^+} (\rho^2)^{\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi} =$$
$$= \lim_{\rho\to0^+} e^{2\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi\ln\rho}.$$

V posledním kroku jsme využili následujícího poznatku:

$$f = u^v = e^{\ln f} = e^{v\ln u}, \quad \text{pro každé} \quad f, u > 0.$$

Zbývá vypočítat hodnotu limity v exponentu. Výraz upravíme a použijeme L'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{\rho\to0^+}(2\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi\ln\rho) = \lim_{\rho\to0^+}\frac{2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\ln\rho}{\frac{1}{\rho^4}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{\rho\to0^+}\frac{2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cdot\frac{1}{\rho}}{(-4)\rho^{-5}} =$$
$$= \lim_{\rho\to0^+}\frac{2\rho^5\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{-4\rho} = \lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{-2} = 0.$$

Protože výraz $|\cos^2\varphi\sin^2\varphi| < 1$ a tudíž

$$\left|\frac{-\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{2}\right| \le \frac{\rho^4}{2} \quad \text{a zároveň} \quad \lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^4}{2} = 0,$$

platí podle věty 2.2.13, že dílčí limita je rovna 0. Po dosazení do původní limity dojdeme k výsledku:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = e^0 = 1.$$

Kapitola 3

Metody výpočtů limit funkcí

3.1 Vlastní limity

Při počítání limit funkcí více proměnných si počínáme podobně jako u funkcí jedné proměnné. Nyní si shrneme a ukážeme na příkladech početní postupy, které budeme používat.

- Pokud máme funkci spojitou v limitním bodě, pak lze hodnotu limity získat pouhým dosazením bodu do funkčního předpisu.

Příklad 3.1.1. Vypočtěte:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^3y - xy^3 + 1}{(x-y)^2}.$$

Řešení: Do lomeného výrazu dosadíme bod $(1,2)$:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^3y - xy^3 + 1}{(x-y)^2} = \frac{2 - 2^3 + 1}{(-1)^2} = -5.$$

- U racionálních lomených výrazů někdy pomůže, když dané polynomy v čitateli a jmenovateli rozložíme a zlomek upravíme tak, abychom se zbavili nežádoucích výrazů ve zlomku.

Příklad 3.1.2. Vypočtěte následující limity.

$$\text{a)} \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 - 3y + 3x - xy}$$

Řešení: Danou limitu vypočteme rozložením polynomu v čitateli a vytýkáním ve jmenovateli:

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 - 3y + 3x - xy} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x-y)(x+y)}{x(x-y) + 3(x-y)} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x+y}{x+3} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{b)} \lim_{(x,y)\to(-1,-1)} \frac{(x+y)^2-4}{x+y+2}$$

Řešení: K vypočítání limity je třeba rozložit polynom v čitateli:

$$\lim_{(x,y)\to(-1,-1)} \frac{(x+y)^2-4}{x+y+2} = \lim_{(x,y)\to(-1,-1)} \frac{(x+y-2)(x+y+2)}{x+y+2} = \\ = \lim_{(x,y)\to(-1,-1)} (x+y-2) = -4.$$

- U lomených funkcí, které obsahují součet nebo rozdíl s odmocninami, vhodně rozšíříme.

Příklad 3.1.3. Vypočtěte:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}.$$

Řešení: Platí:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \\ = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

- U některých funkcí si můžeme danou limitu zjednodušit zavedením vhodné substituce (viz následující příklad). Tímto krokem převedeme výpočet na určení limity funkce jedné proměnné.

  Při důkazech o existenci či neexistenci limity funkce používáme substituce

  $$y = kx, \quad \text{když} \quad x \to 0, y \to 0,$$

  $$y = k(x - x_0) + y_0, \quad \text{pokud} \quad x \to x_0, y \to y_0$$

  nebo jiné. Tato metoda výpočtu byla použita při rozhodování o existenci limity (např. u příkladu 2.2.4).

Příklad 3.1.4. Vypočtěte:

$$\text{a)} \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2-2x+2}-1}{\sqrt[3]{x^2+y^2-2x+2}-1}$$

Řešení: Ze zadání je vidět, že k odstranění odmocnin nás přivede substituce $t^6 = x^2+y^2-2x+2$. Zřejmě $x^2+y^2-2x+2 = (x-1)^2+y^2+1$ a $(x-1)^2+y^2+1 \neq 1$ pro (x,y) z ryzího okolí bodu $(1,0)$. Po dosazení limitního bodu zjistíme, že budeme počítat limitu pro $t \to 1$. Při tomto výpočtu je použita věta 2.2.4, která nám umožňuje získat výsledek (nemusíme zde ověřovat existenci limity jako např. při použití polárních souřadnic a věty 2.2.13):

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2-2x+2}-1}{\sqrt[3]{x^2+y^2-2x+2}-1} = \lim_{t\to 1} \frac{t^3-1}{t^2-1} = \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)} = \\ = \lim_{t\to 1} \frac{t^2+t+1}{t+1} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{b)} \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+y(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$$

Řešení: Tento typ příkladu zkusíme vypočítat pomocí substituce $y = kx + 1$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+y(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+(kx+1)(kx+1-1)^2}{x^2+(kx+1-1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+(kx+1)k^2x^2}{x^2+k^2x^2} = \\ = \lim_{x\to 0} \frac{1+(kx+1)k^2}{1+k^2} = \frac{1+k^2}{1+k^2} = 1.$$

V tomto případě nelze použít věty o limitě složené funkce a z výsledku můžeme vyvodit jen to, že daná limita *může* existovat a rovnat se 1. Příklad tedy dopočítáme zavedením polárních souřadnic $x = \rho\cos\varphi, y = 1 + \rho\sin\varphi$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+y(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi(\rho\sin\varphi+1)}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2+\rho^3\sin^3\varphi}{\rho^2} = \\ = \lim_{\rho\to 0^+} (1+\rho\sin^3\varphi) = 1.$$

Dále musíme dokázat podmínku věty 2.2.13, aby daná limita existovala:

$$|f(\rho\cos\varphi, 1+\rho\sin\varphi) - 1| = |\rho\sin^3\varphi| \le 2\rho, \quad \text{protože} \quad |\sin\varphi| \le 1.$$

Přitom $\lim_{\rho\to 0^+} 2\rho = 0$. Daná limita existuje a je rovna 1. Z tohoto příkladu je vidět, že substituce typu $y = kx$ bez vhodné dodatečné podmínky dokazují pouze neexistenci limity (i přestože se nyní výsledek shoduje, viz text na straně 21).

$$\text{c)} \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{e^{[|x|+(y-2)^2]y}-1}{|x|+(y-2)^2}$$

Řešení: Platí:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{e^{[|x|+(y-2)^2]y}-1}{|x|+(y-2)^2} = \lim_{y\to 2} y \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{e^{[|x|+(y-2)^2]y}-1}{[|x|+(y-2)^2]y}.$$

Příklad rozdělíme na dvě části. První limita je po dosazení rovna 2. Druhá limita se vypočítá pomocí substituce $t = [|x| + (y-2)^2]y$ a použitím L'Hospitalova pravidla. Je zřejmé, že

$|x|+(y-2)^2 \neq 0$ v ryzím okolí bodu $(0,2)$. Tato druhá limita je podobná limitě z příkladu a), zde je využita také znalost věty 2.2.4:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{e^{[|x|+(y-2)^2]y}-1}{[|x|+(y-2)^2]y} = \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{e^t}{1} = 1.$$

Pokud oba výsledky sjednotíme, dostaneme hodnotu počítané limity:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{e^{[|x|+(y-2)^2]y}-1}{|x|+(y-2)^2} = 2\cdot 1 = 2.$$

- V jiných případech je výhodné provést transformaci do polárních souřadnic, kde využíváme věty 2.2.13 (viz příklad 2.2.4). U těchto příkladů se snažíme zjednodušovat funkce pomocí goniometrických vzorců. Nejdůležitější jsou tyto vzorce:

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,$$
$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi.$$

Poznámka 3.1.1. Pokud počítáme limitu funkce tří proměnných, můžeme využít transformaci do *sférických souřadnic* (stejně jako transformaci do polárních souřadnic u limity funkce dvou proměnných). Vztahy pro transformaci do sférických souřadnic jsou následující:

$$x = x_0 + \rho\cos\varphi\sin\vartheta, \quad y = y_0 + \rho\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z = z_0 + \rho\cos\vartheta,$$

kde ρ udává vzdálenost bodů (x_0, y_0, z_0) a (x, y, z) (sférický poloměr), φ je úhel, který svírá průmět průvodiče (spojnice bodů) do podstavné roviny xy s kladným směrem osy x (azimutární úhel), ϑ je úhel, který svírá průvodič s kladným směrem osy z (sférický úhel). Tuto transformaci lze využít zejména při důkazu neexistence limity, tj. když nám limita vyjde závislá na φ nebo ϑ.

Nyní uvedeme větu pro existenci limity funkce po zavedení sférických souřadnic, která je obdobná větě 2.2.13.

Věta 3.1.1. *Je-li $L \in \mathbb{R}$ a existuje-li nezáporná funkce $g(\rho)$ taková, že*

$$\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho) = 0 \quad a \quad |f(x_0 + \rho\cos\varphi\sin\vartheta, y_0 + \rho\sin\varphi\sin\vartheta, z_0 + \rho\cos\vartheta) - L| \leq g(\rho)$$

pro každé ρ z nějakého pravého ryzího okolí bodu 0 a každé $\varphi \in \langle 0, 2\pi), \vartheta \in \langle 0, \pi\rangle$, pak

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = L.$$

Příklad 3.1.5. Vypočítejte:

$$\text{a)} \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$$

Řešení: Výpočet provedeme pomocí transformace do sférických souřadnic:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta}{\rho^2(\cos^2\varphi\sin^2\vartheta+\sin^2\varphi\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta)} =$$
$$= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\cos^2\varphi\sin^2\vartheta}{\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta} = \lim_{\rho\to 0^+} \cos^2\varphi\sin^2\vartheta.$$

Výsledný výraz zůstává závislý na úhlech φ, ϑ, a proto daná limita neexistuje.

$$\text{b)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3+5y^3}{x^2+y^2}$$

Řešení: Při výpočtu použijeme transformaci do polárních souřadnic $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3+5y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{2\rho^3\cos^3\varphi+5\rho^3\sin^3\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho(2\cos^3\varphi+5\sin^3\varphi) = 0.$$

Funkce $|2\cos^3\varphi+5\sin^3\varphi| \le 7$ je ohraničená pro $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$. Podle věty 2.2.13 tedy platí, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3+5y^3}{x^2+y^2} = 0.$$

$$\text{c)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Řešení: Příklad vypočítáme pomocí polárních souřadnic $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}{\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} = \lim_{\rho\to 0^+} (\cos^2\varphi-\sin^2\varphi).$$

Výsledek je závislý na parametru φ, a proto daná limita neexistuje.

- Následující typové limity nám mohou v některých příkladech značně zjednodušit výpočet (tvrzení platí s předpokladem $\lim_{X\to X_0} f(X) = 0$ a $f(X) \neq 0$ pro X z vhodného ryzího okolí bodu X_0):

$$\lim_{X\to X_0} \frac{\sin f(X)}{f(X)} = 1,$$

$$\lim_{X \to X_0} \frac{\operatorname{tg} f(X)}{f(X)} = 1,$$
$$\lim_{X \to X_0} \frac{\ln\big(1 + f(X)\big)}{f(X)} = 1,$$
$$\lim_{X \to X_0} f(X) \cdot \ln|f(X)| = 0,$$
$$\lim_{X \to X_0} [1 + k \cdot f(X)]^{\frac{1}{f(X)}} = e^k, k \in \mathbb{R}.$$

Příklad 3.1.6. Vypočítejte:

$$\text{a)} \lim_{(x,y) \to (4,0)} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{(x-4)^2 - y^2}}{x^2 \sqrt{(x-4)^2 - y^2}}$$

Řešení: Budeme chtít využít zmíněných typových limit:

$$\lim_{(x,y) \to (4,0)} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{(x-4)^2 - y^2}}{x^2 \sqrt{(x-4)^2 - y^2}} = \lim_{(x,y) \to (4,0)} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{(x-4)^2 - y^2}}{\sqrt{(x-4)^2 - y^2}} \cdot \lim_{(x,y) \to (4,0)} \frac{1}{x^2}.$$

Nyní rozložíme příklad na dvě části. U prvního vztahu využijeme typovou limitu z předchozího bodu. Protože platí, že

$$\lim_{(x,y) \to (4,0)} \sqrt{(x-4)^2 - y^2} = 0, \quad \text{pak} \lim_{(x,y) \to (4,0)} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{(x-4)^2 - y^2}}{\sqrt{(x-4)^2 - y^2}} = 1.$$

Teď zbývá vypočítat poslední část součinu:

$$\lim_{(x,y) \to (4,0)} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{16}.$$

Z těchto dílčích výpočtů již vyplývá výsledek naší limity:

$$\lim_{(x,y) \to (4,0)} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{(x-4)^2 - y^2}}{x^2 \sqrt{(x-4)^2 - y^2}} = \frac{1}{16}.$$

$$\text{b)} \lim_{(x,y) \to (5,5)} (1 - y + x)^{\frac{4}{x-y}}$$

Řešení: Příklad vyřešíme na základě poznatků uvedených v minulém bodě:

$$\lim_{(x,y) \to (5,5)} (1 + x - y)^{\frac{4}{x-y}} = \lim_{(x,y) \to (5,5)} \left[(1 + x - y)^{\frac{1}{x-y}}\right]^4.$$

Protože platí

$$\lim_{(x,y) \to (5,5)} (x - y) = 0, \quad \text{pak} \quad \lim_{(x,y) \to (5,5)} (1 + x - y)^{\frac{1}{x-y}} = e.$$

Na základě uvedených skutečností je zřejmé, že

$$\lim_{(x,y)\to(5,5)} (1-y+x)^{\frac{4}{x-y}} = e^4.$$

- Při výpočtech se snažíme funkce různě algebraicky upravovat, abychom např. dostali součin dvou limit, kde jedna je limitou funkce jedné proměnné a druhá zjednodušená limita funkce více proměnných. Součin dostaneme následující úpravou:

$$f(X)\cdot g(X) = \frac{f(X)}{\frac{1}{g(X)}}.$$

U limity funkce jedné proměnné si můžeme vypomoci L'Hospitalovým pravidlem nebo jinými úpravami, které u funkcí více proměnných použít nemůžeme.

Příklad 3.1.7. Vypočítejte:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(1+\frac{2}{|x|+|y|+|z|}\right)^{|x|+|y|+|z|}.$$

Řešení: Zavedeme substituci $t=|x|+|y|+|z|$ a použijeme větu 2.2.4. Zřejmě je $|x|+|y|+|z|\neq 0$ v ryzím okolí bodu $(0,0,0)$:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(1+\frac{2}{|x|+|y|+|z|}\right)^{|x|+|y|+|z|} = \lim_{t\to 0}\left(1+\frac{2}{t}\right)^t = \left|1^0\right| = \lim_{t\to 0} e^{t\ln\left(1+\frac{2}{t}\right)}.$$

Zde musíme vypočítat limitu výrazu v exponentu, a poté dosadíme výsledek zpět. Ve výpočtu této dílčí limity použijeme L'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{t\to 0}\left[t\ln\left(1+\frac{2}{t}\right)\right] = |0\cdot\infty| = \lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{t}\right)}{\frac{1}{t}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{2}{1+\frac{2}{t}} = \lim_{t\to 0}\frac{2t}{t+2} = 0.$$

Pokud dosadíme tento dílčí výsledek do předešlé limity, dostáváme:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(1+\frac{2}{|x|+|y|+|z|}\right)^{|x|+|y|+|z|} = e^0 = 1.$$

- U úloh, u kterých potřebujeme ověřit neexistenci limity funkce, využíváme znalostí postupných limit z poznámky 2.2.2. Dále můžeme použít i substituce typu: $y=k(x-x_0)+y_0$ nebo $y=kx^2$, o kterých již byla řeč.

Příklad 3.1.8. Přesvědčte se o existenci nebo neexistenci následující limity:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{3x+y}.$$

Řešení: V této úloze využijeme znalosti postupných limit:

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x-2y}{3x+y}\right]=\lim_{y\to 0}\frac{-2y}{y}=-2,$$
$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x-2y}{3x+y}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}.$$

Z nerovnosti výsledků postupných limit vyplývá neexistence dané limity.

3.2 Nevlastní limity a limity v nevlastních bodech

- V první části tohoto paragrafu se budeme zabývat **limitami v nevlastních bodech**. Definice takové limity byla již uvedena v dřívějším textu a nyní se zamyslíme nad jejím výpočtem. U limit v nevlastním bodě nemůžeme používat např. transformaci do polárních souřadnic, která nám u limit ve vlastním bodě často usnadnila výpočet. Vhodnou substitucí ale můžeme limitu v nevlastním bodě převést na limitu ve vlastním bodě, u které můžeme větu týkající se polárních souřadnic 2.2.13 použít.

Poznámka 3.2.1. Nejprve se dohodneme na označení, které budeme používat. Limity typu

$$\lim_{(u,v)\overset{M}{\to}(0,0)} f\left(\frac{1}{u},\frac{1}{v}\right), \quad \text{kde} \quad M\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u>0, v<0\},$$

budeme zapisovat takto:

$$\lim_{(u,v)\overset{u>0,v<0}{\to}(0,0)} f\left(\frac{1}{u},\frac{1}{v}\right).$$

Tento tvar zápisu budeme využívat především u limit v nevlastním bodě. Při počítání příkladů, budeme psát symboly umístěné nad šipkou jen u první limity a dále budeme používat standardní zápis s tím, že uvažujeme stále uvedenou podmínku na začátku.

Nyní ukážeme na vybraných typech limit funkcí dvou proměnných, jak můžeme obejít výpočet limity v nevlastním bodě:

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y)=\lim_{(u,v)\overset{u>0,v>0}{\to}(0,0)} f\left(\frac{1}{u},\frac{1}{v}\right),$$
$$\lim_{(x,y)\to(a,+\infty)} f(x,y)=\lim_{(x,v)\overset{v\geq 0}{\to}(a,0)} f\left(x,\frac{1}{v}\right),$$

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,-\infty)} f(x,y) = \lim_{(u,v)\overset{u>0,v<0}{\to}(0,0)} f\left(\frac{1}{u},\frac{1}{v}\right),$$

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,b)} f(x,y) = \lim_{(u,y)\overset{u\neq 0}{\to}(0,b)} f\left(\frac{1}{u},y\right),$$

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f(x,y) = \lim_{(u,v)\overset{u\neq 0,v\neq 0}{\to}(0,0)} f\left(\frac{1}{u},\frac{1}{v}\right),$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,-\infty)} f(x,y) = \lim_{(x,v)\overset{v\leq 0}{\to}(a,0)} f\left(a,\frac{1}{v}\right),$$

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y) = \lim_{(u,v)\to(0,0)} f\left(\frac{u}{u^2+v^2},\frac{v}{u^2+v^2}\right),$$

$$\lim_{x^2+y^2\overset{x\geq 0}{\to}+\infty} f(x,y) = \lim_{(u,v)\overset{u\geq 0}{\to}(0,0)} f\left(\frac{u}{u^2+v^2},\frac{v}{u^2+v^2}\right).$$

Poznámka 3.2.2. Poslední dva vztahy si můžeme ověřit tak, že uvážíme rovnost $x^2+y^2=\frac{1}{u^2+v^2}$.

Z uvedených vztahů pro výpočet limity v nevlastním bodě dokážeme:

$$\lim_{(x,y)\to(a,+\infty)} f(x,y) = \lim_{(x,v)\overset{v\geq 0}{\to}(a,0)} f\left(x,\frac{1}{v}\right) = L.$$

Důkaz: $\Rightarrow$: Mějme $\lim_{(x,y)\to(a,+\infty)} f(x,y) = L$ a nechť $\mathcal{O}(L)$ je libovolné okolí bodu L. Z definice limity existuje $\delta_1>0, \delta_2\in\mathbb{R}$ tak, že pro $0<|x-a|<\delta_1, y>\frac{1}{\delta_2}$ je $f(x,y)\in\mathcal{O}(L)$. Z toho $y=\frac{1}{v}>\frac{1}{\delta_2}$ a tedy pro $v<\delta_2, v>0$ a $0<|x-a|<\delta_1$ je $f(x,\frac{1}{v})\in\mathcal{O}(L)$. Celkově platí $\lim_{(x,v)\overset{v\geq 0}{\to}(a,0)} f\left(x,\frac{1}{v}\right)=L$.
$\Leftarrow$: Nechť je $\lim_{(x,v)\overset{v\geq 0}{\to}(a,0)} f\left(x,\frac{1}{v}\right)=L$ a $\mathcal{O}(L)$ je libovolné okolí bodu L. Existuje tedy $\delta_1>0, \delta_2>0$ tak, že pro $0<|x-a|<\delta_1, v<\delta_2$ je $f(x,\frac{1}{v})\in\mathcal{O}(L)$, takže pro $\frac{1}{v}=y>\frac{1}{\delta_2}$ a $0<|x-a|<\delta_1$ je $f(x,y)\in\mathcal{O}(L)$. Tedy $\lim_{(x,y)\to(a,+\infty)} f(x,y)=L$.

U takto upravených limit můžeme používat početní postupy, které byly uvedeny v předchozím textu o vlastních limitách (jak je vidět v následujícím příkladu).

Příklad 3.2.1. Vypočítejte následující limity v nevlastním bodě:

$$\text{a)} \lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$$

Řešení: Protože musíme vypočítat limitu v nevlastním bodě (∞, ∞), převedeme tento bod na vlastní pomocí substituce $x = \frac{1}{u}, y = \frac{1}{v}$, kde $u \neq 0, v \neq 0$:

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (1 + x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim_{(u,v)\overset{u\neq 0, v\neq 0}{\to}(0,0)} \left(1 + \frac{1}{u^2v^2}\right)^{\frac{u^2v^2}{v^2+u^2}}.$$

Nyní zavedeme polární souřadnice: $u = \rho\cos\varphi, v = \rho\sin\varphi$, kde $\varphi \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{(u,v)\overset{u\neq 0, v\neq 0}{\to}(0,0)} \left(1 + \frac{1}{u^2v^2}\right)^{\frac{u^2v^2}{v^2+u^2}} = \lim_{\rho\overset{\varphi\neq k\frac{\pi}{2}}{\to}0+} \left(1 + \frac{1}{\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}\right)^{\frac{\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}} = \left|\infty^0\right| =$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} e^{\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cdot\ln\left(1+\frac{1}{\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}\right)}.$$

Nyní stačí spočítat limitu exponentu a dosadit do výrazu. Při výpočtu použijeme L'Hosptitalovo pravidlo:

$$\lim_{\rho\to 0^+} \rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cdot\ln\left(1 + \frac{1}{\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}\right) = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}\right)}{\frac{1}{\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{2\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{1 + \rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi} = 0.$$

Aby výsledek platil, musíme ověřit podmínku věty 2.2.13:

$$\left|\frac{2\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi + 1}\right| \leq 2\rho^2, \quad \text{přičemž} \lim_{\rho\to 0^+} 2\rho^2 = 0.$$

Dílčí výsledek už můžeme dosadit a dostaneme:

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (1 + x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = e^0 = 1.$$

$$\text{b)} \lim_{(x,y)\to(+\infty,-\infty)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$$

Řešení: Chceme vypočítat limitu v nevlastním bodě, proto použijeme substituci na převedení nevlastního bodu na vlastní: $x = \frac{1}{u}, y = \frac{1}{v}, u > 0, v < 0$:

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,-\infty)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = \lim_{(u,v)\overset{u>0, v<0}{\to}(0,0)} \frac{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}}{\frac{1}{u^4} + \frac{1}{v^4}} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{u^2v^2(v^2+u^2)}{v^4+u^4}.$$

V dalším kroku zavedeme polární souřadnice $u = \rho\cos\varphi, v = \rho\sin\varphi$:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{u^2v^2(v^2+u^2)}{v^4+u^4} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^6\cos^2\varphi\sin^2\varphi(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}{\rho^4(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2\sin^2(2\varphi)}{4(\sin^4\varphi+\cos^4\varphi)} = 0.$$

Podle věty 2.2.13 je limitní proces v pořádku, protože

$$\left|\frac{\rho^2 \sin^2(2\varphi)}{4(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi)}\right| \leq \rho^2 \quad \text{a zároveň} \quad \lim_{\rho\to 0^+} \rho^2 = 0.$$

- Pokud chceme počítat **nevlastní limity** nacházíme podobné problémy, jako u limit v nevlastních bodech. Protože lomený výraz $\left|\frac{1}{\pm\infty}\right| = 0$, můžeme danou limitu upravit tak, abychom dostali limitu vlastní. Postup upravování je zřejmý z následující věty.

Věta 3.2.1. *Existuje-li okolí $\mathcal{O}(A)$ bodu $A \in \mathbb{R}^n$ takové, že pro všechny body $X \in \mathcal{O}(A), X \neq A$ je $f(X) > 0$, resp. $f(X) < 0$, pak*

$$\lim_{X\to A} f(X) = +\infty, \quad \textit{resp.} -\infty, \quad \textit{právě když} \quad \lim_{X\to A} \frac{1}{f(X)} = 0.$$

Limita převrácené hodnoty funkce je tedy vlastní a můžeme počítat podle již známých vět (např. věta 2.2.13). Na konci výpočtu se ale musíme vrátit zpět k nevlastní limitě a dokázat, zda funkční hodnoty $f(X)$ jsou v okolí limitního bodu kladné nebo záporné. Na základě tohoto rozboru získáme výsledek $+\infty$ nebo $-\infty$.

Poznámka 3.2.3. K tomu, abychom vyšetřili existenci nevlastní limity funkce po zavedení polárních (resp. sférických) souřadnic, musíme k větám 2.2.13 a 3.1.1 přidat následující dodatek:

Jestliže existuje nezáporná funkce $g(\rho)$ taková, že

$$\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho) = +\infty \quad a \quad f(x_0 + \rho\cos\varphi, y_0 + \rho\sin\varphi) \geq g(\rho) \quad (\textit{resp.} \leq -g(\rho))$$

pro každé ρ z nějakého pravého ryzího okolí bodu 0 a každé $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, pak

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty \quad (\textit{resp.} -\infty).$$

Obdobná věta platí i pro sférické souřadnice.

Příklad 3.2.2. Vypočítejte tyto nevlastní limity:

$$\text{a)} \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

Řešení: Vypočítáme limitu převrácené hodnoty funkce. Použijeme transformaci do polárních souřadnic $x = 1 + \rho\cos\varphi, y = 1 + \rho\sin\varphi$:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \left[(x-1)^2 + (y-1)^2\right] = \lim_{\rho\to 0^+} \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \lim_{\rho\to 0^+} \rho^2 = 0.$$

Dostatečná podmínka pro existenci limity z věty 2.2.13 je zřejmě splněna a v ryzím okolí bodu $(1,1)$ je funkce kladná, platí celkem:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{(x-1)^2+(y-1)^2} = +\infty.$$

$$\text{b)} \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x+yz-xy+1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}-1}$$

Řešení: Protože ze zadání příkladu očekáváme, že daná limita je nevlastní, vypočítáme limitu převrácené hodnoty funkce. U této limity stačí dosadit limitní bod:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}-1}{x+yz-xy+1} = \left|\frac{0}{1}\right| = 0.$$

Protože lomený výraz uvnitř limity je v ryzím okolí bodu $(0,0,0)$ kladný, je podle věty 3.2.1 zadaná limita rovna $+\infty$.

Kapitola 4

Řešené příklady

Vypočítejte následující příklady podle postupů uvedených v předešlé části textu:

1.
$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$$

Řešení: Tento typ příkladu vyřešíme pomocí rozkladu polynomů v čitateli a jmenovateli:

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x^2+y^2)(x-y)(x+y)} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x^2+xy+y^2)}{(x^2+y^2)(x+y)} = \frac{3}{8}.$$

2.
$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Řešení: Uvedená funkce je spojitá v bodě $(1,0)$, proto stačí limitní bod dosadit do lomeného výrazu:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ln 2.$$

3.
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$$

Řešení: Lomený výraz usměrníme a po zkrácení výrazů dosadíme limitní bod do vzniklé funkce:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2+4}+2}{\sqrt{x^2+y^2+4}+2} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 3(\sqrt{x^2+y^2+4}+2) = 12.$$

4.
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x-y+1}{x^2+2xy+2y^2}$$

Řešení: Polární transformace $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x-y+1}{x^2+2xy+2y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{2\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi+1}{\rho^2(\cos^2\varphi+2\cos\varphi\sin\varphi+2\sin^2\varphi)} = +\infty.$$

Protože je výsledkem $+\infty$, vypočítáme limitu převrácené hodnoty (zde postačí do limity dosadit limitní bod):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2xy+2y^2}{2x-y+1} = \left|\frac{0}{1}\right| = 0.$$

Funkce uvnitř limity je v okolí bodu $(0,0)$ kladná, proto podle věty 3.2.1 platí:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x-y+1}{x^2+2xy+2y^2} = +\infty.$$

5.
$$\lim_{x^2+y^2 \overset{x>0,y>0}{\to} +\infty} \frac{2x-y}{x^2+xy+y^2}$$

Řešení: Pro tento typ limity v nevlastním bodě známe substituci: $x=\frac{u}{u^2+v^2}$, $y=\frac{v}{u^2+v^2}$, $u>0, v>0$:

$$\lim_{x^2+y^2 \overset{x>0,y>0}{\to} +\infty} \frac{2x-y}{x^2+xy+y^2} = \lim_{(u,v) \overset{u>0,v>0}{\to} (0,0)} \frac{\frac{2u-v}{u^2+v^2}}{\frac{u^2+uv+v^2}{(u^2+v^2)^2}} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{(2u-v)(u^2+v^2)}{u^2+uv+v^2}.$$

Nyní aplikujeme polární souřadnice $u=\rho\cos\varphi, v=\rho\sin\varphi, \varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{(2u-v)(u^2+v^2)}{u^2+uv+v^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho(2\cos\varphi-\sin\varphi)}{1+\cos\varphi\sin\varphi} = 0.$$

Výsledek platí, protože

$$\left|\frac{\rho(2\cos\varphi-\sin\varphi)}{1+\cos\varphi\sin\varphi}\right| \le 2\rho \quad \text{a zároveň} \quad \lim_{\rho\to 0^+} 2\rho = 0.$$

6.
$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{y-3}{x+y-5}$$

Řešení: V tomto případě položíme $y=k(x-2)+3$ pro $x\to 2$:

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{y-3}{x+y-5} = \lim_{x\to 2} \frac{k(x-2)}{x+k(x-2)-2} = \lim_{x\to 2} \frac{k}{k+1} = \frac{k}{k+1}.$$

Limita nám vyšla závislá na parametru k, proto neexistuje (limitní přibližování je závislé na vybrané cestě).

7.
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$$

Řešení: Substituce $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^6\cos^3\varphi\sin^3\varphi}{\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} = \lim_{\rho\to0^+} \rho^4\cos^3\varphi\sin^3\varphi = 0.$$

Protože platí
$$\left|\rho^4\cos^3\varphi\sin^3\varphi\right| \le \rho^4 \quad \text{a zároveň} \quad \lim_{\rho\to0^+}\rho^4 = 0,$$
tak podle věty 2.2.13 je výsledkem:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} = 0.$$

8. Pro $a\in\mathbb{R}$:
$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,a)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$$

Řešení: Platí:
$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,a)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = \lim_{(x,y)\to(+\infty,a)} \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{x}{x+y}} = e^{\lim_{(x,y)\to(+\infty,a)}\left[\frac{x}{x+y}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]}.$$

V posledním kroku jsme limitu přesunuli do exponentu a použili následující vztah:
$$f = u^v = e^{\ln f} = e^{v\ln u}, \quad \text{pro každé} \quad f,u>0.$$

Zde limitu součinu rozložíme na součin dvou limit a spočítáme je odděleně. V prvním případě použijeme substituci $x=\frac{1}{u}, u>0$:

$$1)\ \lim_{(x,y)\to(+\infty,a)} \frac{x}{x+y} = \lim_{(u,y)\overset{u>0}{\to}(0,a)} \frac{\frac{1}{u}}{\frac{1}{u}+y} = \lim_{(u,y)\to(0,a)} \frac{1}{1+uy} = 1.$$

Druhou limitu funkce jedné proměnné vypočítáme po algebraické úpravě L'Hospitalovým pravidlem:
$$2)\ \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left|1^{+\infty}\right| = \ln\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

Nyní stačí vypočítat limitu výrazu v exponentu a dosadit zpět:
$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = |0\cdot+\infty| = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}(-x^{-2})}{(-x^{-2})} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1.$$

Po zpětném dosazení se dostaneme k výsledku druhé limitu v součinu:

$$\ln \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \ln e^1.$$

Celkový výsledek je

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,a)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = e^{1\cdot\ln e} = e.$$

9.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

Řešení: Provedeme úpravu lomeného výrazu:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

Nyní vypočítáme dílčí limity. Protože očekáváme, že $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}$ je nevlastní, spočítáme limitu převrácené hodnoty funkce (věta 3.2.1):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0.$$

Protože funkční hodnoty jsou v okolí bodu $(0,0)$ kladné, platí:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = +\infty \quad \text{a také} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{(x^2+y^2)^2} = +\infty.$$

Pokud využijeme platnosti

$$\lim_{X\to X_0} \frac{1-\cos f(X)}{f(X)} = 1, \qquad \text{pokud } \lim_{X\to X_0} f(X) = 0,$$

pak nám výsledná limita vyjde:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3} = +\infty.$$

10.

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,0)} \frac{\sin\left[(x-1)^2+y^2+z^2\right]^2}{(x-1)^2+y^2+z^2}$$

Řešení: Abychom se zbavili neurčitého výrazu v limitě funkce tří proměnných, využijeme následujícího vztahu (viz teorie výpočtů limit):

$$\lim_{X \to X_0} \frac{\sin f(X)}{f(X)} = 1, \qquad \text{pokud} \lim_{X \to X_0} f(X) = 0.$$

Protože $[(x-1)^2 + y^2 + z^2]^2 \neq 0$ v ryzím okolí bodu $(1,0,0)$, platí:

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,0)} \frac{\sin\left[(x-1)^2 + y^2 + z^2\right]^2}{(x-1)^2 + y^2 + z^2} =$$
$$= \lim_{(x,y,z)\to(1,0,0)} \left[(x-1)^2 + y^2 + z^2\right] \cdot \frac{\sin\left[(x-1)^2 + y^2 + z^2\right]^2}{\left[(x-1)^2 + y^2 + z^2\right]^2} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Z platnosti $\lim_{(x,y,z)\to(1,0,0)} \left[(x-1)^2 + y^2 + z^2\right]^2 = 0$ platí námi vypočítaný výsledek.

11.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(3 - \sqrt{9 - |x| - |y|})\sin(3x^2 + 3y^2)}{2(|x| + |y|)(x^2 + y^2)}$$

Řešení: Při výpočtu využijeme toho, že $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(3x^2+3y^2)}{3x^2+3y^2} = 1$ (viz minulý příklad):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(3 - \sqrt{9 - |x| - |y|})\sin(3x^2 + 3y^2)}{2(|x| + |y|)(x^2 + y^2)} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3(3 - \sqrt{9 - |x| - |y|})}{2(|x| + |y|)} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(3x^2 + 3y^2)}{3x^2 + 3y^2}.$$

Nyní vypočítáme první limitu. Zavedeme substituci $t = |x| + |y|$ pro $t \to 0$ (při substituci využíváme znalosti věty 2.2.4) a uplatníme L'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{t\to 0} \frac{3(3 - \sqrt{9 - t})}{2t} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{t \to 0} \frac{3}{4\sqrt{9-t}} = \frac{1}{4}.$$

Platí tedy:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(3 - \sqrt{9 - |x| - |y|})\sin(3x^2 + 3y^2)}{2(|x| + |y|)(x^2 + y^2)} = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

12.

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{x^3 - y^2}{(x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13)^2}$$

Řešení: Substituce: $x = 2 + \rho\cos\varphi, y = 3 + \rho\sin\varphi$:

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{x^3 - y^2}{(x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13)^2} =$$
$$= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{(2+\rho\cos\varphi)^3 - (3+\rho\sin\varphi)^2}{[(2+\rho\cos\varphi)(\rho\cos\varphi - 2) + (3+\rho\sin\varphi)(\rho\sin\varphi - 3) + 13]^2} =$$
$$= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{(2+\rho\cos\varphi)^3 - (3+\rho\sin\varphi)^2}{\rho^4} = \left|\frac{-1}{0^+}\right| = -\infty.$$

Vzhledem k tomu, že pracujeme s nevlastní limitou, musíme vypočítat limitu převrácené hodnoty funkce (stačí dosadit limitní bod):

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{(x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13)^2}{x^3 - y^2} = \left|\frac{0}{-1}\right| = 0.$$

Protože je funkce v okolí bodu $(2,3)$ záporná, platí podle věty 3.2.1:

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{x^3 - y^2}{(x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13)^2} = -\infty.$$

13.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{2x^2y^4 + 3(x - y^2)^2}$$

Řešení: Zde se budeme snažit dokázat neexistenci limity funkce. Vybereme dvě různé cesty limitního přibližování (dvě podmnožiny bodů) a dojdeme k různým výsledkům. Nejdříve budeme počítat postupnou limitu:

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{x^2y^4}{2x^2y^4 + 3(x - y^2)^2}\right] = 0.$$

Z tohoto výsledků můžeme jen usoudit, že pokud existuje limita, musí být rovna 0. Po druhé uplatníme substituci $x = y^2$, tedy uvažujeme množinu bodů $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}_2 : x > 0, x = y^2\}$:

$$\lim_{(x,y)\overset{A}{\to}(0,0)} \frac{x^2y^4}{2x^2y^4 + 3(x - y^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4 + 3(x - x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Protože nám druhý výsledek vyšel odlišně, limita dané funkce neexistuje.

14.

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$$

Řešení: V tomto případě zavedeme substituci: $x = \frac{1}{u}, y = \frac{1}{v}$, kde $u \neq 0, v \neq 0$:

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2} = \lim_{(u,v)\overset{u\neq 0, v\neq 0}{\longrightarrow}(0,0)} \frac{uv^2 + u^2v}{u^2 - uv + v^2}.$$

K tomuto výpočtu potřebujeme polární transformaci $u = \rho\cos\varphi, v = \rho\sin\varphi$, kde $\varphi \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{(u,v)\overset{u\neq,v\neq 0}{\to}(0,0)} \frac{uv^2+u^2v}{u^2-uv+v^2} = \lim_{\rho\overset{\varphi\neq k\frac{\pi}{2}}{\to}0^+} \frac{\rho^3(\cos\varphi\sin^2\varphi+\sin\varphi\cos^2\varphi)}{\rho^2(\cos^2\varphi-\cos\varphi\sin\varphi+\sin^2\varphi)} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho\cos\varphi\sin\varphi(\cos\varphi+\sin\varphi)}{1-\frac{1}{2}\sin 2\varphi} = 0.$$

Přitom

$$\left|\frac{\rho\cos\varphi\sin\varphi(\cos\varphi+\sin\varphi)}{1-\frac{1}{2}\sin 2\varphi}\right| \leq 4\rho \quad \text{a} \quad \lim_{\rho\to 0^+} 4\rho = 0.$$

Protože jsme ověřili dostatečnou podmínku pro existenci limity, platí náš výsledek:

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0.$$

Seznam označení

$\mathbb{Z}$	množina všech celých čísel
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathbb{R}^*$	rozšířená množina všech reálných čísel o nevlastní body $+\infty$ a $-\infty$
${\mathbb{R}^*}^n$	množina uspořádaných n-tic reálných čísel rozšířených o $+\infty$ a $-\infty$
$\mathbb{R}^n$	množina uspořádaných n-tic reálných čísel
${}^*\mathbb{R}_n$	rozšířená množina uspořádaných n-tic reálných čísel o nevlastní bod ∞
(P,ρ)	metrický prostor na množině P s metrikou ρ
$\rho(X,Y)$	metrika na množině, vzdálenost bodů X a Y
ρ_1	součtová metrika
ρ_2	euklidovská metrika
ρ_∞	maximální metrika
ρ^*	redukovaná metrika
${}^*\rho_n$	metrika na množině ${}^*\mathbb{R}_n$
ρ_n^*	metrika na množině ${\mathbb{R}^*}^n$, $\rho_n^* = \max\{\rho^*(x_1,y_1),\rho^*(x_2,y_2),\dots,\rho^*(x_n,y_n)\}$
$\mathbb{E}^n$	metrický prostor $(\mathbb{R}^n,\rho_\infty)$
$\mathbb{E}^*$	metrický prostor $(\mathbb{R}^*,\rho^*)$
${\mathbb{E}^*}^n$	metrický prostor $\big({\mathbb{R}^*}^n,\rho_n^* = \max\{\rho^*(x_1,y_1),\rho^*(x_2,y_2),\dots,\rho^*(x_n,y_n)\}\big)$
${}^*\mathbb{E}_n$	metrický prostor $({}^*\mathbb{R}_n,{}^*\rho_n)$
$\mathcal{O}(X_0)$	okolí bodu X_0
$\mathcal{O}^*(X_0)$	$=\mathcal{O}(X_0)\setminus\{X_0\}$, ryzí okolí bodu X_0
$K(X_0,r)$	otevřená koule se středem X_0 a poloměrem r
$K[X_0,r]$	uzavřená koule se středem X_0 a poloměrem r
M'	derivace množiny M
$\to$	zobrazení množiny do množiny, nebo konvergence
$\xrightarrow{\rho}$	konvergence v metrickém prostoru s metrikou ρ
$\multimap\!\!\to$	zobrazení z množiny do množiny
$\subseteq$	podmnožina nebo rovnost
$\lim\limits_{X\to X_0} f(X)$	limita funkce f
$\lim\limits_{X\overset{M}{\to}X_0} f(X)$	limita funkce f vzhledem k množině M
$\mathcal{D}(f)$	definiční obor funkce f
$f\circ g$	složená funkce, f po g
$\{X_k\}_{k=1}^\infty$	posloupnost

Závěr

V práci je předložen souhrn teorie týkající se limit funkcí více proměnných a uvedené teoretické poznatky jsou názorně ukázány na příslušných příkladech. Na začátku bakalářské práce se zabývám metrickými prostory a uvádím konstrukci rozšířeného metrického prostoru o nevlastní body, který je důležitý pro definování limity v nevlastním bodě. Dále zmiňuji věty o limitách, které nám usnadňují výpočty limit funkcí více proměnných. Za nejzajímavější část považuji metody výpočtů limit funkcí více proměnných, kde je vedle výpočtů vlastních limit uveden i postup pro výpočet limit nevlastních a limit v nevlastním bodě. Práce tedy naplinila zadání, o kterém jsem se zmínil v úvodu.

Literatura

[1] Došlá, Zuzana - Došlý, Ondřej. *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* 2.vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1999. 143 s. r99. ISBN 80-210-2052-0.

[2] Novák, Vítězslav. *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* 1. vyd. Brno: Rektorát UJEP, 1983. 159 s. r83U

[3] Jarník, Vojtěch. *Diferenciální počet (I).* 6. vyd. Praha: Academia, 1974. 391 s. r80U.

[4] Jarník, Vojtěch. *Diferenciální počet (II).* 3. dopl. vyd. Praha: Academia, 1976. 669 s. r80U.

[5] Děmidovič, Boris Pavlovič. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy.* 1. vyd. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003. 460 s. ISBN 80-7200-587-1.

[6] Fialka, Miloslav. *Diferenciální počet funkcí více proměnných s aplikacemi.* 1. vyd. Zlín: Univerzita Tomáše Bati, 2004. 145 s. ISBN 80-7318-223-8.

[7] Kopáček, Jiří. *Matematika pro fyziky, díl 2.* 3. vyd. Praha: SPN, 1989. 278 s.

[8] Karásek, Jiří. *Matematika II.* 1. vyd. Brno: PC-DIR, 1995. 242 s. ISBN: 80-214-0591-0.

[9] Hájek, Jiří. *Cvičení z matematické analýzy, diferenciální počet funkcí více proměnných.* 2. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2000. 112 s. ISBN: 80-210-2453-4.

[10] Jirásek, F. - Čipera, S. - Vacek, M. *Sbírka řešených příkladů z matematiky II.* 1. vyd. Praha: SNTL, 1989. 565 s.