§ 4. Řady funkcí

1. **Obor konvergence.** Množinu X těch hodnot x, pro které je *řada funkcí*

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \qquad (1)$$

konvergentní, nazveme *oborem konvergence* této řady a funkci

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} u_i(x) \quad (x\in X)$$

jejím *součtem*.

2. **Stejnoměrná konvergence.** Posloupnost funkcí

$$f_1(x),\, f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

se nazývá *stejnoměrně konvergentní* na množině X, jestliže:
1) existuje limitní funkce

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x\in X);$$

2) ke každému $\varepsilon>0$ existuje číslo $N=N(\varepsilon)$ takové, že

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

pro každé $n>N$ a $x\in X$. V tomto případě budeme zapisovat $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.
Řada funkcí (1) se nazývá *stejnoměrně konvergentní* na množině X, jestliže je na této množině stejnoměrně konvergentní posloupnost jejích částečných součtů

$$S_n(x)=\sum_{i=1}^{n} u_i(x) \quad (n=1,2,\ldots).$$

3. **Bolzanovo-Cauchyovo kritérium stejnoměrné konvergence.** Řada (1) je na množině X stejnoměrně konvergentní právě tehdy, když ke každému $\varepsilon>0$ existuje číslo $N=N(\varepsilon)$ takové, že pro všechna $n>N$ a $p>0$ platí nerovnost

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} u_i(x)\right|<\varepsilon$$

pro všechna $x\in X$.

4. **Weierstrassovo kritérium.** Řada (1) je absolutně a stejnoměrně konvergentní na množině X, existuje-li konvergentní číselná řada

$$c_1+c_2+\ldots+c_n+\ldots \qquad (2)$$

taková, že $|u_n(x)|\le c_n$ pro každé $x\in X$ $(n=1,2,\ldots)$.

5. **Abelovo kritérium.** Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) \qquad (3)$$

je stejnoměrně konvergentní na množině X, jestliže platí: 1) řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ je stejnoměrně konvergentní na množině X; 2) funkce $b_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ jsou všechny stejně omezené a pro každé x jejich hodnoty tvoří monotónní posloupnost.

6. **Dirichletovo kritérium.** Řada (3) je stejnoměrně konvergentní na množině X, jestliže platí: 1) částečné součty $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n(x)$ jsou všechny stejně omezené; 2) posloupnost $b_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ je monotónní pro každé x a stejnoměrně konverguje na X k nule pro $n\to\infty$.

7. **Vlastnosti řad funkcí.**
a) Součet stejnoměrně konvergentní řady spojitých funkcí je spojitá funkce.
b) Je-li řada (1) stejnoměrně konvergentní na každém intervalu $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ a existují-li konečné limity

$$\lim_{x\to a} u_n(x)=A_n \quad (n=1,2,\ldots),$$

pak 1) je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ konvergentní a 2) platí rovnost

$$\lim_{x\to a}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\lim_{x\to a} u_n(x)\right\}.$$

c) Jsou-li členy konvergentní řady (1) spojitě diferencovatelné pro $a<x<b$ a je-li řada derivací $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ stejnoměrně konvergentní na intervalu (a,b), pak

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \text{ pro } x\in(a,b).$$

d) Jsou-li členy řady (1) spojité a tato řada stejnoměrně konverguje na omezeném uzavřeném intervalu $[a,b]$, pak

$$\int_a^b\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx. \qquad (4)$$

Obecněji rovnost (4) platí, je-li $\int_a^b R_n(x)\,dx\to 0$ pro $n\to\infty$, kde $R_n(x)=\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)$. Tato podmínka je vhodná k vyšetřování limitních přechodů v integrálním počtu.

Určete obory absolutní konvergence a obory konvergence následujících řad funkcí:

2716. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}.$

2717. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n.$

2718. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n.$

2719. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n.$

2720. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{2n}}{2n}x^n(1-x)^n.$

2721. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}.$

2722. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}$.

2723. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^q}$ $(q>0;\ 0<x<\pi)$.

2724. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ (Lambertova řada).

2725. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n$.

2726. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

2727. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)\left(1+x^2\right)\dots\left(1+x^n\right)}$.

2728. $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$.

2729. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{1}{1+a^{2n}x^2}$.

2730. $\sum_{n=1}^{\infty} (2-x)\left(2-x^{1/2}\right)\left(2-x^{1/3}\right)\dots\left(2-x^{1/n}\right)$ $(x>0)$.

2731. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$.

2732. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n y^n}{x^n+y^n}$ $(x>0;\ y>0)$.

2733. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n}$ $(y \ge 0)$.

2734. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{|x|^{n^2}+|y|^{n^2}}$.

2735. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{n^y}$ $(x \ge 0)$.

2736. $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}^n\left(x+\frac{y}{n}\right)$.

2737. Dokažte, že je-li *Laurentova řada* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ konvergentní pro $x=x_1$ a pro $x=x_2$ $(|x_1|<|x_2|)$, pak je tato řada konvergentní také pro $|x_1|<|x|<|x_2|$.

2738. Určete obor konvergence Laurentovy řady

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2^{|n|}} x^n$$

a najděte její součet.

2739. Určete obory konvergence a absolutní konvergence *Newtonových řad*:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{[n]}}{n!}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \frac{x^{[n]}}{n!}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n}$, kde $x^{[n]}=x(x-1)\dots[x-(n-1)]$.

2740. Dokažte, že je-li *Dirichletova řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ konvergentní pro $x=x_0$, pak je tato řada konvergentní také pro $x>x_0$.

2741. Dokažte, že k tomu, aby na množině X daná posloupnost $f_n(x)$ $(n=1,2,\dots)$ stejnoměrně konvergovala ke své limitní funkci $f(x)$, je nutné a stačí, aby platila rovnost $\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{x\in X} r_n(x)\right\}=0$, kde $r_n(x)=|f(x)-f_n(x)|$.

2742. Co znamená, že je posloupnost $f_n(x)$ $(n=1,2,\dots)$: a) konvergentní na intervalu $(x_0,+\infty)$; b) stejnoměrně konvergentní na každém omezeném intervalu $(a,b)\subset(x_0,+\infty)$; c) stejnoměrně konvergentní na intervalu $(x_0,+\infty)$?

2743. Určete pro posloupnost

$$f_n(x)=x^n\ (n=1,2,\dots)\ (0<x<1)$$

nejmenší index $N=N(\varepsilon,x)$, pro který začíná být odchylka členů této posloupnosti od limitní funkce menší než $\varepsilon=0{,}001$, je-li $x=\frac{1}{10}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \dots, \frac{1}{\sqrt[m]{10}}, \dots$

Je tato posloupnost stejnoměrně konvergentní na intervalu $(0,1)$?

2744. Kolik členů řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ musíme vzít, aby se její částečný součet $S_n(x)$ lišil pro $-\infty<x<+\infty$ od součtu této řady o méně než ε? Proveďte kontrolu výpočtem pro následující případy: a) $\varepsilon=0{,}1$; b) $\varepsilon=0{,}01$; c) $\varepsilon=0{,}001$.

2745. Pro jaká čísla n bude zajištěno splnění nerovnosti

$$\left|e^x-\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right|<0{,}001\quad(0\le x\le 10)?$$

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností na zadaných intervalech:

2746. $f_n(x)=x^n$; a) $0\le x\le \frac{1}{2}$; b) $0\le x\le 1$.

2747. $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$; $0\le x\le 1$.

2748. $f_n(x)=x^n-x^{2n}$; $0\le x\le 1$.

2749. $f_n(x)=\frac{1}{x+n}$; $0<x<+\infty$.

2750. $f_n(x)=\frac{nx}{1+n+x}$; $0\le x\le 1$.

2751. $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$; a) $0\le x\le 1-\varepsilon$; b) $1-\varepsilon\le x\le 1+\varepsilon$; c) $1+\varepsilon\le x<+\infty$, kde $\varepsilon>0$.

2752. $f_n(x)=\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$; a) $0\le x\le 1$; b) $1<x<+\infty$.

2753. $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$; $-\infty<x<+\infty$.

2754. $f_n(x)=n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$; $0<x<+\infty$.

2755. a) $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}$; $-\infty<x<+\infty$; b) $f_n(x)=\sin\dfrac{x}{n}$; $-\infty<x<+\infty$.

2756. a) $f_n(x)=\operatorname{arctg} nx$; $0<x<+\infty$; b) $f_n(x)=x\operatorname{arctg} nx$; $0<x<+\infty$.

2757. $f_n(x)=e^{n(x-1)}$; $0<x<1$.

2758. $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$; a) $-l<x<l$, kde l je libovolné kladné číslo; b) $-\infty<x<+\infty$.

2759. $f_n(x)=\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}$; $0<x<1$.

2760. $f_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$; a) na omezeném intervalu (a,b); b) na intervalu $(-\infty,+\infty)$.

2761. $f_n(x)=n\left(x^{1/n}-1\right)$; $1\le x\le a$.

2762. $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$; $0\le x\le 2$.

2763. $f_n(x)=\begin{cases} n^2x & \text{pro } 0\le x\le\dfrac{1}{n},\\ n^2\left(\dfrac{2}{n}-x\right) & \text{pro } \dfrac{1}{n}<x<\dfrac{2}{n},\\ 0 & \text{pro } x\ge\dfrac{2}{n}\end{cases}$

na intervalu $0\le x\le 1$.

2764. Nechť $f(x)$ je libovolná funkce definovaná na uzavřeném intervalu $[a,b]$ a nechť
$$f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n}\quad (n=1,2,\ldots).$$
Dokažte, že $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ na $[a,b]$.

2765. Nechť má funkce $f(x)$ spojitou derivaci $f'(x)$ na otevřeném intervalu (a,b) a nechť
$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right].$$
Dokažte, že $f_n(x)\rightrightarrows f'(x)$ na intervalu $\alpha\le x\le\beta$, kde $a<\alpha<\beta<b$.

2766. Nechť $f_n(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{i}{n}\right)$, kde $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu $(-\infty,+\infty)$. Dokažte, že posloupnost $f_n(x)$ je stejnoměrně konvergentní na libovolném uzavřeném intervalu $[a,b]$.

Vyšetřete charakter konvergence následujících řad:

2767. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n$: a) na intervalu $|x|<q$, kde $q<1$; b) na intervalu $|x|<1$.

2768. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ na intervalu $-1\le x\le 1$.

2768.1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ na intervalu $(0,+\infty)$.

2769. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ na intervalu $0\le x\le 1$.

2770. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$; $-1\le x\le 1$.

2771. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$; $0<x<+\infty$.

2772. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$; $0<x<+\infty$.

2773. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\ldots(1+nx)}$; a) $0\le x\le\varepsilon$, kde $\varepsilon>0$; b) $\varepsilon\le x<+\infty$.

2774. Dokažte pomocí Weierstrassova kritéria stejnoměrnou konvergenci následujících řad funkcí na zadaných intervalech:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$; $-\infty<x<+\infty$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$; $-2<x<+\infty$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$; $0\le x<+\infty$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$; $|x|<+\infty$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n});\ \frac{1}{2}\le|x|\le 2;$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!};\ |x|<a$, kde a je libovolné kladné číslo;

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}};\ |x|<+\infty;$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2};\ |x|<+\infty;$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}};\ |x|<+\infty;$

j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right);\ |x|<a;$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx};\ 0\le x<+\infty;$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^3};\ |x|<+\infty.$

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci následujících řad funkcí na zadaných intervalech:

2775. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$: a) na intervalu $\varepsilon\le x\le 2\pi-\varepsilon$, kde $\varepsilon>0$; b) na intervalu $0\le x\le 2\pi$.

2776. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x};\ 0<x<+\infty.$

2777. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n};\ 0<x<+\infty.$

NÁVOD: Odhadněte zbytek řady.

2778. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x};\ 0\le x\le 2\pi.$

2779. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}};\ |x|\le 10.$

2780. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}};\ -\infty<x<+\infty.$

2781. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\,\sin nx}{\sqrt{n+x}};\ 0\le x<+\infty.$

2782. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}};\ 0\le x<+\infty.$

2783. Může posloupnost nespojitých funkcí stejnoměrně konvergovat k spojité funkci? Uvažujte případ funkcí

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\psi(x)\ \ (n=1,2,\ldots),$$

kde $\psi(x)=\begin{cases}0 \text{ pro } x \text{ iracionální},\\ 1 \text{ pro } x \text{ racionální}.\end{cases}$

2784. Dokažte, že jestliže je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ stejnoměrně konvergentní na uzavřeném intervalu $[a,b]$, pak je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ také stejnoměrně konvergentní na $[a,b]$.

2785. Platí nutně, že jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ konverguje absolutně a stejnoměrně na uzavřeném intervalu $[a,b]$, pak i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ konverguje stejnoměrně na $[a,b]$? Uvažujte případ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$, kde $0\le x\le 1$.

2786. Dokažte, že řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ $(0\le x\le 1)$, která je absolutně a stejnoměrně konvergentní, přičemž

$$f_n(x)=\begin{cases}0 \text{ pro } 0\le x\le 2^{-(n+1)},\\ \dfrac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x) \text{ pro } 2^{-(n+1)}<x<2^{-n},\\ 0 \text{ pro } 2^{-n}\le x\le 1,\end{cases}$$

nelze majorizovat konvergentní číselnou řadou s nezápornými členy.

2787. Dokažte, že jestliže je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$, jejíž členy jsou monotónní funkce na uzavřeném intervalu $[a,b]$, absolutně konvergentní v koncových bodech tohoto intervalu, pak je tato řada absolutně a stejnoměrně konvergentní na celém intervalu $[a,b]$.

2788. Dokažte, že mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ absolutně a stejnoměrně konverguje na libovolném uzavřeném intervalu, který leží uvnitř jejího oboru konvergence.

2789. Nechť je posloupnost $a_n\to\infty$ zvolena tak, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|$ konverguje. Dokažte, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x-a_n}$ absolutně a stejnoměrně konverguje na libovolné omezené a uzavřené množině, která neobsahuje body a_n $(n=1,2,\ldots)$.

2790. Dokažte, že jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak *Dirichletova řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ stejnoměrně konverguje pro $x \geq 0$.

2791. Nechť je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ stejnoměrně konverguje na množině $x \geq 0$.

2792. Ukažte, že funkce $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ je spojitá a má spojitou derivaci ve všech bodech $-\infty < x < +\infty$.

2793. Ukažte, že funkce

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$$

a) je definovaná a spojitá ve všech bodech s výjimkou celých čísel $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; b) je periodická s periodou 1.

2794. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left[nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x}\right]$ konverguje, ale nikoli stejnoměrně, na uzavřeném intervalu $0 \leq x \leq 1$. Ověřte, že přesto je její součet spojitou funkcí na tomto intervalu.

2795. Určete definiční obory funkcí $f(x)$ a vyšetřete, zda jsou spojité, je-li:

a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$; b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2}$; c) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

2796. Nechť r_k $(k = 1, 2, \ldots)$ jsou racionální čísla z uzavřeného intervalu $[0, 1]$. Ukažte, že funkce

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x - r_k|}{3^k} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

má následující vlastnosti: 1) je spojitá; 2) je diferencovatelná v iracionálních bodech a není diferencovatelná v racionálních bodech tohoto intervalu.

2797. Dokažte, že *Riemannova zeta-funkce*

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

je spojitá pro $x > 1$ a má na této množině spojité derivace všech řádů.

2798. Dokažte, že *theta-funkce*

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

je pro $x > 0$ definovaná a má derivace všech řádů.

2799. Určete definiční obor funkce $f(x)$ a vyšetřete, zda je diferencovatelná, je-li:

a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$; b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}$.

2800. Ukažte, že posloupnost

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

stejnoměrně konverguje na intervalu $(-\infty, +\infty)$, ale

$$\left[\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]_{x=1} \neq \lim_{n\to\infty} \frac{df_n}{dx}(1).$$

2801. Ukažte, že posloupnost

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

stejnoměrně konverguje na intervalu $(-\infty, +\infty)$, ale

$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq \lim_{n\to\infty} \frac{df_n}{dx}(x).$$

2802. Pro jaké hodnoty parametru α posloupnost

$$f_n(x) = n^{\alpha} x e^{-nx} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

a) konverguje na uzavřeném intervalu $[0, 1]$; b) stejnoměrně konverguje na uzavřeném intervalu $[0, 1]$; c) je možný limitní přechod v integrálu

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx\,?$$

2803. Ukažte, že posloupnost $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ konverguje na uzavřeném intervalu $[0, 1]$, ale

$$\int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\,dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

2804. Ukažte, že posloupnost $f_n(x) = nx(1-x)^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ konverguje, ale nikoli stejnoměrně, na uzavřeném intervalu $[0, 1]$, přičemž

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

2805. Můžeme provést limitní přechod pro $n \to \infty$ za integrálem ve výrazu

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1 + n^2 x^4}\,dx\,?$$

Vypočtěte následující limity:

2806. $\lim\limits_{x \nearrow 1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1}$.

2807. $\lim\limits_{x \nearrow 1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x^n - x^{n+1}\right)$.

2808. $\lim\limits_{x \searrow 0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$.

2808.1 $\lim\limits_{x \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2}$.

2809. Můžeme derivovat řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$ člen po členu?

2810. Můžeme na uzavřeném intervalu $[0, 1]$ člen po členu integrovat řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}} \right)?$$

2811. Nechť $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ má spojité derivace všech řádů a posloupnost derivací $f^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ stejnoměrně konverguje na každém omezeném intervalu (a, b) k funkci $\varphi(x)$. Dokažte, že $\varphi(x) = Ce^x$, kde C je konstanta. Uvažujte případ $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$, $n = 1, 2, \ldots$

2811.1 Nechť jsou funkce $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ definovány a omezeny na intervalu $(-\infty, +\infty)$ a nechť dále $f_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ na každém uzavřeném intervalu $[a, b]$. Vyplývá odtud, že

$$\lim_{n \to \infty} \sup_x f(x) = \sup_x \varphi(x)?$$

§ 5. Mocninné řady

1. **Interval konvergence.** Pro každou mocninnou řadu

$$a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

existuje uzavřený *interval konvergence* $|x-a| \le R$, v jehož vnitřku daná řada konverguje a vně kterého diverguje. Pro *poloměr konvergence* R platí *Cauchyův-Hadamardův vzorec*

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Poloměr konvergence R je také možné spočítat podle vzorce

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

pokud tato limita existuje.

2. **Abelova věta.** Konverguje-li mocninná řada $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(|x| < R)$ v krajním bodě $x = R$ intervalu konvergence, pak $S(R) = \lim\limits_{x \nearrow R} S(x)$.

3. **Taylorova řada.** Funkci $f(x)$, která je analytická v bodě a, lze vyjádřit v nějakém jeho okolí ve tvaru mocninné řady

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Zbytkový člen této řady

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

můžeme zapsat v *Lagrangeově tvaru*:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

nebo v *Cauchyově tvaru*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta_1(x-a))}{n!}(1-\theta_1)^n (x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta_1 < 1).$$

Nyní uveďme pět základních rozvojů funkcí do mocninných řad:

I. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots (-\infty < x < +\infty)$.

II. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \; (-\infty < x < +\infty)$.

III. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \; (-\infty < x < +\infty)$.

IV. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \; (-1 < x < 1)$.

V. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \; (-1 < x \le 1)$.

4. **Operace s mocninnými řadami.** Uvnitř společného intervalu konvergence $|x-a| < R$ platí:
a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \pm \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-a)^n$; b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$,
kde $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0$; c) $\frac{d}{dx}\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right] = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x-a)^n$;
d) $\int\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right]dx = C + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$.

5. **Mocninné řady v komplexním oboru.** Uvažujme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

kde $c_n = a_n + ib_n$, $a = \alpha + i\beta$, $z = x + iy$, $i^2 = -1$.

Pro každou takovou řadu existuje uzavřený *kruh konvergence* $|z-a| \le R$, v jehož vnitřku daná řada konverguje (a zároveň absolutně konverguje) a vně kterého diverguje. *Poloměr konvergence* R je roven poloměru konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$$

v reálném oboru.

Určete poloměry a intervaly konvergence následujících mocninných řad a vyšetřete jejich chování v hraničních bodech intervalů konvergence:

2812. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$.

2813. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$.

2814. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

2815. $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n^2}\cdot x^n$ $(0<\alpha<1)$.

2816. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$.

2817. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^{n^2}}x^n$ $(a>1)$.

2818. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}\right]^p\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$.

2819. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p x^n$.

2820. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n$.

2821. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n$ $(a>0, b>0)$.

2822. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$ $(a>0, b>0)$.

2823. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}$ $(a>0)$.

2824. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}x^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

2825. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$.

2826. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$.

2827. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n$.

2828. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$.

2829. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n}x^n$.

2830. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$.

2831. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}x^n$

(*Pringsheimova řada*).

2831.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{\nu(n)}}{n}(1-x)^n$, kde $\nu(n)$ je počet cifer čísla n.

2831.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\sin n}\right)^n$.

2832. Určete obor konvergence *hypergeometrické řady*

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\cdot2\ldots n\cdot\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n+\ldots$$

Najděte obory konvergence následujících zobecněných mocninných řad:

2833. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

2834. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$.

2835. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}$.

2836. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx}$.

2837. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}\operatorname{tg}^n x$.

2838. Rozviňte funkci $f(x)=x^3$ do mocninné řady s nezápornými mocninami dvojčlenu $x+1$.

2839. Rozviňte funkci $f(x)=\frac{1}{a-x}$ $(a\neq0)$ do mocninných řad: a) v mocninách x; b) v mocninách dvojčlenu $x-b$, kde $b\neq a$; c) v mocninách $\frac{1}{x}$. Najděte odpovídající obory konvergence.

2840. Rozviňte funkci $f(x)=\ln x$ do mocninné řady s nezápornými mocninami rozdílu $x-1$ a najděte obor konvergence rozvoje.

Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Rozviňte následující funkce do mocninných řad s nezápornými mocninami proměnné x a najděte odpovídající intervaly konvergence:

2841. $f(x)=\sinh x$. **2842.** $f(x)=\cosh x$.

2843. $f(x)=\sin^2 x$. **2844.** $f(x)=a^x\ (a>0)$.

2845. $f(x)=\sin(\mu\cdot\arcsin x)$. **2846.** $f(x)=\cos(\mu\cdot\arcsin x)$.

2847. Napište první tři členy rozvoje funkce $f(x)=x^x$ v mocninnou řadu s celými nezápornými mocninami dvojčlenu $x-1$.

2848. Najděte první tři členy rozvoje funkce $f(x)=(1+x)^{1/x}$ $(x\neq 0)$ a $f(0)=e$ v mocninnou řadu s celými nezápornými mocninami proměnné x.

2849. Rozviňte funkce $\sin(x+h)$ a $\cos(x+h)$ do mocninných řad s celými nezápornými mocninami proměnné h.

2850. Najděte interval konvergence rozvoje funkce

$$f(x)=\frac{x}{x^2-5x+6}$$

do mocninné řady: a) v proměnné x; b) s mocninami dvojčlenu $x-5$, bez konstrukce tohoto rozvoje.

2850.1 Je pravda, že $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\rightrightarrows\sin x$ na intervalu $(-\infty,+\infty)$ pro $N\to\infty$?

Rozviňte následující funkce do mocninných řad v proměnné x pomocí základních rozvojů funkcí I. - V.

2851. e^{-x^2}. **2852.** $\cos^2 x$. **2853.** $\sin^3 x$.

2854. $\dfrac{x^{10}}{1-x}$. **2855.** $\dfrac{1}{(1-x)^2}$. **2856.** $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

2857. $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. **2858.** $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$.

NÁVOD: Rozložte zadaný zlomek na parciální zlomky.

2859. $\dfrac{12-5x}{6-5x-x^2}$. **2860.** $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

2861. $\dfrac{1}{1-x-x^2}$. **2862.** $\dfrac{1}{1+x+x^2}$.

2862.1 $f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$. Čemu se rovná $f^{(1000)}(0)$?

2863. $\dfrac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$. **2864.** $\dfrac{x\sin\alpha}{1-2x\cos a+x^2}$. **2865.** $\dfrac{x\sinh a}{1-2x\cosh a+x^2}$.

2866. $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$. **2867.** $\ln\left(1+x+x^2+x^3\right)$. **2868.** $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$.

NÁVOD: Použijte Eulerův vzorec.

Rozviňte následující funkce do mocninných řad pomocí rozvojů, jejich derivací a integrování těchto rozvojů člen po členu:

2869. $f(x)=\operatorname{arctg}x$. Najděte součet řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

2870. $f(x)=\arcsin x$.

2871. $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

2872. $f(x)=\ln\left(1-2x\cos\alpha+x^2\right)$.

2873. Různými metodami rozviňte následující funkce do mocninných řad:

a) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$; b) $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x$;

c) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{2-2x}{1+4x}$; d) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{2-x^2}$;

e) $f(x)=x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}$; f) $f(x)=\arccos\left(1-2x^2\right)$;

g) $f(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$; h) $f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$.

2874. Užijte jednoznačnost rozvoje $f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\dfrac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots$ k výpočtu derivací n-tého řádu následujících funkcí:

a) $f(x)=e^{x^2}$; b) $f(x)=e^{a/x}$; c) $f(x)=\operatorname{arctg}x$.

2875. Rozviňte funkci $f(x)=\ln\dfrac{1}{2+2x+x^2}$ v mocninnou řadu s přirozenými mocninami dvojčlenu $x+1$.

2876. Rozviňte funkci $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ v mocninnou řadu se zápornými mocninami proměnné x.

2877. Rozviňte funkci $f(x)=\ln x$ v mocninnou řadu s přirozenými mocninami zlomku $\dfrac{x-1}{x+1}$.

2878. Rozviňte funkci $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ v mocninnou řadu s přirozenými mocninami zlomku $\dfrac{x}{1+x}$.

2879. Nechť $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Dokažte, že z této definice bezprostředně vyplývá rovnost $f(x)f(y)=f(x+y)$.

2880. Definujme

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ a } \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Dokažte, že platí:

a) $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$; b) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

2881. Vypočtěte několik členů rozvoje funkce $f(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n+1}\right)\right]^{-1}$ v mocninnou řadu.

Rozviňte následující funkce pomocí mocninných řad:

2882. $f(x)=(1+x)e^{-x}$. **2883.** $f(x)=(1-x)^2\cosh\sqrt{x}$.

2884. $f(x)=\ln^2(1-x)$. **2885.** $f(x)=(1+x^2)\,\mathrm{arctg}\,x$.

2886. $f(x)=e^x\cos x$. **2887.** $f(x)=e^x\sin x$.

2888. $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}$. **2889.** $f(x)=(\mathrm{arctg}\,x)^2$.

2890. $f(x)=\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2$.

Vypočtěte první tři nenulové členy rozvoje následujících funkcí v mocninnou řadu s kladnými mocninami proměnné x:

2891. $f(x)=\mathrm{tg}\,x$. **2892.** $f(x)=\mathrm{tgh}\,x$. **2893.** $f(x)=\mathrm{cotg}\,x-\frac{1}{x}$.

2894. Nechť je rozvoj funkce $\sec x$ zapsán ve tvaru

$$\sec x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{(2n)!}x^{2n}.$$

Najděte rekurentní vztah, který platí pro koeficienty E_n (*Eulerovy koeficienty*).

2895. Najděte rozvoj funkce $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}$ $(|x|<1)$ v mocninnou řadu.

2896. Nechť $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$. Najděte rozvoj funkce $F(x)=\frac{f(x)}{1-x}$.

2897. Nechť má řada $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ poloměr konvergence R_1 a řada $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ poloměr konvergence R_2. Jaký poloměr konvergence mají řady a) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n b_n x^n$?

2898. Nechť $l=\varliminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ a $L=\varlimsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Dokažte, že poloměr konvergence R mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ splňuje nerovnosti $l\le R\le L$.

2899. Dokažte, že je-li $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, přičemž $|n!a_n|<M$ $(n=1,2,\ldots)$, kde M je konstanta, pak platí následující tvrzení: 1) $f(x)$ má derivace všech řádů v libovolném bodě a; 2) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ $(|x|<+\infty)$.

2899.1 Nechť $f(x)\in C^{(\infty)}(a,b)$ a $|f^{(n)}(x)|\le c^n$ $(n=0,1,2,\ldots)$ pro $x\in(a,b)$. Dokažte, že funkce $f(x)$ má mocninný rozvoj $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ $(x_0\in(a,b))$, který konverguje na intervalu (a,b).

2899.2 Nechť $f(x)\in C^{(\infty)}[-1,1]$ a $f^{(n)}(x)\ge 0$ $(n=0,1,2,\ldots)$ pro $x\in[-1,1]$. Dokažte, že na intervalu $(-1,1)$ lze funkci $f(x)$ rozvinout v mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$.

NÁVOD: Využitím monotonie derivací $f^{(n)}(x)$ odvoďte pro zbytkový člen $R_n(x)$ Taylorovy řady funkce $f(x)$ odhad $|R_n(x)|\le|x|^{n+1}f(1)$.

2900. Dokažte, že jestliže $a_n\ge 0$ a jestliže existuje $\lim_{x\nearrow R}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=S$, pak $\sum_{n=0}^{\infty}a_n R^n=S$.

Najděte mocninný rozvoj následujících funkcí:

2901. $\int_0^x e^{-t^2}dt$. **2902.** $\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

2903. $\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$. **2904.** $\int_0^x\frac{\mathrm{arctg}\,t}{t}dt$.

2905. $\int_0^x\frac{t\,dt}{\ln(1+t)}$ (určete první čtyři členy).

Derivováním člen po členu vypočtěte součty následujících řad:

2906. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots$ **2907.** $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots$

2908. $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$ **2909.** $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\dots$

2910. $1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\dots$

NÁVOD: Vynásobte derivaci řady funkcí $1-x$.

Integrováním člen po členu vypočtěte součty následujících řad:

2911. $x+2x^2+3x^3+\dots$ **2912.** $x-4x^2+9x^3-16x^4+\dots$

2913. $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\dots$

2914. Dokažte, že řada $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ je řešením rovnice $y^{(4)}=y$.

2915. Dokažte, že řada $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$ je řešením rovnice $xy''+y'-y=0$.

Vypočtěte poloměr a určete obor konvergence následujících mocninných řad v komplexním oboru ($z=x+iy$):

2916. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1-i)^n}{n\,2^n}$. **2917.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}$.

2918. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,z^n}{(1+i)(1+2i)\dots(1+ni)}$. **2919.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{\alpha+i\beta}}$.

2920. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-e^{i\alpha})^n}{n(1-e^{i\alpha})^n}$.

2921. Pomocí vzorce binomické věty vypočtěte přibližně hodnotu čísla $\sqrt[3]{9}$ a odhadněte chybu, které se dopustíme, jestliže použijeme první tři členy rozvoje odpovídající funkce.

2922. Vypočtěte přibližně následující hodnoty:

a) $\operatorname{arctg} 1{,}2$; b) $\sqrt[10]{1000}$; c) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; d) $\ln 1{,}25$

a odhadněte chyby jejich určení.

Pomocí vhodných rozvojů vypočtěte s danou přesností následující hodnoty:

2923. $\sin 18°$ s přesností na 10^{-5}.

2924. $\cos 1°$ s přesností na 10^{-6}.

2925. $\operatorname{tg} 9°$ s přesností na 10^{-3}.

2926. e s přesností na 10^{-6}.

2927. $\ln 1{,}2$ s přesností na 10^{-4}.

2928. Pomocí rovnosti $\frac{\pi}{6}=\arcsin\frac{1}{2}$ vypočtěte číslo π s přesností na 10^{-4}.

2929. Pomocí identity $\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ vypočtěte číslo π s přesností na $0{,}001$.

2930. Pomocí identity $\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}$ vypočtěte číslo π s přesností na 10^{-9}.

2931. Pomocí vztahu $\ln(n+1)=\ln n+2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\dots\right]$ vypočtěte $\ln 2$ a $\ln 3$ s přesností na 10^{-5}.

2932. Pomocí rozvoje funkcí v argumentu integrálu vypočtěte s přesností na $0{,}001$ hodnoty následujících integrálů:

a) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$; b) $\int_2^4 e^{1/x}dx$; c) $\int_0^2\frac{\sin x}{x}dx$; d) $\int_0^1\cos x^2\,dx$; e) $\int_0^1\frac{\sinh x}{x}dx$;

f) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$; g) $\int_0^{1/3}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$; h) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$; i) $\int_{10}^{100}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$; j) $\int_0^{1/2}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx$;

k) $\int_0^{1/2}\frac{\arcsin x}{x}dx$; l) $\int_0^1 x^x\,dx$.

2933. Vypočtěte s přesností na $0{,}01$ délku křivky jedné polovlny sinusoidy $y=\sin x$ $(0\le x\le\pi)$.

2934. Vypočtěte s přesností na $0{,}01$ délku elipsy s poloosami $a=1$ a $b=1/2$.

2935. Elektrické vedení zavěšené na dvou sloupech, jejichž vzdálenost je $2l=20\,\text{m}$, má tvar paraboly. Vypočtěte s přesností na $1\,\text{cm}$ délku vedení, je-li hloubka jeho prohybu $h=40\,\text{cm}$.

§ 6. Fourierovy řady

1. **FOURIEROVA VĚTA O ROZVOJI.** Jestliže je funkce $f(x)$ po částech spojitá a má po částech spojitou derivaci $f'(x)$ na intervalu $(-l,l)$, přičemž jsou všechny její body nespojitosti ξ regulární (tj. platí $f(\xi)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\nearrow\xi} f(x)+\lim_{x\searrow\xi} f(x)\right]$), pak lze funkci $f(x)$ na tomto intervalu rozvinout ve Fourierovu řadu

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{1}$$

kde

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=0,1,2,\ldots) \tag{2}$$

a

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,\ldots). \tag{2'}$$

Speciálně platí následující vztahy:

a) je-li funkce $f(x)$ sudá, pak

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{3}$$

kde

$$a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=0,1,2,\ldots);$$

b) je-li funkce $f(x)$ lichá, pak

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{4}$$

kde

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=0,1,2,\ldots).$$

Funkci $f(x)$ definovanou na intervalu $(0,l)$, která splňuje výše uvedené předpoklady spojitosti, lze rozvinout na tomto intervalu jak do tvaru (3), tak do tvaru (4).

2. **PODMÍNKA ÚPLNOSTI.** Pro každou funkci $f(x)$, která je spolu se svou druhou mocninou integrovatelná na intervalu $[-l,l]$, splňuje řada (1) s koeficienty (2), (2') *Parsevalovu rovnost*

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx.$$

3. **INTEGROVÁNÍ FOURIEROVÝCH ŘAD.** Konvergentní nebo divergentní Fourierovu řadu (1) funkce $f(x)$, která je na intervalu $(-l,l)$ riemannovsky integrovatelná, lze na tomto intervalu integrovat člen po členu.

2936. Rozviňte funkci $f(x)=\sin^4 x$ do Fourierovy řady.

2937. Jaký tvar má Fourierova řada trigonometrického polynomu

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix)\ ?$$

2938. Rozviňte do Fourierovy řady funkci $f(x)=\operatorname{sgn}x$ $(-\pi<x<\pi)$. Sestrojte graf funkce a grafy několika prvních částečných součtů Fourierovy řady této funkce. Pomocí tohoto rozvoje vypočtěte součet *Leibnizovy řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Najděte Fourierovy řady následujících funkcí na daných intervalech:

2939. $f(x)=\begin{cases}A & \text{pro } 0<x<l,\\ 0 & \text{pro } l<x<2l,\end{cases}$ kde A je konstanta, na intervalu $(0,2l)$.

2940. $f(x)=x$ na intervalu $(-\pi,\pi)$.

2941. $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ na intervalu $(0,2\pi)$.

2942. $f(x)=|x|$ na intervalu $(-\pi,\pi)$.

2943. $f(x)=\begin{cases}ax & \text{pro } -\pi<x<0,\\ bx & \text{pro } 0\le x<\pi,\end{cases}$ kde a a b jsou konstanty, na intervalu $(-\pi,\pi)$.

2944. $f(x)=\pi^2-x^2$ na intervalu $(-\pi,\pi)$.

2945. $f(x)=\cos ax$ na intervalu $(-\pi,\pi)$ (a není celé číslo).

2946. $f(x)=\sin ax$ na intervalu $(-\pi,\pi)$ (a není celé číslo).

2947. $f(x)=\sinh ax$ na intervalu $(-\pi,\pi)$.

2948. $f(x)=e^{ax}$ na intervalu $(-h,h)$.

2949. $f(x)=x$ na intervalu $(a,a+2l)$.

2950. $f(x)=x\sin x$ na intervalu $(-\pi,\pi)$.

2951. $f(x)=x\cos x$ na intervalu $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Rozviňte do Fourierových řad následující periodické funkce:

2952. $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$.
2953. $f(x)=\arcsin(\sin x)$.

2954. $f(x)=\arcsin(\cos x)$.
2955. $f(x)=x-[x]$.

2956. $f(x)=(x)$ – vzdálenost čísla x od nejbližšího celého čísla.

2957. $f(x)=|\sin x|$.
2958. $f(x)=|\cos x|$.

2959. $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\frac{\sin nx}{\sin x}$ $(|\alpha|<1)$.

2960. Rozviňte do Fourierovy řady funkci

$$f(x) = \sec x \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \right).$$

NÁVOD: Najděte vztah mezi koeficienty a_n a a_{n-2}.

2961. Rozviňte funkci $f(x) = x^2$ do Fourierovy řady a) na intervalu $(-\pi, \pi)$ pouze s kosinovými členy; b) na intervalu $(0, \pi)$ pouze se sinovými členy a c) na intervalu $(0, 2\pi)$. Sestrojte grafy funkcí a grafy odpovídajících součtových řad pro případy a), b) a c).

Pomocí těchto rozvojů vypočtěte součty řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \ \text{a} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

2962. Pomocí rozvoje

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi)$$

a integrováním této řady člen po členu rozviňte na intervalu $(-\pi, \pi)$ do Fourierových řad funkce x^2, x^3 a x^4.

2963. Napište Parsevalovu rovnost pro funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ pro } |x| < \alpha, \\ 0 \text{ pro } \alpha < |x| < \pi. \end{cases}$$

Pomocí Parsevalovy rovnosti vypočtěte součty řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \ \text{a} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

2964. Rozviňte ve Fourierovu řadu funkci

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ pro } 0 \le x \le 1, \\ 1 \text{ pro } 1 < x < 2, \\ 3 - x \text{ pro } 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

Pomocí vztahů $\cos x = \frac{1}{2}(t + \bar{t})$ a $\sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t})$, kde $t = e^{ix}$ a $\bar{t} = e^{-ix}$, rozviňte do Fourierových řad následující funkce:

2965. $\cos^{2m} x$ (m je přirozené číslo).

2966. $\dfrac{q \sin x}{1 - 2q\cos x + q^2}$ $(|q| < 1)$.

2967. $\dfrac{1 - q^2}{1 - 2q\cos x + q^2}$ $(|q| < 1)$.

2968. $\dfrac{1 - q\cos x}{1 - 2q\cos x + q^2}$ $(|q| < 1)$.

2969. $\ln(1 - 2q\cos x + q^2)$ $(|q| < 1)$

Rozviňte do Fourierových řad následující neomezené periodické funkce:

2970. $f(x) = \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$. **2971.** $f(x) = \ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|$. **2972.** $f(x) = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

2973. Rozviňte do Fourierovy řady funkci $f(x) = \int_0^x \ln\sqrt{\left|\operatorname{cotg}\frac{t}{2}\right|}\,dt$ $(-\pi \le x \le \pi)$.

2974. Rozviňte do Fourierovy řady funkce $x = x(s), y = y(s)$ $(0 \le s \le 4a)$, které parametricky popisují obvod čtverce $0 < x < a$, $0 < y < a$, kde s je délka této křivky od počátečního bodu $(0, 0)$ s orientací proti směru hodinových ručiček.

2975. Jak musíme prodloužit integrovatelnou funkci $f(x)$ definovanou na $(0, \pi/2)$ na interval $(-\pi, \pi)$, aby její Fourierova řada měla tvar $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x$ $(-\pi < x < \pi)$?

2976. Jak musíme prodloužit integrovatelnou funkci $f(x)$ definovanou na $(0, \pi/2)$ na interval $(-\pi, \pi)$, aby její Fourierova řada měla tvar $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)x$ $(-\pi < x < \pi)$?

2977. Funkci $f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ rozviňte na intervalu $(0, \pi/2)$: a) do řady pouze s kosinovými lichými členy; b) do řady pouze se sinovými lichými členy. Sestrojte grafy součtových funkcí Fourierovy řady pro případy a) a b).

2978. Funkce $f(x)$ je *antiperiodická* s periodou π, pokud platí $f(x + \pi) \equiv -f(x)$. Jakou vlastnost má Fourierova řada takové funkce na intervalu $(-\pi, \pi)$?

2979. Jakou vlastnost má Fourierova řada funkce $f(x)$ na intervalu $(-\pi, \pi)$, je-li $f(x + \pi) \equiv f(x)$?

2980. Jaké vlastnosti mají koeficienty Fourierovy řady a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ funkce $y = f(x)$ s periodou 2π, jestliže graf této funkce: a) má středy souměrnosti v bodech $(0, 0)$ a $(\pm\pi/2, 0)$; b) má střed souměrnosti v počátku souřadnic a osy souměrnosti $x = \pm\pi/2$?

2981. V jakém vzájemném vztahu jsou koeficienty Fourierových řad a_n, b_n a α_n, β_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ funkcí $\varphi(x)$ a $\psi(x)$, je-li $\varphi(-x) \equiv \psi(x)$?

2982. V jakém vzájemném vztahu jsou koeficienty Fourierových řad a_n, b_n, a α_n, β_n $(a = 0, 1, 2, \ldots)$ funkcí $\varphi(x)$ a $\psi(x)$, je-li $\varphi(-x) \equiv -\psi(x)$?

2983. Pomocí Fourierových koeficientů a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ integrovatelné funkce $f(x)$ s periodou 2π vyjádřete Fourierovy koeficienty $\overline{a_n}, \overline{b_n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ „posunuté" funkce $f(x+h)$, kde h je konstanta.

2984. Pomocí Fourierových koeficientů a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ integrovatelné funkce $f(x)$ s periodou 2π vyjádřete Fourierovy koeficienty A_n, B_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *Stěklovovy funkce*

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi)\, d\xi.$$

2985. Nechť $f(x)$ je spojitá funkce s periodou 2π a a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ jsou její Fourierovy koeficienty. Vypočtěte Fourierovy koeficienty A_n, B_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ konvoluční funkce

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t)\, dt.$$

Výsledek užijte k odvození odpovídající Parsevalovy rovnosti.

§ 7. Výpočet součtu řady

1. **PŘÍMÝ VÝPOČET SOUČTU.** Jestliže platí $u_n = v_{n+1} - v_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ a $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v_\infty$, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = v_\infty - v_1$.

Speciálně, je-li

$$u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \ldots a_{n+m}},$$

kde čísla a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ tvoří aritmetickou posloupnost s přírůstkem d, pak

$$v_n = -\frac{1}{md} \frac{1}{a_n a_{n+1} \ldots a_{n+m-1}}.$$

V některých případech lze řadu vyjádřit ve tvaru lineární kombinace řad se známým součtem, jako jsou:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ atd.}$$

2. **ABELOVA METODA.** Jestliže řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \nearrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Součet mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ lze v jednoduchých případech vypočítat derivováním nebo integrováním řady člen po členu.

3. **SOUČET TRIGONOMETRICKÝCH ŘAD.** Pro výpočet součtu řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \text{ nebo } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

lze obvykle uvažovat reálnou nebo komplexní část mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ v komplexním oboru, kde $z = e^{ix}$.

V těchto případech bývá užitečný součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1).$$

Sečtěte následující řady:

2986. $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \ldots$

2987. $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$

2988. $\dfrac{1}{1\cdot 2} - \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} - \dfrac{1}{4\cdot 5} + \ldots$

2989. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

2990. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}$ (m je přirozené číslo).

2991. $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 6\cdot 7} + \ldots$

2992. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$.

2993. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(n+1)^2}$.

2994. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.

2995. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

2996. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$.

2997. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$.

2998. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}$.

2999. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$.

3000. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$.

3001. Nechť $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$. Vypočtěte součet řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n$.

Vypočtěte součty následujících řad:

3002. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n$. **3003.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n$.

3004. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)}{(2n)!} x^{2n}$. **3005.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!}$.

Pomocí derivování člen po členu sečtěte následující řady:

3006. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. **3007.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$. **3008.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

3009. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)\dots[a+(n-1)d]}{d\cdot 2d\dots nd} x^n \quad (d>0)$.

NÁVOD: Derivaci řady vynásobte funkcí $1-x$.

3010. $\frac{1}{3}\frac{x}{2} + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots$

Pomocí integrování člen po členu sečtěte následující řady:

3011. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$. **3012.** $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$. **3013.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$.

Abelovou metodou vypočtěte součty následujících řad:

3014. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots$ **3015.** $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

3016. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \dots$ **3017.** $1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \dots$

Sečtěte následující trigonometrické řady:

3018. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$. **3019.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$. **3020.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \sin nx}{n}$.

3021. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha \sin nx}{n} \quad \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

3022. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$. **3023.** $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2-1}$. **3024.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

3025. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$. **3026.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$.

3027. Sestrojte křivku, která je definovaná rovností

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ny}{n^2} = 0.$$

Vypočtěte součty následujících řad:

3028. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n}$. **3029.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

3030. $\frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots$

3031. $\frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x}\frac{a_2}{a_3+x} + \dots$ za podmínky, že $x>0$, $a_n>0$ $(n=1,2,\dots)$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ diverguje.

3032. $\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \dots$ pro a) $|x|<1$; b) $|x|>1$.

3033. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$ pro a) $|x|<1$; b) $|x|>1$.

§ 8. Výpočet určitých integrálů pomocí součtu řady

Pomocí rozvoje integrované funkce do řady vypočtěte hodnoty následujících integrálů:

3034. $\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x}\,dx$. **3035.** $\int_0^1 \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}\,dx$. **3036.** $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$.

3037. $\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)\,dx \quad (p>0, q>0)$.

KAPITOLA VII

Integrály závislé na parametru

§ 1. Určité integrály závislé na parametru

1. **VĚTA O SPOJITOSTI INTEGRÁLU.** Jestliže je funkce $f(x,y)$ definovaná a spojitá na omezené množině $R=\{(x,y)\,|\,a\le x\le A, b\le y\le B\}$, pak je funkce $F(y)=\int\limits_a^A f(x,y)\,dx$ spojitá na uzavřeném intervalu $b\le y\le B$.

2. **VĚTA O ZÁMĚNĚ DERIVACE A INTEGRÁLU.** Jsou-li splněny předpoklady předchozí věty a je-li navíc parciální derivace $f_y'(x,y)$ spojitá na množině R, pak pro $b<y<B$ platí *Leibnizův vzorec*

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^A f(x,y)\,dx=\int\limits_a^A f_y'(x,y)\,dx.$$

V obecnějším případě, jsou-li $\phi(y)$ a $\psi(y)$ diferencovatelné funkce parametru y, přičemž $a<\phi(y)<A$, $a<\psi(y)<A$ pro $b<y<B$, pak platí

$$\frac{d}{dy}\int\limits_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx=f(\psi(y),y)\,\psi'(y)-f(\phi(y),y)\,\phi'(y)+\int\limits_{\phi(y)}^{\psi(y)} f_y'(x,y)\,dx.$$

3. **VĚTA O ZÁMĚNĚ POŘADÍ INTEGRACE.** Za stejných předpokladů jako v první větě platí následující rovnost:

$$\int\limits_b^B dy\int\limits_a^A f(x,y)\,dx=\int\limits_a^A dx\int\limits_b^B f(x,y)\,dy.$$

3711. Dokažte, že integrál $F(y)=\int\limits_0^1 f(x,y)\,dx$ nespojité funkce $f(x,y)=\operatorname{sgn}(x-y)$ je spojitou funkcí. Sestrojte graf funkce $u=F(y)$.

3712. Vyšetřete spojitost funkce $F(y)=\int\limits_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,dx$, kde $f(x)$ je spojitá a kladná funkce na uzavřeném intervalu $[0,1]$.

3713. Najděte následující limity:

a) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_\alpha^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$; b) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{-1}^1\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$; c) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_0^2 x^2\cos\alpha x\,dx$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$.

3713.1 Vypočtěte $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}\,d\theta$.

3714. Nechť $f(x)$ je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $[A,B]$. Dokažte, že

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_a^x [f(t+h)-f(t)]\,dt=f(x)-f(a)\quad (A<a<x<B).$$

3714.1 Nechť jsou splněny následující podmínky: 1) $\varphi_n(x)\ge 0$ $(n=1,2,\ldots)$ na intervalu $[-1,1]$; 2) $\varphi_n(x)\rightrightarrows 0$ pro $n\to\infty$ na $0<\varepsilon\le|x|\le 1$; 3) $\int\limits_{-1}^1\varphi_n(x)\,dx\to 1$ pro $n\to\infty$. Dokažte, že jestliže $f(x)\in C[-1,1]$, pak $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{-1}^1 f(x)\varphi_n(x)\,dx=f(0)$.

3715. Lze provést limitní přechod v argumentu integrálu ve výrazu

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_0^1\frac{x}{y^2}e^{-x^2/y^2}\,dx?$$

3716. Lze pomocí Leibnizova vzorce derivovat funkci $F(y)=\int\limits_0^1\ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx$ v bodě $y=0$?

3717. Vypočtěte $F'(x)$, je-li $F(x)=\int\limits_x^{x^2}e^{-xy^2}\,dy$.

3718. Vypočtěte derivace $F'(\alpha)$ následujících funkcí:

a) $F(\alpha)=\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx$; b) $F(\alpha)=\int\limits_{a+\alpha}^{b+\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$; c) $F(\alpha)=\int\limits_0^\alpha\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,dx$;

d) $F(\alpha)=\int\limits_0^\alpha f(x+\alpha,x-\alpha)\,dx$; e) $F(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha^2}dx\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}\sin(x^2+y^2-\alpha^2)\,dy$.

3719. Vypočtěte $F''(x)$, je-li $F(x)=\int\limits_0^x (x+y)f(y)\,dy$, kde $f(x)$ je diferencovatelná funkce.

3720. Vypočtěte $F''(x)$, je-li $F(x)=\int\limits_a^b f(y)\,|x-y|\,dy$, kde $a<b$ a $f(y)$ je spojitá funkce na intervalu $[a,b]$.

3721. Vypočtěte $F''(x)$, je-li $F(x)=\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h d\xi\int\limits_0^h f(x+\xi+\eta)\,d\eta$ $(h>0)$, kde $f(x)$ je spojitá funkce.

3722. Vypočtěte $F^{(n)}(x)$, je-li $F(x)=\int\limits_0^x f(t)(x-t)^{n-1}\,dt$.

3722.1 Dokažte, že platí

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x y^n\cos\left(y+\frac{n\pi}{2}\right)dy \quad (n=1,2,\ldots). \tag{1}$$

Pomocí vztahu (1) odvoďte následující odhad:

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right|\le\frac{1}{n+1}\ \text{pro}\ x\in(-\infty,+\infty).$$

3723. Aproximujte funkci $f(x)=x^2$ na intervalu $1\le x\le 3$ lineární funkcí tvaru $a+bx$ tak, aby byl $\int_1^3(a+bx-x^2)^2dx$ minimální.

3724. Odvoďte přibližný vztah tvaru $\sqrt{1+x^2}\approx a+bx$ $(0\le x\le 1)$ z podmínky, že střední kvadratický rozdíl funkcí $a+bx$ a $\sqrt{1+x^2}$ na daném intervalu $[0,1]$ je minimální.

3725. Vyjádřete derivace *úplných eliptických integrálů* $E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$ a $F(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ $(0<k<1)$ pomocí funkcí $E(k)$ a $F(k)$. Dokažte, že funkce $E(k)$ je řešením diferenciální rovnice

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

3726. Dokažte, že *Besselova funkce celočíselného indexu n*

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\,d\varphi$$

je řešením *Besselovy rovnice* $x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0$.

3727. Nechť $I(\alpha)=\int_0^\alpha\frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{\alpha-x}}$, kde $\varphi(x)$ a $\varphi'(x)$ jsou spojité funkce na uzavřeném intervalu $0\le x\le a$. Dokažte, že pro $0<\alpha<a$ platí $I'(\alpha)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\int_0^\alpha\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}dx$.

NÁVOD: Užijte substituci $x=\alpha t$.

3728. Dokažte, že funkce $u(x)=\int_0^1K(x,y)v(y)dy$, kde $K(x,y)=\begin{cases}x(1-y)\ \text{pro}\ x\le y,\\ y(1-x)\ \text{pro}\ x>y\end{cases}$ a $v(y)$ je spojitá funkce, je řešením rovnice $u''(x)=-v(x)$ $(0\le x\le 1)$.

3729. Vypočtěte $F''_{xy}(x,y)$, je-li $F(x,y)=\int_{x/y}^{xy}(x-yz)f(z)dz$, kde $f(z)$ je diferencovatelná funkce.

3730. Nechť $f(x)$ je dvakrát diferencovatelná funkce a $F(x)$ je diferencovatelná funkce. Dokažte, že funkce $u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)dz$ je řešením *vlnové rovnice* $\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$ s počátečními podmínkami $u(x,0)=f(x)$ a $u_t'(x,0)=F(x)$.

3731. Dokažte, že jestliže je funkce $f(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $[0,l]$ a $(x-\xi)^2+y^2+z^2\ne 0$ pro $0\le\xi\le l$, pak je funkce

$$u(x,y,z)=\int_0^l\frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+z^2}}$$

řešením *Laplaceovy rovnice* $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$.

Derivováním podle parametru vypočtěte následující integrály:

3732. $\int_0^{\pi/2}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx$.

3733. $\int_0^\pi\ln(1-2a\cos x+a^2)dx$.

3734. $\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}dx$.

3735. $\int_0^{\pi/2}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{dx}{\cos x}$ $(|a|<1)$.

3736. Pomocí vztahu $\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=\int_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2}$ vypočtěte integrál $\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

3737. Pomocí věty o záměně pořadí integrace vypočtěte integrál

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\ \ (a>0,b>0).$$

3738. Vypočtěte následující integrály:

a) $\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$; b) $\int_0^1\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$ $(a>0,b>0)$.

3739. Nechť $E(k)$ a $F(k)$ jsou úplné eliptické integrály (viz úloha **3725**). Dokažte následující vztahy:

a) $\int\limits_0^k F(k)k\,dk = E(k) - k_1^2F(k)$; b) $\int\limits_0^k E(k)k\,dk = \frac{1}{3}[(1+k^2)E(k) - k_1^2F(k)]$,

kde $k_1^2 = 1 - k^2$.

3740. Dokažte vztah $\int\limits_0^x xJ_0(x)dx = xJ_1(x)$, kde $J_0(x)$ a $J_1(x)$ jsou Besselovy funkce indexu 0 a 1 (viz úloha **3726**).

§ 2. Neurčité integrály závislé na parametru. Stejnoměrná konvergence integrálů

1. **Definice stejnoměrné konvergence.** Konvergentní nevlastní integrál

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x,y)dx, \tag{1}$$

kde funkce $f(x,y)$ je spojitá na množině $a \le x < +\infty$, $y_1 < y < y_2$, nazýváme *stejnoměrně konvergentním* na intervalu (y_1, y_2), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $B = B(\varepsilon)$ tak, že pro každé $b \ge B$ platí

$$\left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon \quad (y_1 < y < y_2).$$

Stejnoměrná konvergence integrálu (1) je ekvivalentní stejnoměrné konvergenci všech řad tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} f(x,y)dx, \tag{2}$$

kde $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Jestliže integrál (1) konverguje stejnoměrně na intervalu (y_1, y_2), pak je na tomto intervalu spojitou funkcí parametru y.

2. **Bolzanovo-Cauchyovo kritérium konvergence.** Pro stejnoměrnou konvergenci integrálu (1) na intervalu (y_1, y_2) je nutné a stačí, aby ke každému $\varepsilon > 0$ existovalo číslo $B = B(\varepsilon)$ tak, že

$$\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x,y)dx\right| < \varepsilon \text{ pro } y_1 < y < y_2, \text{ jestliže } b' > B \text{ a } b'' > B.$$

3. **Weierstrassovo kritérium konvergence.** Pro stejnoměrnou konvergenci integrálu (1) stačí, aby nezávisle na parametru y existovala funkce $F(x)$ splňující podmínky

1) $|f(x,y)| \le F(x)$ pro $a \le x < +\infty$ a 2) $\int\limits_a^{+\infty} F(x)dx < +\infty$.

4. Analogická tvrzení platí pro nevlastní integrály nespojitých funkcí.

Určete obory konvergence následujících integrálů:

3741. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}dx$.

3742. $\displaystyle\int\limits_\pi^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx$.

3743. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x^q}{x^p}dx$.

3744. $\displaystyle\int\limits_0^{2}\frac{dx}{|\ln x|^p}$.

3745. $\displaystyle\int\limits_0^{1}\frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}dx$.

3746. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx \quad (p>0)$.

Porovnáním s konvergencí řad vyšetřete konvergenci následujících integrálů:

3747. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx$.

3748. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x} \quad (n>0)$.

3749. $\displaystyle\int\limits_\pi^{+\infty}\frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

3750. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx$.

3751. Bez použití negací formulujte tvrzení, že integrál $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ konverguje nestejnoměrně na daném intervalu (y_1, y_2).

3752. Dokažte, že jestliže integrál $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ konverguje a funkce $\varphi(x,y)$ je omezená a monotónní v proměnné x, pak integrál $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\varphi(x,y)dx$ konverguje stejnoměrně (na odpovídající množině).

3753. Dokažte, že stejnoměrně konvergentní integrál

$$I = \int\limits_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx \quad (0 < y < 1)$$

nelze shora odhadnout konvergentním integrálem nezávislým na parametru.

3754. Dokažte, že integrál $\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$ 1) konverguje stejnoměrně na libovolném intervalu $0 < a \le \alpha \le b$ a 2) konverguje nestejnoměrně na intervalu $0 \le \alpha \le b$.

3755. Dokažte, že Dirichletův integrál $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ 1) konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném intervalu $[a,b]$, který neobsahuje hodnotu $\alpha = 0$; 2) konverguje nestejnoměrně na každém uzavřeném intervalu $[a,b]$, který obsahuje hodnotu $\alpha = 0$.

3755.1 Vyšetřete, zda integrál $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ stejnoměrně konverguje na následujících intervalech: a) $1 < \alpha_0 \le \alpha < +\infty$; b) $1 < \alpha < +\infty$.

3755.2 Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci integrálu $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ pro $0 < \alpha < 1$.

3755.3 Dokažte, že integrál $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + 1}$ konverguje nestejnoměrně na intervalu $1 < \alpha < +\infty$.

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci následujících integrálů na zadaných intervalech:

3756. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x \, dx \ (1 < \alpha_0 \le \alpha < +\infty)$.

3757. $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx \ (a \le \alpha \le b)$.

3758. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2} dx \ (-\infty < \alpha < +\infty)$.

3759. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2 + 1} \ (0 \le \alpha < +\infty)$.

3760. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx \ (0 \le \alpha < +\infty)$.

3760.1 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} dx \ (0 \le p \le 10)$.

3761. $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos x}{x^p} dx \ (0 \le \alpha < +\infty)$, kde $p > 0$ je konstanta.

3762. $\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx \ (0 \le \alpha < +\infty)$.

3763. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx$: a) $a < \alpha < b$; b) $-\infty < \alpha < +\infty$.

3764. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x \, dy \ (-\infty < x < +\infty)$.

3765. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1 + x^p} dx \ (p \ge 0)$.

3765.1 Najděte číslo $b > 0$ tak, aby platilo $0 < \int_b^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^n} < \varepsilon$ pro $1{,}1 \le n \le 10$, kde $\varepsilon = 10^{-6}$.

3766. $\int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx$: a) $p \ge p_0 > 0$; b) $p > 0$ $(q > -1)$.

3767. $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \ (0 \le n < +\infty)$.

3768. $\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \frac{dx}{x^n} \ (0 < n < 2)$.

3769. $\int_0^2 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \ \left(|\alpha| < \frac{1}{2}\right)$.

3770. $\int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x - \alpha|}} dx \ (0 \le \alpha \le 1)$.

3771. Integrál *stejnoměrně konverguje pro danou hodnotu parametru*, jestliže konverguje stejnoměrně na nějakém okolí této hodnoty. Dokažte, že integrál $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha dx}{1 + \alpha^2 x^2}$ stejnoměrně konverguje pro každou hodnotu $\alpha \ne 0$ a konverguje, ale nikoli stejnoměrně, pro $\alpha = 0$.

3772. Lze provést limitní přechod v argumentu integrálu $\lim_{\alpha \searrow 0} \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$?

3773. Funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $(0, +\infty)$. Dokažte, že

$$\lim_{\alpha \searrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

3773.1 Dokažte, že je-li $f'(x)$ absolutně integrovatelná na intervalu $[a, +\infty]$, pak existuje $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3774. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,dx = 0$, je-li funkce $f(x)$ absolutně integrovatelná na intervalu $(0, +\infty)$.

3775. Dokažte, že jestliže jsou splněny následující podmínky: 1) $f(x,y) \rightrightarrows f(x,y_0)$ na každém omezeném intervalu (a,b) a 2) $|f(x,y)| \le F(x)$, kde $\int\limits_a^{+\infty} F(x)dx < +\infty$, pak

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty}\lim_{y\to y_0} f(x,y)dx.$$

3776. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int\limits_0^{+\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\right]dx$ pomocí limitního přechodu.

3776.1 Nechť $f(x)$ je spojitá a omezená funkce na intervalu $[0, +\infty)$. Dokažte, že

$$\lim_{y\to 0}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx = f(0).$$

3776.2 Najděte $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^n+1}$.

3777. Dokažte, že integrál $F(a) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2}dx$ je spojitou funkcí parametru a.

3777.1 Dokažte, že $F(a) = \int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{\alpha}{x}}{x^\alpha}dx$ je spojitou funkcí na intervalu $0<\alpha<1$.

3778. Najděte body nespojitosti funkce $F(a) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(1-a^2)x}{x}dx$. Sestrojte graf funkce $y = F(a)$.

Vyšetřete spojitost následujících funkcí na zadaných intervalech:

3779. $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{2+x^\alpha}$ pro $\alpha > 2$.

3780. $F(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ pro $\alpha > 0$.

3781. $F(\alpha) = \int\limits_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}dx$ pro $0<\alpha<2$.

3782. $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha}dx$ pro $0<\alpha<1$.

3783. $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty}\alpha e^{-x\alpha^2}dx$ pro $-\infty<\alpha<+\infty$.

§ 3. Derivace a integrování nevlastních integrálů závislých na parametru

1. **Derivace nevlastního integrálu podle parametru.** Jestliže jsou splněny následující podmínky: 1) funkce $f(x,y)$ a $f_y'(x,y)$ jsou spojité na množině $\{(x,y); a\le x<+\infty,\ y_1<y<y_2\}$; 2) integrál $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ konverguje; 3) integrál $\int\limits_a^{+\infty} f_y'(x,y)dx$ konverguje stejnoměrně na intervalu (y_1,y_2), pak

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} f_y'(x,y)dx$$

pro $y_1<y<y_2$ (*Leibnizovo pravidlo*).

2. **Integrace nevlastního integrálu podle parametru.** Jestliže 1) funkce $f(x,y)$ je spojitá pro $x\ge a$ a $y_1\le y\le y_2$; 2) integrál $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ konverguje stejnoměrně na omezeném uzavřeném intervalu $[y_1,y_2]$, pak

$$\int\limits_{y_1}^{y_2} dy\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} dx\int\limits_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy. \qquad (1)$$

Je-li $f(x,y)\ge 0$, pak vztah (1) platí i pro neomezený interval (y_1,y_2) za předpokladu, že vnitřní integrály rovnosti (1) jsou spojité a alespoň jedna její strana má smysl.

3784. Pomocí rovnosti $\int\limits_0^1 x^{n-1}dx = \frac{1}{n}$ $(n>0)$ vypočtěte integrál $\int\limits_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,dx$, kde m je přirozené číslo.

3785. Pomocí rovnosti $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$ $(a>0)$ vypočtěte integrál $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}$, kde n je přirozené číslo.

3786. Dokažte, že i když má Dirichletův integrál $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$ pro $\alpha\neq 0$ derivaci, nelze ji získat použitím Leibnizova pravidla.

NÁVOD: Použijte substituci $\alpha x = y$.

3787. Dokažte, že funkce $F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}dx$ je spojitá a diferencovatelná na intervalu $-\infty<\alpha<+\infty$.

3788. Pomocí rovnosti $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int\limits_a^b e^{-xy}dy$ vypočtěte integrál $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$ $(a>0,b>0)$.

3789. Dokažte *Frullaniův vzorec* $\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}$ $(a>0,b>0)$, kde $f(x)$ je spojitá funkce a integrál $\int\limits_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ má smysl pro libovolnou hodnotu $A>0$.

Pomocí Frullaniova vzorce vypočtěte následující integrály:

3790. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx$ $(a>0,b>0)$.

3791. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin ax-\sin bx}{x}dx$ $(a>0,b>0)$.

3792. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} ax-\operatorname{arctg} bx}{x}dx$ $(a>0,b>0)$.

Derivací podle parametru vypočtěte následující integrály:

3793. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx$ $(\alpha>0,\beta>0)$.

3794. $\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx$ $(\alpha>0,\beta>0)$.

3795. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx$ $(\alpha>0,\beta>0)$.

3796. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx$ $(\alpha>0,\beta>0)$.

Vypočtěte následující integrály:

3797. $\int\limits_0^{1}\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$ $(|\alpha|\le 1)$.

3798. $\int\limits_0^{1}\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $(|\alpha|\le 1)$.

3799. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$.

3800. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx$.

3801. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\alpha x\operatorname{arctg}\beta x}{x^2}dx$.

3802. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}dx$.

3803. Vypočtěte Eulerův-Poissonův integrál $I=\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ pomocí rovnosti

$$I^2=\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\int\limits_0^{+\infty}xe^{-x^2y^2}dy.$$

Pomocí hodnoty Eulerova-Poissonova integrálu vypočtěte:

3804. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2+2bx+c)}dx$ $(a>0,ac-b^2>0)$.

3805. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(a_1x^2+2b_1x+c_1)e^{-(ax^2+2bx+c)}dx$ $(a>0,ac-b^2>0)$.

3806. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}\cosh bx\,dx$ $(a>0)$.

3807. $\int\limits_0^{+\infty}e^{-(x^2+a^2/x^2)}dx$ $(a>0)$.

3808. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx$ $(\alpha>0,\beta>0)$.

4219. Vypočtěte *potenciál* homogenní koule s poloměrem R a hustotou ϱ_0, tj. vypočtěte integrál $u = \dfrac{\varrho_0^2}{2} \displaystyle\iiint\limits_{x_1^2+y_1^2+z_1^2 \le R^2} \iiint\limits_{x_2^2+y_2^2+z_2^2 \le R^2} \frac{dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}}$,

kde $r_{1,2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

4220. Vypočtěte n-rozměrný integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j + 2\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i + c\right\}} dx_1 dx_2 \dots dx_n$,

kde $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ $(a_{ij}=a_{ji})$ je pozitivně definitní kvadratická forma.

§ 11. Křivkové integrály

1. **Křivkový integrál prvního druhu.** Jestliže $f(x,y,z)$ je funkce definovaná a spojitá v bodech hladké křivky C:

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)\quad (t_0 \le t \le T) \tag{1}$$

a ds je diferenciál délky křivky, pak křivkový integrál prvního druhu definujeme vztahem

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_{t_0}^{T} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

Hodnota tohoto integrálu nezávisí na orientaci křivky C.

2. **Využití křivkového integrálu prvního druhu v mechanice.** Je-li $\varrho=\varrho(x,y,z)$ hustota v daném bodě (x,y,z) křivky C, pak *hmotnost křivky* C je rovna $M=\int_C \varrho(x,y,z)\,ds$.

Souřadnice těžiště (x_0,y_0,z_0) této křivky vypočteme pomocí integrálů

$$x_0=\frac{1}{M}\int_C x\varrho(x,y,z)\,ds,\ y_0=\frac{1}{M}\int_C y\varrho(x,y,z)\,ds,\ z_0=\frac{1}{M}\int_C z\varrho(x,y,z)\,ds.$$

3. **Křivkový integrál druhého druhu.** Jestliže jsou funkce $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ spojité ve všech bodech křivky (1), která má orientaci ve směru růstu parametru t, pak křivkový integrál druhého druhu definujeme vztahem

$$\int_C P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz =$$
$$=\int_{t_0}^{T}\{P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\}\,dt. \tag{2}$$

Když změníme orientaci křivky C, změní tento integrál znaménko. V mechanice křivkový integrál druhého druhu vyjadřuje práci síly $\{P,Q,R\}$ působící postupně ve všech bodech křivky C.

4. **Totální diferenciál.** Je-li $P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=du$, kde $u=u(x,y,z)$ je jednoznačná funkce na množině V, pak nezávisle na tvaru křivky C, která leží celá v množině V, platí

$$\int_C Pdx+Qdy+Rdz=u(x_2,y_2,z_2)-u(x_1,y_1,z_1),$$

kde (x_1,y_1,z_1) je počáteční bod a (x_2,y_2,z_2) koncový bod křivky. V nejjednodušším případě, kdy V je souvislá množina a funkce P, Q a R mají spojité parciální derivace prvního řádu, pak k tomu, aby platila výše uvedená rovnost, je nutné a stačí, aby byly splněny následující podmínky:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Je-li V standardní rovnoběžnostěn, lze funkci u vyjádřit vzorcem

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x} P(x,y,z)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)dy+\int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)dz+c,$$

kde (x_0,y_0,z_0) je nějaký pevný bod množiny V a c je libovolná konstanta. V mechanice má tento integrál význam práce potenciální síly.

Vypočtěte následující integrály prvního druhu:

4221. $\int_C (x+y)\,ds$, kde C je obvod trojúhelníka s vrcholy $(0,0)$, $(1,0)$ a $(0,1)$.

4222. $\int_C y^2\,ds$, kde C je oblouk cykloidy $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$.

4223. $\int_C (x^2+y^2)\,ds$, kde C je křivka $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$.

4224. $\int_C xy\,ds$, kde C je oblouk hyperboly $x=a\cosh t$, $y=a\sinh t$ $(0\le t\le t_0)$.

4225. $\int_C (x^{4/3}+y^{4/3})\,ds$, kde C je oblouk astroidy $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

4226. $\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$, kde C je sjednocení křivek $r=a$, $\varphi=0$, $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ (r a φ jsou polární souřadnice).

4227. $\int_C |y|\,ds$, kde C je lemniskata $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

4228. $\int_C x\,ds$, kde C je část logaritmické spirály $r=ae^{k\varphi}$ $(k>0)$, která se nachází uvnitř kruhu $r\le a$.

4229. $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, kde C je kružnice $x^2+y^2=ax$.

4230. $\int_C \frac{ds}{y^2}$, kde C je řetězovka $y=a\cosh\frac{x}{a}$.

Vypočtěte délky následujících prostorových křivek (s kladnými parametry):

4231. $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^3$ od bodu $(0,0,0)$ k bodu $(3,3,2)$.

4232. $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t$, $z=e^{-t}$ pro $0<t<+\infty$.

4233. $y=a\arcsin\frac{x}{a}$, $z=\frac{a}{4}\ln\frac{a-x}{a+x}$ od bodu $(0,0,0)$ k bodu (x_0,y_0,z_0).

4234. $(x-y)^2=a(x+y)$, $x^2-y^2=\frac{9}{8}z^2$ od bodu $(0,0,0)$ k bodu (x_0,y_0,z_0).

4235. $x^2+y^2=cz$, $\frac{y}{x}=\mathrm{tg}\frac{z}{c}$ od bodu $(0,0,0)$ k bodu (x_0,y_0,z_0).

4236. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $\sqrt{x^2+y^2}\cosh\left(\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\right)=a$ od bodu $(a,0,0)$ k bodu (x,y,z).

Vypočtěte následující křivkové integrály prvního druhu podél prostorových křivek:

4237. $\int_C (x^2+y^2+z^2)\,ds$, kde C je část šroubovice $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ $(0\le t\le 2\pi)$.

4238. $\int_C x^2\,ds$, kde C je kružnice $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$.

4239. $\int_C z\,ds$, kde C je kuželová šroubovice $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$ $(0\le t\le t_0)$.

4240. $\int_C z\,ds$, kde C je oblouk křivky $x^2+y^2=z^2$, $y^2=ax$ od bodu $(0,0,0)$ k bodu $(a,a,a\sqrt{2})$.

4241. Vypočtěte hmotnost křivky $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(a\ge b>0; 0\le t\le 2\pi)$, která má v bodě (x,y) hustotu $\varrho=|y|$.

4241.1 Vypočtěte hmotnost oblouku paraboly $y^2=2px$ $(0\le x\le p/2)$, jestliže se její hustota v bodě (x,y) rovná $|y|$.

4242. Vypočtěte hmotnost křivky $x=at$, $y=\frac{a}{2}t^2$, $z=\frac{a}{3}t^3$ $(0\le t\le 1)$ o hustotě, která se mění podle závislosti $\varrho=\sqrt{2y/a}$.

4243. Vypočtěte souřadnice těžiště oblouku homogenní křivky $y=a\cosh\frac{x}{a}$ od bodu $(0,a)$ k bodu (b,h).

4244. Najděte těžiště oblouku cykloidy $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le\pi)$.

4244.1 Vypočtěte statické momenty $S_y=\int_C x\,ds$, $S_x=\int_C y\,ds$ oblouku C astroidy $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ $(x\ge 0, y\ge 0)$ vzhledem k souřadnicovým osám.

4244.2 Vypočtěte moment setrvačnosti kružnice $x^2+y^2=a^2$ vzhledem k jejímu průměru.

4244.3 Vypočtěte polární momenty setrvačnosti $I_0=\int_C (x^2+y^2)\,ds$ vzhledem k bodu $(0,0)$ následujících křivek: a) obvodu C čtverce $\max\{|x|,|y|\}=a$; b) obvodu C rovnostranného trojúhelníku s vrcholy v polárních souřadnicích $(a,0)$, $\left(a,\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(a,\frac{4\pi}{3}\right)$.

4244.4 Vypočtěte průměrný poloměr astroidy $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ v polárních souřadnicích, tj. číslo r_0 $(r_0>0)$ určené vztahem $I_0=s r_0^2$, kde I_0 je polární moment setrvačnosti astroidy vzhledem k počátku (viz úloha **4244.3**) a s je její délka.

4245. Vypočtěte souřadnice těžiště obvodu sférického trojúhelníka $x^2+y^2+z^2=a^2$; $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

4246. Vypočtěte souřadnice těžiště homogenní křivky $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ $(-\infty<t\le 0)$.

4247. Vypočtěte momenty setrvačnosti jednoho závitu šroubovice $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=\frac{h}{2\pi}t$ $(0\le t\le 2\pi)$ vzhledem k souřadnicovým osám.

4248. Vypočtěte křivkový integrál druhého druhu $\int_{OA} x\,dy-y\,dx$, kde O je počátek soustavy souřadnic a bod A má souřadnice $(1,2)$, je-li: a) OA úsečka; b) OA parabola, která má osu souměrnosti y; c) OA lomená křivka tvořená úsečkou OB ležící v ose x a úsečkou BA, která je rovnoběžná s osou y.

4249. Vypočtěte integrál

$$\int_{OA} x\,dy+y\,dx$$

podél křivek a), b) a c) z předchozí úlohy.

Vypočtěte následující křivkové integrály druhého druhu podél křivek orientovaných ve směru růstu jejich parametru:

4250. $\int\limits_C (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, kde C je parabola $y=x^2$ $(-1\le x\le 1)$.

4251. $\int\limits_C (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$, kde C je křivka $y=1-|1-x|$ $(0\le x\le 2)$.

4252. $\oint\limits_C (x+y)dx+(x-y)dy$, kde C je elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ s orientací proti směru hodinových ručiček.

4253. $\int\limits_C (2a-y)dx+xdy$, kde C je oblouk cykloidy $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$.

4254. $\oint\limits_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, kde C je kružnice $x^2+y^2=a^2$ orientovaná proti směru hodinových ručiček.

4255. $\oint\limits_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, kde $ABCDA$ je obvod čtverce s vrcholy $A=(1,0)$, $B=(0,1)$, $C=(-1,0)$, $D=(0,-1)$.

4256. $\int\limits_{AB} dx\sin y+dy\sin x$, kde AB je úsečka spojující body $A=(0,\pi)$ a $B=(\pi,0)$.

4257. $\oint\limits_{OAO} dy\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-dx$, kde OA je část paraboly $y=x^2$ a AO je část přímky $y=x$.

Ověřte, že integrovaný výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce, a vypočtěte následující křivkové integrály:

4258. $\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy+ydx$.

4259. $\int\limits_{(0,1)}^{(3,-4)} xdx+ydy$.

4260. $\int\limits_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)dx+(x-y)dy$.

4261. $\int\limits_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy)$.

4262. $\int\limits_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)(dx+dy)$, kde $f(u)$ je spojitá funkce.

4263. $\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx-xdy}{x^2}$ podél křivek, které neprotínají osu y.

4264. $\int\limits_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ podél křivek, které neprocházejí počátkem soustavy souřadnic.

4265. $\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)dx+\psi(y)dy$, kde φ a ψ jsou spojité funkce.

4266. $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$.

4267. $\int\limits_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}$ podél křivek, které neprotínají přímku $y=x$.

4268. $\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$ podél křivek, které neprotínají osu y.

4269. $\int\limits_{(0,0)}^{(a,b)} e^x(\cos y\,dx-\sin y\,dy)$.

4270. Dokažte, že je-li $f(u)$ spojitá funkce a C je po částech hladká uzavřená křivka, pak $\oint\limits_C f(x^2+y^2)(xdx+ydy)=0$.

Najděte primitivní funkci z, je-li:

4271. $dz=(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$.

4272. $dz=\frac{ydx-xdy}{3x^2-2xy+3y^2}$.

4273. $dz=\frac{(x^2+2xy+5y^2)dx+(x^2-2xy+y^2)dy}{(x+y)^3}$.

4274. $dz=e^x[e^y(x-y+2)+y]dx+e^x[e^y(x-y)+1]dy$.

4275. $dz=\dfrac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^{m}}dx+\dfrac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n}\partial y^{m+1}}dy.$

4276. $dz=\dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)dx-\dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)dy$, kde $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

4277. Dokažte, že pro křivkový integrál platí následující odhad:

$$\left|\int_C Pdx+Qdy\right|\le LM,$$

kde L je délka křivky a $M=\max\sqrt{P^2+Q^2}$ na křivce C.

4278. Odhadněte integrál $I_R=\displaystyle\oint_{x^2+y^2=R^2}\frac{ydx-xdy}{(x^2+xy+y^2)^2}$. Dokažte, že $\lim\limits_{R\to\infty} I_R=0$.

Vypočtěte následující křivkové integrály podél prostorových křivek (soustava souřadnic je pravotočivá) :

4279. $\int_C (y^2-z^2)dx+2yzdy-x^2dz$, kde C je křivka $x=t,\ y=t^2, z=t^3\ (0\le t\le 1)$ orientovaná ve směru růstu parametru.

4280. $\int_C ydx+zdy+xdz$, kde C je jeden závit šroubovice $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt$ $(0\le t\le 2\pi)$ orientovaný ve směru růstu parametru.

4281. $\int_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, kde C je kružnice $x^2+y^2+z^2=a^2,\ y=x\,\mathrm{tg}\,\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$ orientovaná proti směru hodinových ručiček při pohledu ze strany kladných hodnot x.

4282. $\int_C y^2dx+z^2dy+x^2dz$, kde C je část Vivianiho křivky $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax\ (z\ge 0, a>0)$ orientovaná proti směru hodinových ručiček při pohledu ze strany kladných hodnot $x\ (x>a)$.

4283. $\int_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$, kde C je hranice části sféry $x^2+y^2+z^2=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0, z\ge 0$ orientovaná tak, že vnější strana plochy zůstává nalevo od oblouku křivky.

Vypočtěte následující křivkové integrály totálních diferenciálů:

4284. $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} xdx+y^2dy-z^3dz.$

4285. $\displaystyle\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx+xzdy+xydz.$

4286. $\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, kde bod (x_1,y_1,z_1) leží na sféře $x^2+y^2+z^2=a^2$ a bod (x_2,y_2,z_2) na sféře $x^2+y^2+z^2=b^2\ (a>0, b>0)$.

4287. $\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \varphi(x)dx+\psi(y)dy+\chi(z)dz$, kde φ,ψ,χ jsou spojité funkce.

4288. $\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz)$, kde f je spojitá funkce.

4289. $\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(xdx+ +ydy+zdz)$, kde f je spojitá funkce.

Najděte primitivní funkci u, je-li:

4290. $du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz.$

4291. $du=\left(1-\dfrac{1}{y}+\dfrac{y}{z}\right)dx+\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{x}{y^2}\right)dy-\dfrac{xy}{z^2}dz.$

4292. $du=\dfrac{(x+y-z)dx+(x+y-z)dy+(x+y+z)dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}.$

4293. Vypočtěte práci, kterou vykoná gravitační síla při přemístění tělesa o hmotnosti m z bodu (x_1,y_1,z_1) do bodu (x_2,y_2,z_2) (osa z má směr kolmo vzhůru).

4294. Vypočtěte práci síly pružnosti směřující k počátku soustavy souřadnic o velikosti úměrné vzdálenosti hmotného bodu od počátku, jestliže tento bod opíše ve směru proti hodinovým ručičkám čtvrtinu elipsy $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ v prvním kvadrantu.

4295. Vypočtěte práci přitažlivé síly $F=k/r^2$, kde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, působící na bod o jednotkové hmotnosti, který je přemístěn z bodu (x_1,y_1,z_1) do bodu (x_2,y_2,z_2).

§ 12. Greenova věta

1. **Souvislost křivkového integrálu s dvojným integrálem.** Nechť C je uzavřená a po částech hladká křivka, která je hranicí omezené souvislé množiny S a má orientaci takovou, že množina S je po levé straně při obíhání křivky, a nechť funkce $P=(x,y)$ a $Q=(x,y)$ jsou spolu se svými parciálními derivacemi $P_y'(x,y)$ a $Q_x'(x,y)$ spojité na množině S i na její hranici. Pak platí *Greenova věta*:

$$\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \qquad (1)$$

Rovnost (1) platí i pro omezenou množinu S vymezenou konečným počtem jednoduchých smyček, jestliže za její hranici C budeme považovat všechny hraniční křivky orientované tak, aby při jejich obíhání množina S zůstala po levé straně.

2. **Obsah plochy v třírozměrném prostoru.** Obsah plochy S vymezené jednoduchou a po částech hladkou smyčkou C je roven

$$S=\oint_C xdy=-\oint_C ydx=\frac{1}{2}\oint_C (xdy-ydx).$$

V tomto paragrafu, jestliže není stanoveno jinak, předpokládáme, že uzavřená křivka integrace je jednoduchá (neprotíná sebe sama) a že má orientaci takovou, aby množina, kterou vymezuje a která neobsahuje žádný nekonečně vzdálený bod, zůstala při jejím obíhání nalevo (obíhání v kladném směru).

4296. Pomocí Greenovy věty transformujte křivkový integrál

$$I=\oint_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]dy,$$

kde smyčka C je hranicí omezené plochy S.

4297. Pomocí Greenovy věty vypočtěte křivkový integrál

$$I=\oint_K (x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy,$$

kde K je obvod trojúhelníka ABC a křivka integrace probíhá vrcholy $A=(1,1)$, $B=(3,2)$, $C=(2,5)$ v kladném směru. Výsledek ověřte pomocí přímého výpočtu křivkového integrálu.

Pomocí Greenovy věty vypočtěte následující křivkové integrály:

4298. $\oint_C xy^2dy-x^2ydx$, kde C je kružnice $x^2+y^2=a^2$.

4299. $\oint_C (x+y)dx-(x-y)dy$, kde C je elipsa $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

4300. $\oint_C e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$, kde C je smyčka s kladnou orientací, která vymezuje množinu $0<x<\pi$, $0<y<\sin x$.

4301. $\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xydx+\sin 2xydy)$.

4302. O kolik se liší hodnoty křivkových integrálů

$$I_1=\int_{AB}(x+y)^2dx-(x-y)^2dy \text{ a } I_2=\int_{p(AB)}(x+y)^2dx-(x-y)^2dy,$$

kde AB je úsečka, která spojuje body $A=(1,1)$ a $B=(2,6)$, a $p(AB)$ je parabola se svislou osou souměrnosti, která prochází body A a B a počátkem soustavy souřadnic?

4303. Vypočtěte křivkový integrál

$$\int_{p(AO)}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy,$$

kde $p(AO)$ je horní půlkružnice $x^2+y^2=ax$, vedoucí z bodu $A=(a,0)$ do bodu $O=(0,0)$.

Návod: Doplňte křivku $p(AO)$ do uzavřené smyčky úsečkou OA na ose x.

4304. Vypočtěte křivkový integrál

$$\int_{p(AB)}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy,$$

kde $\varphi(y)$ a $\varphi'(y)$ jsou spojité funkce a $p(AB)$ je libovolná dráha spojující body $A=(x_1,y_1)$ a $B=(x_2,y_2)$, která společně s úsečkou BA vymezuje plochu o obsahu S.

4305. Najděte dvakrát spojitě diferencovatelné funkce $P=(x,y)$ a $Q=(x,y)$ tak, aby křivkový integrál $I=\oint_C P(x+\alpha,y+\beta)dx+Q(x+\alpha,y+\beta)dy$ pro libovolnou uzavřenou křivku C nezávisel na konstantách α a β.

4306. Jakou podmínku musí splňovat diferencovatelná funkce $F(x,y)$, aby křivkový integrál $\int_{p(AB)} F(x,y)(ydx+xdy)$ nezávisel na tvaru dráhy $p(AB)$ z bodu A do bodu B?

4307. Vypočtěte integrál $I=\oint_C \dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, kde C je jednoduchá uzavřená křivka s kladnou orientací, která neprochází počátkem soustavy souřadnic.

Návod: Uvažujte dva případy: 1) počátek soustavy souřadnic se nachází vně uzavřené křivky; 2) počátek souřadnic leží uvnitř plochy vymezené křivkou C.

Užitím křivkových integrálů vypočtěte obsahy ploch vymezených následujícími uzavřenými křivkami:

4308. Elipsou $x = a\cos t,\ y = b\sin t\ \ (0 \le t \le 2\pi)$.

4309. Astroidou $x = a\cos^3 t,\ y = b\sin^3 t\ \ (0 \le t \le 2\pi)$.

4310. Parabolou $(x+y)^2 = ax\ \ (a > 0)$ a osou x.

4311. Smyčkou Descartesova listu $x^3 + y^3 = 3axy\ \ (a > 0)$.

NÁVOD: Uvažujte parametrizaci $y = tx$.

4312. Lemniskatou $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

NÁVOD: Položte $y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi$.

4313. Křivkou $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ a osami souřadnic.

4314. Vypočtěte obsah plochy vymezené křivkou

$$(x+y)^{n+m+1} = ax^n y^m \quad (a > 0, n > 0, m > 0).$$

4315. Vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkou

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1 \quad (a > 0, b > 0, n > 0)$$

a osami souřadnic.

NÁVOD: Použijte parametrizaci $\frac{x}{a} = \cos^{2/n}\varphi$ a $\frac{y}{b} = \sin^{2/n}\varphi$.

4316. Vypočtěte obsah plochy vymezené křivkou

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1} \quad (a > 0, b > 0, n > 1)$$

a osami souřadnic.

4317. Vypočtěte obsah plochy vymezené smyčkou křivky

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c\left(\frac{x}{a}\right)^n\left(\frac{y}{b}\right)^n \quad (a > 0, b > 0, c > 0, n > 0).$$

4318. *Epicykloidou* nazveme křivku, kterou opisuje bod na kružnici o poloměru r valící se po vnější části nehybné kružnice o poloměru R. Vypočtěte obsah plochy, kterou vymezuje epicykloida, za předpokladu, že poměr $\frac{R}{r} = n$ je přirozené číslo. Vyšetřete speciální případ $r = R$ (kardioida).

4319. *Hypocykloidou* nazveme křivku, kterou opisuje bod na kružnici o poloměru r valící se po vnitřní části nehybné kružnice o poloměru R. Vypočtěte obsah plochy, kterou vymezuje hypocykloida, za předpokladu, že poměr $R/r = n$ je přirozené číslo $(n \ge 2)$. Vyšetřete speciální případ $r = R/4$ (astroida).

4320. Vypočtěte obsah části válcové plochy $x^2 + y^2 = ax$, kterou vymezuje plocha $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

4320.1 Dokažte, že objem tělesa, které vznikne rotací jednoduché uzavřené křivky C umístěné v horní polovině $y \ge 0$ kolem osy x, je roven $V = -\pi \oint_C y^2 dx$.

4321. Vypočtěte integrál $I = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2 + Y^2}$, kde $X = ax + by$, $Y = cx + dy$ a jednoduchá uzavřená křivka C obíhá počátek soustavy souřadnic $(ad - bc \ne 0)$.

4322. Vypočtěte integrál I z předchozí úlohy, jestliže $X = \varphi(x,y)$, $Y = \psi(x,y)$ a jednoduchá uzavřená křivka C obíhá počátek soustavy souřadnic, přičemž křivky $\varphi(x,y) = 0$ a $\psi(x,y) = 0$ se několikrát protínají uvnitř plochy vymezené křivkou C.

4323. Dokažte, že je-li C uzavřená křivka a $\boldsymbol{l}$ libovolný směrový vektor, pak $\oint_C \cos(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n})\,ds = 0$, kde $\boldsymbol{n}$ je vnější normálový vektor ke křivce C.

4324. Vypočtěte hodnotu integrálu $\oint_C [x\cos(\boldsymbol{n}, x) + y\cos(\boldsymbol{n}, y)]\,ds$, kde C je jednoduchá uzavřená křivka, která je hranicí omezené plochy S, a $\boldsymbol{n}$ je její vnější normálový vektor.

4325. Najděte $\lim\limits_{d(S)\to 0} \frac{1}{S} \oint_C (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\,ds$, kde S je plocha vymezená křivkou C, která obíhá bod (x_0, y_0), $d(S)$ je průměr plochy S, $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor vnější normály ke křivce C a $\boldsymbol{F}$ je spojitě diferencovatelný vektor na $S \cup C$.

§ 13. Využití křivkových integrálů ve fyzice

4326. Jakou silou přitahuje hmotnost M rovnoměrně rozložená na horní půlkružnici $x^2 + y^2 = a^2$, $y \ge 0$, bod o hmotnosti m, který je umístěn v počátku soustavy souřadnic?

4327. Vypočtěte *logaritmický potenciál jednoduché vrstvy* $u(x,y) = \oint_C \varkappa \ln\frac{1}{r}\,ds$, kde $\varkappa = \text{const}$ je její hustota, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ a C je kružnice $\xi^2 + \eta^2 = R^2$.

4328. Vyjádřete v polárních souřadnicích ϱ a φ logaritmické potenciály jednoduché vrstvy $I_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \ln\frac{1}{r}\,d\psi$ a $I_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \ln\frac{1}{r}\,d\psi$, kde r je vzdálenost mezi body (ϱ, φ) a $(1, \psi)$ a m je přirozené číslo.

4329. Vypočtěte *Gaussův integrál* $u(x,y)=\oint_C \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}ds$, kde $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ je délka vektoru $\boldsymbol{r}$, který spojuje bod (x,y) s bodem $M=(\xi,\eta)$ jednoduché uzavřené křivky C, a $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})$ je úhel mezi vektorem $\boldsymbol{r}$ a vnějším normálovým vektorem $\boldsymbol{n}$ ke křivce C v jejím bodě M.

4330. Vyjádřete v polárních souřadnicích ϱ a φ *logaritmické potenciály dvojité vrstvy*

$$K_1=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}d\psi,\quad K_2=\int_0^{2\pi}\sin m\psi\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}d\psi,$$

kde r je vzdálenost mezi bodem $A=(\varrho,\varphi)$ a proměnným bodem $M=(1,\psi)$, $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})$ je úhel mezi směrovým vektorem $AM=\boldsymbol{r}$ a vektorem průvodiče $OM=\boldsymbol{n}$ z bodu $O=(0,0)$ a m je přirozené číslo.

4331. Dvakrát diferencovatelnou funkci $u=u(x,y)$ nazveme *harmonickou*, jestliže vyhovuje rovnici $\Delta u\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$. Dokažte, že u je harmonickou funkcí tehdy a jen tehdy, když $\oint_C\frac{\partial u}{\partial n}ds=0$, kde C je libovolná uzavřená křivka a $\frac{\partial u}{\partial n}$ je derivace podle vnější normály k této křivce.

4332. Dokažte, že

$$\iint_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=-\iint_S u\,\Delta u\,dx\,dy+\oint_C u\frac{\partial u}{\partial n}ds,$$

kde hladká uzavřená křivka C je hranicí omezené plochy S.

4333. Dokažte, že funkce, která je harmonická uvnitř omezené množiny S a na její hranici C, je jednoznačně určená svými hodnotami na křivce C (viz úloha **4332**).

4334. Dokažte *druhou Greenovu větu* v rovině

$$\iint_S\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}dx\,dy=\oint_C\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}ds,$$

kde hladká křivka C je hranicí omezené plochy S a $\frac{\partial}{\partial n}$ je derivace ve směru vnější normály ke křivce C.

4335. Užitím druhé Greenovy věty dokažte, že jestliže $u=u(x,y)$ je harmonická funkce na uzavřené omezené množině S, pak

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\oint_C\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds,$$

kde C je hranice množiny S, $\boldsymbol{n}$ je vnější normálový vektor ke křivce C, (x,y) je vnitřní bod množiny S a $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ je vzdálenost mezi bodem (x,y) a bodem (ξ,η) na křivce C.

NÁVOD: Uvažujte bod (x,y) množiny S spolu s jeho nekonečně malým kruhovým okolím a použijte druhou Greenovu větu na zbylé části množiny S.

4336. Dokažte *větu o střední hodnotě* pro harmonickou funkci $u(M)=u(x,y)$ ve tvaru

$$u(M)=\frac{1}{2\pi R}\oint_C u(\xi,\eta)ds,$$

kde C je kružnice o poloměru R se středem v bodě M.

4337. Dokažte, že funkce $u(x,y)$, která je harmonická a nekonstantní na omezené uzavřené množině, nenabývá své maximální ani minimální hodnoty ve vnitřním bodě této množiny (*princip maxima*).

4338. Dokažte *Riemannovu rovnost*

$$\iint_S\begin{vmatrix}L[u] & M[v]\\ u & v\end{vmatrix}dx\,dy=\oint_C P\,dx+Q\,dy,$$

kde $L[u]=\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu$, $M[v]=\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}-a\frac{\partial v}{\partial x}-b\frac{\partial v}{\partial y}+cv$ (a,b,c jsou konstanty), P a Q jsou funkce a křivka C je hranicí omezené množiny S.

4339. Nechť $u=u(x,y)$ a $v=v(x,y)$ jsou složky rychlosti stacionárního toku tekutiny. Vypočtěte množství tekutiny, které vyteče za jednotku času plochou S vymezenou křivkou C (tj. rozdíl mezi množstvím kapaliny, která vyteče a přiteče danou plochou). Jakou rovnici splňují funkce u a v, jestliže je tekutina nestlačitelná a v ploše S nejsou žádné zdroje ani odtoky kapaliny?

4340. Podle Biotova-Savartova-Laplaceova zákona indukuje elektrický proud i, který protéká vodičem délky ds, v bodě $M=(x,y,z)$ magnetické pole o intenzitě

$$d\boldsymbol{H}=ki\frac{(\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{s})}{r^3},$$

kde $\boldsymbol{r}$ je vektor, který spojuje element $d\boldsymbol{s}$ s bodem M a k je příslušný koeficient úměrnosti. Najděte jednotlivé projekce H_x, H_y, H_z intenzity $\boldsymbol{H}$ v bodě M v případě vodiče tvaru smyčky C.

§ 14. Plošné integrály

1. **PLOŠNÝ INTEGRÁL PRVNÍHO DRUHU.** Jestliže S je po částech hladká oboustranná plocha

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v)\quad ((u,v)\in\Omega) \tag{1}$$

a $f(x,y,z)$ je funkce definovaná a spojitá ve všech bodech plochy S, pak definujeme *plošný integrál prvního druhu* předpisem

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_\Omega f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv, \tag{2}$$

kde $E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$, $G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$, $F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$.

Speciálně, jestliže má rovnice plochy S tvar $z=z(x,y)$ $((x,y)\in\sigma)$, kde $z(x,y)$ je jednoznačná spojitě diferencovatelná funkce, pak platí

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_\sigma f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Tento integrál nezávisí na volbě strany plochy S. Jestliže budeme funkci $f(x,y,z)$ považovat za hustotu plochy S v bodě (x,y,z), pak má integrál (2) význam hmotnosti této plochy.

2. **PLOŠNÝ INTEGRÁL DRUHÉHO DRUHU.** Nechť S je hladká oboustranná plocha, S^+ je její strana, kterou charakterizuje směr normálového vektoru $\boldsymbol{n}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ a nechť $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$ a $R=R(x,y,z)$ jsou tři funkce definované a spojité na ploše S. *Plošný integrál druhého druhu* definujeme jako

$$\iint_{S^+} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS. \tag{3}$$

Jestliže je plocha S zadána v parametrickém tvaru (1), pak směrové kosiny normálového vektoru $\boldsymbol{n}$ mají tvar

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

kde $A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$, $B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$, $C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ a znaménko před výrazem se určuje způsobem odpovídajícím zvolenému směru normálového vektoru. V případě přechodu na druhou stranu S^- plochy S se mění znaménko integrálu (3).

4341. Jak se liší hodnoty plošných integrálů

$$I_1=\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,dS \text{ a } I_2=\iint_P (x^2+y^2+z^2)\,dP,$$

je-li S sféra $x^2+y^2+z^2=a^2$ a P povrch osmistěnu $|x|+|y|+|z|=a$ vepsaného do této sféry?

4342. Vypočtěte $\iint_S z\,dS$, kde S je část plochy $x^2+z^2=2az$ $(a>0)$ vymezená plochou $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Vypočtěte následující plošné integrály prvního druhu:

4343. $\iint_S (x+y+z)\,dS$, kde S je plocha $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\ge 0$.

4344. $\iint_S (x^2+y^2)\,dS$, kde S je povrch tělesa $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$.

4345. $\iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, kde S je povrch čtyřstěnu $x+y+z\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

4346. $\iint_S |xyz|\,dS$, kde S je část plochy $z=x^2+y^2$, kterou vymezuje rovina $z=1$.

4347. $\iint_S \frac{dS}{h}$, kde S je elipsoid a h je vzdálenost jeho středu od tečné roviny v bodě dS elipsoidu.

4348. $\iint_S z\,dS$, kde S je část šroubové plochy $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$ $(0<u<a; 0<v<2\pi)$.

4349. $\iint_S z^2\,dS$, kde S je část povrchu kužele $x=r\cos\varphi\sin\alpha$, $y=r\sin\varphi\sin\alpha$, $z=r\cos\alpha$ $(0\le r\le a;\ 0\le\varphi\le 2\pi)$ a α je konstanta $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

4350. $\iint_S (xy+yz+zx)\,dS$, kde S je část kuželové plochy $z=\sqrt{x^2+y^2}$, kterou vymezuje plocha $x^2+y^2=2ax$.

4351. Dokažte *Poissonův vzorec*

$$\iint_S f(ax+by+cz)\,dS=2\pi\int_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)du,$$

kde S je sféra $x^2+y^2+z^2=1$.

4352. Vypočtěte hmotnost části paraboloidu $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ $(0\le z\le 1)$ o hustotě, která se mění podle závislosti $\varrho=z$.

4352.1 Vypočtěte hmotnost polosféry $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\ge 0)$ o hustotě, která je v každém jejím bodě (x,y,z) rovna z/a.

4352.2 Vypočtěte statické momenty homogenní trojúhelníkové destičky $x+y+z=a$ $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$ vzhledem k souřadnicovým rovinám.

4353. Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní sféry $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\ge 0)$ o hustotě ϱ_0 vzhledem k ose z.

4354. Vypočtěte moment setrvačnosti homogenního kuželového pláště

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0 \quad (0\le z\le b)$$

o hustotě ϱ_0 vzhledem k přímce $y=0,\ z=b$.

4355. Vypočtěte souřadnice těžiště části homogenní plochy $z=\sqrt{x^2+y^2}$, kterou vymezuje plocha $x^2+y^2=ax$.

4356. Vypočtěte souřadnice těžiště homogenní plochy $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(x\ge 0; y\ge 0; x+y\le a)$.

4356.1 Vypočtěte polární momenty setrvačnosti

$$I_0=\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,dS$$

následujících ploch S: a) povrchu krychle $\max\{|x|,|y|,|z|\}=a$; b) celého povrchu válce $x^2+y^2\le R^2$; $0\le z\le H$.

4356.2 Vypočtěte momenty setrvačnosti trojúhelníkové destičky $x+y+z=1$ $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$ vzhledem k souřadnicovým rovinám.

4357. Jakou silou přitahuje homogenní komolá kuželová plocha $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=r$ $(0\le\varphi\le 2\pi, 0<b\le r\le a)$ o hustotě ϱ_0 bod o hmotnosti m, který se nachází ve vrcholu odpovídajícího kužele?

4358. Vypočtěte potenciál homogenní sférické plochy $S: x^2+y^2+z^2=a^2$ o hustotě ϱ_0 vzhledem k bodu (x_0,y_0,z_0), tj. vypočtěte integrál

$$u=\iint_S \frac{\varrho_0\,dS}{r},$$

kde $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

4359. Vypočtěte $F(t)=\iint\limits_{x+y+z=t} f(x,y,z)\,dS$, kde

$$f(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2 & \text{pro } x^2+y^2+z^2\le 1,\\ 0 & \text{pro } x^2+y^2+z^2>1.\end{cases}$$

Sestrojte graf funkce $u=F(t)$.

4360. Vypočtěte integrál $F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z)\,dS$, kde

$$f(x,y,z)=\begin{cases}x^2+y^2 & \text{pro } z\ge\sqrt{x^2+y^2},\\ 0 & \text{pro } z<\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$$

4361. Vypočtěte integrál $F(x,y,z,t)=\iint_S f(\xi,\eta,\zeta)\,dS$, kde S je sféra $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=t^2$ o proměnném poloměru a

$$f(\xi,\eta,\zeta)=\begin{cases}1 & \text{pro } \xi^2+\eta^2+\zeta^2<a^2,\\ 0 & \text{pro } \xi^2+\eta^2+\zeta^2\ge a^2,\end{cases}$$

za předpokladu, že $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>a>0$.

Vypočtěte následující plošné integrály druhého druhu:

4362. $\iint_S (x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy)$, kde S je vnější strana sféry $x^2+y^2+z^2=a^2$.

4363. $\iint_S f(x)\,dy\,dz+g(y)\,dz\,dx+h(z)\,dx\,dy$, kde $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ jsou spojité funkce a S je vnější strana povrchu rovnoběžnostěnu $0\le x\le a$; $0\le y\le b$; $0\le z\le c$.

4364. $\iint_S (y-z)\,dy\,dz+(z-x)\,dz\,dx+(x-y)\,dx\,dy$, kde S je vnější strana kuželové plochy $x^2+y^2=z^2$ $(0\le z\le h)$.

4365. $\iint_S \left(\frac{dy\,dz}{x}+\frac{dz\,dx}{y}+\frac{dx\,dy}{z}\right)$, kde S je vnější strana elipsoidu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

4366. $\iint_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$, kde S je vnější strana sféry $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

§ 15. Stokesova věta

Jestliže $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ jsou spojitě diferencovatelné funkce a C je jednoduchá uzavřená a po částech hladká křivka, která je hranicí omezené a po částech hladké oboustranné plochy S, pak platí *Stokesova věta*

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_S \begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS,$$

kde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ jsou směrové kosiny normálového vektoru k ploše S orientované tak, aby křivka C obíhala proti směru hodinových ručiček (pro pravotočivou soustavu souřadnic).

4367. Užitím Stokesovy věty vypočtěte křivkový integrál

$$\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz,$$

kde C je kružnice $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$ orientovaná proti směru hodinových ručiček při pohledu z kladné části osy x. Výsledek ověřte přímým výpočtem.

4368. Vypočtěte integrál

$$\int_{p(AB)} (x^2-yz)\,dx + (y^2-xz)\,dy + (z^2-xy)\,dz$$

podél části šroubovice $x=a\cos\varphi$, $y=a\sin\varphi$, $z=\frac{h}{2\pi}\varphi$ od bodu $A=(a,0,0)$ k bodu $B=(a,0,h)$.

NÁVOD: Doplňte křivku $p(AB)$ úsečkou a použijte Stokesovu větu.

4369. Nechť C je uzavřená křivka, která leží v rovině $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ jsou směrové kosiny normálového vektoru roviny) a která vymezuje plochu S. Vypočtěte

$$\oint_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

přičemž křivka C je kladně orientována.

Užitím Stokesovy věty vypočtěte následující integrály:

4370. $\oint_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, kde C je elipsa $x=a\sin^2 t$, $y=2a\sin t\cos t$, $z=a\cos^2 t$ $(0\le t\le\pi)$ orientovaná ve směru růstu parametru t.

4371. $\oint_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, kde C je elipsa $x^2+y^2=a^2$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ $(a>0, h>0)$ orientovaná proti směru hodinových ručiček vzhledem ke kladné části osy x.

4372. $\oint_C (y^2+z^2)\,dx + (x^2+z^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz$, kde C je křivka $x^2+y^2+z^2=2Rx$, $x^2+y^2=2rx$ $(0<r<R,\ z>0)$, kterou orientujeme tak, že nejmenší část vnější sférické plochy $x^2+y^2+z^2=2Rx$, kterou tato křivka vymezuje, zůstává po levé straně.

4373. $\oint_C (y^2-z^2)\,dx + (z^2-x^2)\,dy + (x^2-y^2)\,dz$, kde C je řez povrchu krychle $0\le x\le a$, $0\le y\le a$, $0\le z\le a$ rovinou $x+y+z=\frac{3}{2}a$ s orientací proti směru hodinových ručiček vzhledem ke kladné části osy x.

4374. $\oint_C y^2z^2\,dx + x^2z^2\,dy + x^2y^2\,dz$, kde C je uzavřená křivka $x=a\cos t$, $y=a\cos 2t$, $z=a\cos 3t$ s orientací ve směru růstu parametru t.

4375. Dokažte, že funkce $W(x,y,z)=ki\iint_S \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}\,dS$ ($k=$const), kde S je plocha vymezená křivkou C, $\boldsymbol{n}$ je normálový vektor plochy S a $\boldsymbol{r}$ je vektor průvodiče, který spojuje bod prostoru (x,y,z) s proměnným bodem (ξ,η,ζ) křivky C, je potenciálem magnetického pole H, které indukuje elektrický proud i protékající křivkou C (viz úloha **4340**).

§ 16. Gaussova-Ostrogradského věta

Nechť S je po částech hladká plocha, která je hranicí tělesa V, a $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ jsou funkce spojité spolu se svými parciálními derivacemi prvního řádu na množině $V\cup S$. Pak platí *Gaussova-Ostrogradského věta*

$$\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

kde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ jsou směrové kosiny vnějšího normálového vektoru plochy S.

Pomocí Gaussovy-Ostrogradského věty transformujte následující plošné integrály (předpokládáme, že hladká plocha S vymezuje těleso V konečného objemu a $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ jsou směrové kosiny vnějšího normálového vektoru plochy S):

4376. $\iint_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy$.

4377. $\iint_S yz\,dy\,dz + zx\,dz\,dx + xy\,dx\,dy$.

4378. $\iint_S \frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dS$.

4379. $\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS$.

4380. $\iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS$.

4381. Dokažte, že je-li S uzavřená jednoduchá plocha a $\boldsymbol{l}$ libovolný konstantní vektor, pak $\iint\limits_S \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})dS=0$, kde $\boldsymbol{n}$ je vnější normálový vektor plochy S.

4382. Dokažte, že objem tělesa, které vymezuje plocha S, je roven $V=\frac{1}{3}\iint\limits_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$, kde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ jsou směrové kosiny vnějšího normálového vektoru plochy S.

4383. Dokažte, že objem kužele vymezeného hladkou kuželovou plochou $F(x,y,z)=0$ a rovinou $Ax+By+Cz+D=0$ je roven $V=\frac{1}{3}SH$, kde S je obsah podstavy kužele, která leží v dané rovině, a H je jeho výška.

4384. Vypočtěte objem tělesa vymezeného plochami $z=\pm c$ a $x=a\cos u\cos v+b\sin u\sin v$, $y=a\cos u\sin v-b\sin u\cos v$, $z=c\sin u$.

4385. Vypočtěte objem tělesa vymezeného plochou $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=-u+a\cos v$ $(u\ge 0)$ a rovinami $x=0$, $z=0$ $(a>0)$.

4385.1 Vypočtěte objem tělesa, jehož hranicí je torus $x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi$, $y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi$, $z=a\sin\psi$ $(0<a\le b)$.

4386. Dokažte platnost vzorce
$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(x,y,z,t)\,dx\,dy\,dz\right\}=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z,t)\,dS+\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}\frac{\partial f}{\partial t}dx\,dy\,dz\quad (t>0).$$

Pomocí Gaussovy-Ostrogradského věty vypočtěte následující plošné integrály:

4387. $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, kde S je vnější strana pláště krychle $0\le x\le a$, $0\le y\le a$, $0\le z\le a$.

4388. $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, kde S je vnější strana sféry $x^2+y^2+z^2=a^2$.

4389. $\iint\limits_S (x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x+y)dxdy$, kde S je vnější strana plochy $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$.

4390. Vypočtěte $\iint\limits_S (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$, kde S je část kuželové plochy $x^2+y^2=z^2$ $(0\le z\le h)$ a $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ jsou směrové kosiny normálového vektoru této plochy.

NÁVOD: Uvažujte navíc část roviny $z=h$, $x^2+y^2\le h^2$.

4391. Dokažte rovnost
$$\iiint\limits_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}=\frac{1}{2}\iint\limits_S \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})dS,$$
kde S je uzavřená plocha, která vymezuje těleso V, $\boldsymbol{n}$ je vnější normálový vektor plochy S v jejím bodě (ξ,η,ζ), $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$ a $\boldsymbol{r}$ je vektor průvodiče spojujícího bod (x,y,z) s bodem (ξ,η,ζ).

4392. Vypočtěte *Gaussův integrál*
$$I(x,y,z)=\iint\limits_S \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}dS,$$
kde S je jednoduchá uzavřená hladká plocha, která vymezuje těleso V, $\boldsymbol{n}$ je vnější normálový vektor plochy S v bodě (ξ,η,ζ), $\boldsymbol{r}$ je vektor průvodiče spojujícího bod (x,y,z) s bodem (ξ,η,ζ) a $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$. Uvažujte dva případy: a) těleso vymezené plochou S neobsahuje bod (x,y,z); b) těleso vymezené plochou S bod (x,y,z) obsahuje.

4393. Dokažte, že je-li $\Delta u\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$ a S je hladká plocha, která vymezuje těleso V o konečném objemu, pak platí následující vztahy:

a) $\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}dS=\iiint\limits_V \Delta u\,dx\,dy\,dz$;

b) $\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS=\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz+\iiint\limits_V u\Delta u\,dx\,dy\,dz$,

kde u je funkce spojitá na množině $V\cup S$ spolu se svými parciálními derivacemi do druhého řádu včetně a $\frac{\partial u}{\partial n}$ je její derivace podle vnější normály k ploše S.

4394. Dokažte *druhou Greenovu větu* v prostoru:
$$\iiint\limits_V \begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}dx\,dy\,dz=\iint\limits_S \begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}dS,$$
kde těleso V je vymezeno plochou S, $\boldsymbol{n}$ je směrový vektor vnější normály plochy S a funkce $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$ jsou dvakrát diferencovatelné na množině $V\cup S$.

4395. Funkce $u=u(x,y,z)$, která má na nějaké množině spojité derivace do druhého řádu včetně, se nazývá *harmonickou* na této množině, jestliže
$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0.$$

Dokažte, že jestliže je u harmonická funkce na omezené uzavřené množině V, která je vymezena hladkou plochou S, pak platí následující vztahy:

a) $\displaystyle\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}dS=0$; b) $\displaystyle\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz=\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS$,

kde $\boldsymbol{n}$ je vnější normálový vektor plochy S. Pomocí vztahu b) dokažte, že harmonická funkce na množině V je jednoznačně určena hodnotami na její hranici S.

4396. Dokažte, že je-li funkce $u=u(x,y,z)$ harmonická na omezené uzavřené množině V, která je vymezena hladkou plochou S, pak

$$u(x,y,z)=\ =\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left[u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS,$$

kde $\boldsymbol{r}$ je vektor průvodiče spojujícího vnitřní bod (x,y,z) množiny V s bodem (ξ,η,ζ) plochy S, $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$ a $\boldsymbol{n}$ je vnější normálový vektor plochy S v jejím bodě (ξ,η,ζ).

4397. Dokažte, že je-li funkce $u=u(x,y,z)$ harmonická uvnitř sféry S o poloměru R a středu v bodě (x_0,y_0,z_0), pak

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_S u(x,y,z)\,dS \quad (\textit{věta o střední hodnotě}).$$

4398. Dokažte, že funkce $u=u(x,y,z)$, která je spojitá na omezené uzavřené množině V a harmonická uvnitř této množiny, nenabývá své maximální ani minimální hodnoty ve vnitřním bodě, pokud není identicky konstantní funkcí (*princip maxima*).

4399. Těleso V bylo ponořeno do kapaliny. Pomocí Pascalova zákona dokažte, že těleso je nadlehčováno silou orientovanou vzhůru, jejíž velikost je rovna tíze kapaliny stejného objemu, jako je objem tělesa (*Archimedův zákon*).

4400. Nechť S_t je koule $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=t^2$ o proměnném poloměru a nechť $f(\xi,\eta,\zeta)$ je spojitá funkce. Dokažte, že funkce

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_t}\frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{t}dS_t$$

je řešením *vlnové rovnice* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ s počátečními podmínkami $u\Big|_{t=0}=0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=f(x,y,z)$.

NÁVOD: Vyjádřete derivaci $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ pomocí trojného integrálu.

§ 17. Základy vektorové analýzy a teorie pole

1. **GRADIENT.** Jestliže $u(\boldsymbol{r})=u(x,y,z)$, kde $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, je spojitě diferencovatelné skalární pole, pak jeho *gradientem* nazveme vektor

$$\operatorname{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

neboli $\operatorname{grad}u=\nabla u$, kde $\nabla=\boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$. Gradient pole u má v bodě (x,y,z) směr normálového vektoru *ekvipotenciální plochy* $u(x,y,z)=C$, která tímto bodem prochází. Velikost tohoto vektoru je

$$|\operatorname{grad}u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

a jeho směr je směrem největšího spádu pole u.

Derivace pole u ve směru $\boldsymbol{l}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ má tvar

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\operatorname{grad}u\,\boldsymbol{l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

2. **DIVERGENCE A ROTACE VEKTOROVÉHO POLE.** Je-li $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})=a_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+a_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+a_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$ spojitě diferencovatelné *vektorové pole*, pak skalár

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\nabla\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

nazýváme *divergencí* tohoto pole. Vektor

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$$

nazýváme *rotací* vektorového pole $\boldsymbol{a}$.

3. **TOK VEKTORU PLOCHOU.** Jestliže vektor $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ určuje nějaké vektorové pole na množině Ω, pak *tokem vektoru danou plochou* S ležící v množině Ω daným směrem, který charakterizuje normálový vektor $\boldsymbol{n}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, nazýváme integrál

$$\iint\limits_S a_n\,dS=\iint\limits_S(a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)\,dS,$$

kde $a_n=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}$ je projekce vektoru do směru normálového vektoru. *Gaussova-Ostrogradského věta* má ve vektorovém zápisu tvar

$$\iint\limits_S a_n\,dS=\iiint\limits_V \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,dx\,dy\,dz,$$

kde S je plocha, která vymezuje těleso V a $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vnější normálový vektor plochy S.

4. **CIRKULACE VEKTORU.** *Křivkovým integrálem* vektoru $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ na nějaké křivce C (*práce pole*), nazýváme hodnotu