5. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1. Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ a $\rho = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$. Pak uvedená řada konverguje absolutně pro $|z-z_0| < \rho$, diverguje pro $|z-z_0| > \rho$.

Pro libovolné kladné $r < \rho$ konverguje stejnoměrně pro $|z-z_0| \leq r$.

Věta 2. Pro řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}$ existuje číslo $\rho \in [0, \infty]$ takové, že tato řada konverguje absolutně na množině $K = \{z; |z-z_0| > \rho\}$ a stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině K.

Platí $\rho = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

Definice 3. *Laurentova řada* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ se definuje rovností

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n}.$$

První část Laurentovy řady se nazývá *regulární část*, druhá se nazývá *hlavní část.*

Laurentova řada konverguje, konvergují-li obě její části.

Věta 4. Pro Laurentovu řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ existují čísla $0 \leq r \leq R \leq \infty$ tak, že řada konverguje absolutně na množině $M = \{z, r < |z-z_0| < R$ a stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině M.

Součtem této řady je holomorfní funkce v mezikruží M, její derivace a primitivní funkce se získají derivováním a integrováním řady člen po členu.

Věta 5. Nechť $0 \leq r \leq R \leq \infty$ a funkce f je holomorfní v mezikruží M o středu z_0 a poloměrech r, R. Potom

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

pro nějaká $a_n \in \mathbb{C}$ a všechna $z \in M$.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z,$$

kde φ je libovolná jednoduše uzavřená křivka ležící v mezikruží M a obsahující bod z_0 ve svém vnitřku.

Definice 6. Bod uzávěru definičního oboru funkce f se nazývá *singulární*, jestliže buď f není v tomto bodě definovaná, nebo v tomto bodě není holomorfní.

Singulární bod $w \in \mathbb{C}$ funkce $f$se nazývá *izolovaný singulární bod* (izolovaná singularita), jestliže existuje okolí U bodu w tak, že f je holomorfní na množině $U \setminus w$.

Definice 7. Nechť w je izolovaná singularita funkce f a $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-w)^n$ je Laurentova řada funkce f. Singularita ve w se nazývá

1. *odstranitelná*, jestliže $a_n = 0$ pro všechna záporná n
2. *pól řádu* k, jestliže $a_k \neq 0$ a $a_n 0$ pro všechna $n < -k$
3. *podstatná*, jestliže $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho záporných n.

Věta 8. Nechť w je izolovaná singularita funkce f

1. v bodě w je odstranitelná singularita, právě když $\lim_{z\to w} f(z) \in \mathbb{C}$
2. v bodě w je pól řádu , právě když $\lim_{z\to w} f(z) = \infty$
3. v bodě w je podstatná singularita, právě když $\lim_{z\to w} f(z)$ neexistuje.

Věta 9. Buď $a \in \mathbb{C}$.

1. Buď f holomorfní v a, g ať má v a jednoduchý pól. Potom
$$\operatorname{res}_a(fg) = f(a) \operatorname{res}_a(g).$$
2. Nechť f, g, jsou holomorfní v a, g ať má v a jednoduchý kořen. Pak
$$\operatorname{res}_a\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(a)}{g'(a)}$$
3. Ať f má v a pól násobnosti $n \in \mathbb{N}$. Pak
$$\operatorname{res}_a f = \lim_{z\to a} \frac{1}{(n-1)!}[(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

Příklady

1. Rozviňte fuknci $f(z)$ v bodě z_0
   (a) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$, $z_0 = 0$
   (b) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$, $z_0 = 1$
   (c) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$, $z_0 = \infty$
   (d) $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$, $z_0 = -2$
   (e) $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$, $z_0 = -1$
   (f) $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$, $z_0 = 1$
   (g) $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$, $z_0 = 0$ na mezikruží
   (h) $f(z) = z^2 e^{1/z}$, $z_0 = \infty$

2. Najděte póly funkce $f(z)$ a určete v nich rezidua

   (a) $f(z) = \frac{1}{z - z^3}$

   (b) $f(z) = \frac{1}{z^5 - 4z^3}$

   (c) $f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$

3. Najděte rezidua funkce $f(z)$ ve všech jejích singulárních bodech

   (a) $f(z) = \frac{z+1}{z^2 + 2z + 2}$

   (b) $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2 + 9)}$