

## Příklady na Laplaceovu transformaci

Na zápočet je třeba získat alespoň 15 bodů z Laplaceovy transformace (Fourierova nebude u zkoušky, tedy ji nebudeme již dále ani procvičovat). Pokud budete mít pouze  $n$  bodů, spočtete 15 –  $n$  příkladů dle vlastního výběru. Příklady na diferenciální rovnice ještě přibudou.

### 1 Teorie

**Definice 1.** Nechť  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce. Její *Laplaceovou transformací* rozumíme funkci

$$L(f)(x) := \int_0^{\infty} f(t)e^{-xt} dt,$$

kde  $x$  je reálné číslo. (Lze ji definovat i pro čísla komplexní, čehož budeme občas využívat.)

**Věta 2** (Základní věta kalkulu). Nechť  $f$  je spojitá reálná funkce definovaná na uzavřeném intervalu  $[a, b]$ . Nechť  $F$  je její neurčitý integrál na  $[a, b]$ . Pak

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

**Definice 3.** Vezměme pro  $a > 0$  funkci

$$f_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}; & 0 \leq t \leq a; \\ 0; & t > a, \end{cases}$$

Limita  $\lim_{a \rightarrow 0^+} f_a$  se nazývá *Diracova delta funkce*  $\delta_0(t)$ . Má hodnotu  $\infty$  v 0 a 0 jinde.

$$L(\delta(x)) = 1.$$

**Definice 4.** *Konvoluce* na  $(0, \infty)$  dvou funkcí  $f$  a  $g$  je funkce

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(y)g(t-y)dy.$$

Zřejmě  $f * g$  existuje, pokud jsou obě funkce  $f, g$  po částech spojitě na  $(0, \infty)$ .

**Věta 5.** Nechť  $f$  a  $g$  jsou po částech spojitě a exponenciálně omezené na  $(0, \infty)$ . Pak

$$L(f * g) = L(f)L(g)$$

.

**Věta 6.** Nechť  $g$  je holomorfní funkce v  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$  a existují  $k, p > 0$  tak, že  $|g(z)| \leq k|z|^{-p}$  pro dostatečně velká  $|z|$ . Potom

$$L_{-1}(g(z))(s) = \sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{z_i}(g(z)e^{xz}).$$

## 2 Příklady

1. Spočtete Laplaceovu transformaci následujících funkcí

(a)  $-3 \sin 3t$  (zderivujte  $\cos 3t$ )

(b)  $\cos(3t - \pi)u(3t - \pi)$  (posunutí a násobení)

(c)

$$f(t) = \begin{cases} te^{2t}; & 0 \leq t \leq 2; \\ t^4; & 2 < t < 5 \end{cases}$$

(Skoková funkce)

(d)

$$f(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du$$

(e)

$$f(t) = \begin{cases} \sin t; & 0 < t < \pi; \\ 0; & \pi < t < 2\pi, \end{cases}$$

periodicky rozšířená s periodou  $2\pi$ .

(f)  $\delta(t - 2)$

2. Udělejte zpětnou Laplaceovu transformaci následujících funkcí

(a)  $\frac{3s}{s^2+16} + \frac{5}{s^2+4}$

(b)  $\frac{1}{(s-1)^2+4}$  (posunutí)

(c)  $\frac{e^{-\pi s/3}}{s^2+1}$  (Skoková funkce)

(d)

$$\frac{1}{s^2+4}$$

(Integrál)

(e)  $\frac{1}{(s-1)(s-2)}$  (konvoluce)

(f)  $\frac{2s+3}{s^2+4s+3}$  (rezidua)