

Odmocniny

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>

Teorie

1. typ $R(x, \sqrt[m]{x+a})$

Uvažme nejprve typ $R(x, \sqrt[m]{x+a})$, kde a je reálné číslo a m přirozené číslo ostře větší než 1. V takovém případě lze použít substituci

$$t = \sqrt[m]{x+a}$$

s přihlédnutím ke vztahům

$$x = t^m - a, \quad dx = mt^{m-1} dt.$$

2. typ $R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}})$,

kde $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a $R(x, y)$ je racionální funkce dvou proměnných, lze převést na integrál z racionální funkce substitucí (je-li $ad \neq bc$)

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

Odtud dostáváme, že

$$x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} := \omega(t)$$

a následně

$$dx = \omega'(t)dt = \frac{m dt^{m-1}(a - ct^m) + mct^{m-1}(dt^m - b)}{(a - ct^m)^2} dt = \frac{m(ad - bc)t^{m-1}}{(a - ct^m)^2} dt.$$

3. typ $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$

1. *Kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ má jeden dvojnásobný reálný kořen.*

Začneme tím nejjednodušším případem. Pokud trojčlen $ax^2 + bx + c$ má jediný dvojnásobný kořen x_1 a $a > 0$,¹ potom se odmocniny zbavíme snadno ihned

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}|x - x_1|.$$

Může vést na lepení.

¹) jinak je odmocnina dobře definována pouze v jednom bodě

2. *Kvadratický trojčlen* $ax^2 + bx + c$ *má dva reálné kořeny.*

Nechť kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ má dva reálné kořeny x_1 a x_2 , tedy lze psát

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Potom integrály typu $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ lze řešit *Eulerovou substitucí*

$$t = \sqrt{a \frac{x - x_1}{x - x_2}}, \quad \text{odkud} \quad x = \frac{ax_1 - x_2 t^2}{a - t^2}, \quad dx = \frac{2a(x_1 - x_2)t}{(a - t^2)^2} dt.$$

3. *Kvadratický trojčlen* $ax^2 + bx + c$ *nemá reálný kořen.* Pokud kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ nemá žádné reálné kořeny, pak aby odmocnina měla smysl, musí být $a > 0$. Z neexistence kořenů navíc vyplývá, že $c > 0$. Lze použít jedné z následujících dvou *Eulerových substitucí*

$$t = \sqrt{ax^2 + bx + c} \pm x\sqrt{a}, \quad (1)$$

$$xt = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{c}. \quad (2)$$

Například z první substituce lze vyjádřit, že

$$\begin{aligned} t \mp x\sqrt{a} &= \sqrt{ax^2 + bx + c} \\ (t \mp x\sqrt{a})^2 &= ax^2 + bx + c \\ t^2 \mp 2tx\sqrt{a} &= bx + c \\ x &= \frac{t^2 - c}{b \pm 2t\sqrt{a}} \end{aligned}$$

a odtud máme, že

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \mp \sqrt{a} \frac{t^2 - c}{b \pm 2t\sqrt{a}}.$$

a

$$dx = \pm \frac{2(\sqrt{a}(c + t^2) \pm bt)}{(b \pm 2\sqrt{a}t)^2} dt.$$

4. Existuje ještě jiná, v jednodušších případech častěji využívaná možnost, založená na transformaci kvadratického trojčlenu na kanonický tvar - *převodem na čtverec.*

U všech typů substitucí je potřeba pečlivě zkontrolovat definiční obory a podmínky.