Teorie řady

1 Řady obecně

Definice 1. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Číslo

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$$

nazýváme *m-tým částečným součtem řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Součtem nekonečné řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme limitu posloupnosti $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, pokud tato limita existuje. Tuto limitu (tj. součet řady) budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} s_m.$$

Jestliže existuje $\lim_{m\to\infty} s_m$ vlastní (tj. jestliže má řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konečný součet), pak říkáme, že řada *konverguje*, neboli *je konvergentní*. Jestliže limita neexistuje nebo existuje, ale je nevlastní, pak říkáme, že řada *diverguje*, neboli *je divergentní*.

Poznámka 2. Konvergence řady nezávisí na konečně mnoha členech. Přesněji, následující podmínky jsou ekvivalentní pro řadu $\sum a_n$:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;

(ii) existuje $k \in \mathbb{N}$, že $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ konverguje;

(iii) pro každé $k \in \mathbb{N}$ řada $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ konverguje.

Věta 3 (nutná podmínka konvergence řady)**.** Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom $\lim a_n = 0$.

Věta 4 (linearita konvergentních řad)**.** Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mají součet.

(a) Pokud $c \in \mathbb{R}$ a výraz $c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je definován, pak má řada $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ součet a platí $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Pokud je výraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ definován, pak má řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ součet a platí $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

2 Řady s nezápornými členy

Věta 5 (srovnávací kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s **nezápornými** členy a nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq b_n$.

(a) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta 6 (limitní srovnávací kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s **nezápornými** členy a nechť existuje $\lim \frac{a_n}{b_n}$. Označme $K = \lim \frac{a_n}{b_n}$.

(a) Pokud $K \in (0, \infty)$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

(b) Pokud $K = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(c) Pokud $K = \infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

Věta 7 (Cauchyovo odmocninové kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s **nezápornými** členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(c) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(d) Je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak posloupnost $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(e) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak posloupnost $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 8 (d'Alembertovo podílové kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s **kladnými** členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(c) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(d) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak $\lim a_n = \infty$, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 9 (Raabeovo kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s **nezápornými** členy.

(a) Jestliže platí

$$\liminf n(\tfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 1,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Jestliže platí

$$\limsup n(\tfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1) < 1,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

3 Řady s obecnými členy

Věta 10 (Leibniz)**.** Nechť $\{a_n\}$ je **monotónní** posloupnost, která konverguje k 0. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konverguje.

Věta 11 (Abelovo-Dirichletovo kritérium)**.** Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, přičemž $\{b_n\}$ je **monotónní**. Nechť je navíc splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:

(A) posloupnost $\{b_n\}$ je **omezená** a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje**,

(D) $\lim b_n = 0$ a **posloupnost částečných součtů** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **omezená**.

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

4 Absolutní konvergence řad

Věta 12 (vztah absolutní konvergence řady a konvergence řady)**.** Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, pak je i konvergentní.

Věta 13 (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \quad \sqrt[n]{|a_n|} \leq q,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní.

(b) Je-li $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(c) Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(d) Je-li $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak posloupnost $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

(e) Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak posloupnost $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Věta 14 (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s **nenulovými** členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní.

(b) Je-li $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(c) Je-li $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(d) Je-li $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, pak $\lim |a_n| = \infty$, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

5 Dodatek

1. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ konverguje právě když $|q| < 1$.
2. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$ konverguje pro $\alpha < -1$ a diverguje pro $\alpha \geq -1$.
3. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nazýváme *harmonickou řadou.* Harmonická řada diverguje.
4. Řada $\sum_{n=2}^{\infty} n^{\alpha} \ln^{\beta} n$ konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$ a $\beta \in \mathbb{R}$ nebo $\alpha = -1$ a $\beta < -1$.
5. **První fakt o „goniometrických" řadách.** Řady
$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$$
sice divergují (mimo $x = 0$ modulo 2π u sinové řady), ale mají stejně omezené částečné součty pro:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$
6. **Druhý fakt o „goniometrických" řadách.** Řady
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{\alpha}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^{\alpha}}$$
konvergují absolutně pro $\alpha > 1$. Sinová řada konverguje neabsolutně pro $0 < \alpha \leq 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, absolutně však pouze pro $x = 2n\pi$, kde n je celé číslo (pak je řada nulová). Kosinová řada konverguje neabsolutně pro $x \in \mathbb{R}$ různá od $2n\pi$, kde n je celé číslo, pro $x = 2n\pi$ diverguje. Pro $\alpha \leq 0$ řady vždy divergují.

   Speciálně řady $\sum_k |\sin k|/k$ a $\sum_k |\cos k|/k$ divergují.