Diskrétní martingaly

Petr Lachout
skripta MFF UK

Praha, 23.října 2007

Předmluva

Tento text vznikl jako učební text k přednášce STP051 - Teorie pravděpodobnosti 2, přednášené na MFF UK. Je věnován teorií martingalů s diskrétním časem. Skripta připravují teoretickou půdu pro vybudování teorie martingalů se spojitým časem, které jsou základem stochastické analýzy a moderních statistických postupů. Martingaly s diskrétním časem jsou nezbytným základem pro pochopení výstavby stochastického (Itôova) integrálu a teorie stochastických diferenciálních rovnic. Tento technicky náročný matematický aparát umožňuje vhodně popisovat složité dynamické děje se stochastickými vlivy. Jeho využití najdeme v různých vědních oborech, např. ve fyzice, biologii, chemii, ekonomii, atd. V současnosti je jeho asi nejznámější aplikací sestavení Blackova-Scholesova modelu spojitého trhu. Speciálně se jedná o vytvoření vhodného modelu, popisu, obchodování na burze, který umožňuje ocenění burzovních derivátů.

Autor děkuje kolegům dr. Janu Seidlerovi a dr. Petru Dostálovi za jejich připomínky a podněty, které pomohly vylepšit, zúplnit a zpřehlednit připravovaný text.

23.října 2007, autor

Typeset by $\LaTeX\,2_{\varepsilon}$.

Obsah

Použité značení

$\mathbb{N}$ . . . přirozená čísla,

$\mathbb{N}_o$ . . . přirozená čísla s nulou,

$\mathbb{Q}$ . . . racionální čísla,

$\mathbb{R}$ . . . reálná přímka,

$\mathbb{R}_+$ . . . nezáporná reálná čísla,

$\overline{\mathbb{R}}$ . . . rozšířená reálná přímka,

$\mathbb{C}$ . . . komplexní čísla,

$\mathbb{B}(E)$ . . . borelovská σ-algebra metrického prostoru E,

$\mathbb{I}_A$ . . . identifikátor množiny A,

Id_E . . . identita na množině E,

$\mathsf{clo}(A)$ . . . uzávěr množiny A,

$\mathsf{int}(A)$ . . . vnitřek množiny A,

$\partial(A)$ . . . hranice množiny A,

$\mathbb{L}_p$ . . . prostor n.v. s konečným p-tým momentem.

Kapitola 1

Definice a základní vlastnosti

V této přednášce budeme uvažovat náhodné procesy definované na nějakém pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ a indexované množinou $T \subset \mathbb{R}$, $T \neq \emptyset$.

Definice 1.1. *Když pro každé $t \in T$ je $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ σ-algebra a $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pokud $t < s$, $t, s \in T$, pak budeme říkat, že $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ je **filtrace**.*

V dalších úvahách budeme potřebovat pojem spojitosti filtrace a spojitosti náhodného procesu.

Definice 1.2. *Pro filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ definujeme*

$$\mathcal{F}_{+\infty} := \sigma\left(\bigcup_{s \in T} \mathcal{F}_s\right) \quad a \quad \mathcal{F}_{-\infty} := \bigcap_{s \in T} \mathcal{F}_s.$$

Dále pro každé $t \in T$ definujeme

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{t+} &:= \bigcap_{\substack{s>t\\ s\in T}} \mathcal{F}_s \quad \text{když} \quad \inf\{s \in T : s > t\} = t,\\
&:= \mathcal{F}_t \qquad\quad \text{jinak},\\
\mathcal{F}_{t-} &:= \sigma\left(\bigcup_{\substack{s<t\\ s\in T}} \mathcal{F}_s\right) \quad \text{když} \quad \sup\{s \in T : s < t\} = t,\\
&:= \mathcal{F}_t \qquad\qquad\quad \text{jinak},\\
\mathcal{F}_{t\uparrow} &:= \sigma\left(\bigcup_{\substack{s<t\\ s\in T}} \mathcal{F}_s\right) \quad \text{když} \quad t > \inf T,\\
&:= \mathcal{F}_t \qquad\qquad\quad \text{když} \quad t = \inf T.
\end{aligned}$$

*Budeme říkat, že filtrace $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ je **zprava spojitá**, jestliže $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ pro každé $t \in T$, a budeme říkat, že je **zleva spojitá**, jestliže $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t-}$ pro každé $t \in T$. Když je filtrace zleva i zprava spojitá, pak mluvíme o **spojité** filtraci.*

Povšimněme si, že v izolovaných bodech množiny T je každá filtrace zleva i zprava spojitá, tj. spojitá. Ukázat spojitost filtrace pro souvislou indexovou množinu T nebývá jednoduché. Lze však například dokázat, že přirozené filtrace Wienerova a Poissonova procesu jsou po zúplnění spojité. Problematikou spojitosti filtrace se zabývá kapitola 2.7. v [3]. Tato diskuse je však velmi netriviální a my se teprve začínáme seznamovat se základy celé teorie. Pokračujme tedy v definicích.

Definice 1.3. *Náhodný proces $(S_t, t \in T)$ je **zleva spojitý (zprava spojitý, spojitý)**, jestliže pro každé $\omega \in \Omega$ je funkce $t \mapsto S_t(\omega)$ zleva spojitá (zprava spojitá, spojitá).*

Definice 1.4. *Nechť $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ je filtrace. Když S_t jsou $\mathcal{F}_t$-měřitelné reálné n.v. pro každé $t \in T$, pak budeme říkat, že **$(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-adaptovaný proces**.*

1.1. Definice martingalů

Definice 1.5. *Když $(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-adaptovaný proces a $S_t \in \mathbb{L}_1$ pro každé $t \in T$, pak říkáme, že*

*$(S_t, t \in T)$ **je** $(\mathcal{F}_t, t \in T)$**-submartingal**, jestliže $\mathsf{E}[S_t \mid \mathcal{F}_s] \geq S_s$ s.j. pro každé $s < t$, $t, s \in T$,*
*$(S_t, t \in T)$ **je** $(\mathcal{F}_t, t \in T)$**-supermartingal**, jestliže $\mathsf{E}[S_t \mid \mathcal{F}_s] \leq S_s$ s.j. pro každé $s < t$, $t, s \in T$,*
*$(S_t, t \in T)$ **je** $(\mathcal{F}_t, t \in T)$**-martingal**, jestliže $\mathsf{E}[S_t \mid \mathcal{F}_s] = S_s$ s.j. pro každé $s < t$, $t, s \in T$.*

Pro některé typy indexových množin T stačí podmínky ověřovat pouze mezi sousedy.

Lemma 1.6. *Uvažujme indexovou množinu $I = \{1, 2, \dots, n\}$ nebo $I = \mathbb{N}$ nebo $I = -\mathbb{N}$ nebo $I = \mathbb{Z}$. Nechť $T = \{t_i : i \in I\} \subset \mathbb{R}$ je taková, že když $i, i+1 \in I$, pak $t_i < t_{i+1}$.*

Když $(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-adaptovaný proces a $S_t \in \mathbb{L}_1$ pro každé $t \in T$, pak
$(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-submartingal, jestliže $\mathsf{E}\left[S_{t_{i+1}} \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] \geq S_{t_i}$ s.j. pro každé $i, i+1 \in I$,
$(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-supermartingal, jestliže $\mathsf{E}\left[S_{t_{i+1}} \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] \leq S_{t_i}$ s.j. pro každé $i, i+1 \in I$,
$(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-martingal, jestliže $\mathsf{E}\left[S_{t_{i+1}} \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] = S_{t_i}$ s.j. pro každé $i, i+1 \in I$.

Důkaz: Důkaz stačí provést pouze pro submartingal.
Nechť tedy $\mathsf{E}\left[S_{t_{i+1}} \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] \geq S_{t_i}$ s.j. pro každé $i, i+1 \in I$.
Pro $i, j \in I$, $i < j$ dostaneme nerovnost $\mathsf{E}\left[S_{t_j} \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] \geq S_{t_i}$ s.j. postupným podmiňováním n.v. S_{t_j} σ-algebrami $\mathcal{F}_{t_{j-1}}, \mathcal{F}_{t_{j-2}}, \mathcal{F}_{t_{j-3}}, \dots, \mathcal{F}_{t_i}$.

Q.E.D

Lemma je formulováno záměrně poněkud komplikovaně. Cílem je, aby si čtenář uvědomil, že vlastnost býti (sub-, super-) martingalem není ovlivněna přeindexováním procesu. Je však nutné zachovat původní uspořádání indexové množiny.

Filtraci můžeme zmenšovat, ale proces musí být na ni adaptován.

Tvrzení 1.7. *Nechť $(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-submartingal (-supermartingal, -martingal) a $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$, $t \in T$ jsou σ-algebry. Když $(\mathcal{G}_t, t \in T)$ je filtrace a $(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{G}_t, t \in T)$-adaptovaný proces, pak $(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{G}_t, t \in T)$-submartingal (-supermartingal, -martingal).*

Důkaz: Tvrzení stačí dokázat pro submartingal. Předpokládejme tedy, že $(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-submartingal a vezměme $s < t$, $s, t \in T$. Pak dostáváme

$$\mathsf{E}[S_t \mid \mathcal{G}_s] = \mathsf{E}[\mathsf{E}[S_t \mid \mathcal{F}_s] \mid \mathcal{G}_s] \geq \mathsf{E}[S_s \mid \mathcal{G}_s] = S_s \quad \text{s.j.}$$

Tudíž $(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{G}_t, t \in T)$-submartingal.

Q.E.D

Nejmenší σ-algebry, které splňují předpoklady tvrzení 1.7 jsou σ-algebry generované sledovaným procesem. Můžeme proto vyslovit zjednodušenou definici.

Definice 1.8. *Řekneme, že $(S_t, t \in T)$ je **submartingal (supermartingal, martingal)**, když $(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{S}_t, t \in T)$-submartingal (-supermartingal, -martingal) pro přirozenou filtraci $\mathcal{S}_t = \sigma(S_s, s \leq t)$.*

Tato definice je spojena s původní definicí 1.5 následujícím tvrzením.

Tvrzení 1.9. *Když $(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-submartingal (-supermartingal, -martingal), pak také $(S_t, t \in T)$ je submartingal (supermartingal, martingal).*

Důkaz: Toto tvrzení je přímým důsledkem tvrzení 1.7, neboť přirozená filtrace splňuje jeho předpoklady.

Q.E.D

1.2. Základní příklady martingalů.

Nyní si uveďme několik základních příkladů.

Příklad 1.1. Nechť X_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé reálné a integrovatelné n.v. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Když $\forall\ n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$ je $\mathsf{E}[X_n] \geq 0$, potom $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je submartingal,
když $\forall\ n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$ je $\mathsf{E}[X_n] \leq 0$, potom $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je supermartingal,
když $\forall\ n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$ je $\mathsf{E}[X_n] = 0$, potom $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je martingal.

Tuto skutečnost ověříme přímým výpočtem podmíněné střední hodnoty

$$\mathsf{E}[S_{n+1} \mid S_1, S_2, \ldots, S_n] = \mathsf{E}[S_n + X_{n+1} \mid S_1, S_2, \ldots, S_n] = S_n + \mathsf{E}[X_{n+1}] \quad \text{s.j.}$$

△

Příklad 1.2. Nechť X_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé, nezáporné reálné n.v. s konečnou střední hodnotou. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $S_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

Když $\forall\ n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$ je $\mathsf{E}[X_n] \geq 1$, potom $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je submartingal,
když $\forall\ n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$ je $\mathsf{E}[X_n] \leq 1$, potom $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je supermartingal,
když $\forall\ n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$ je $\mathsf{E}[X_n] = 1$, potom $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je martingal.

Tuto skutečnost ověříme přímým výpočtem podmíněné střední hodnoty

$$\mathsf{E}[S_{n+1} \mid S_1, S_2, \ldots, S_n] = \mathsf{E}[S_n \cdot X_{n+1} \mid S_1, S_2, \ldots, S_n] = S_n \cdot \mathsf{E}[X_{n+1}] \quad \text{s.j.}$$

△

Příklad 1.3. Nechť X_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé reálné n.v. s konečným rozptylem a nulovou střední hodnotou. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} \mathsf{Var}(X_k)$. Pak $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je martingal.

Tuto skutečnost ověříme přímým výpočtem podmíněné střední hodnoty

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[S_{n+1} \mid X_1, X_2, \ldots, X_n] &= \mathsf{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k + X_{n+1}\right)^2 - \sum_{k=1}^{n+1} \mathsf{Var}(X_k) \,\middle|\, X_1, X_2, \ldots, X_n\right] \\
&= \mathsf{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 + 2 \cdot X_{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k + X_{n+1}^2 \,\middle|\, X_1, X_2, \ldots, X_n\right] - \sum_{k=1}^{n+1} \cdot \mathsf{Var}(X_k) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 + 2 \cdot \mathsf{E}[X_{n+1}] \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k + \mathsf{E}\left[X_{n+1}^2\right] - \sum_{k=1}^{n+1} \mathsf{Var}(X_k) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} \mathsf{Var}(X_k) = S_n \quad \text{s.j.}
\end{aligned}$$

Ověřili jsme, že $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n), n \in \mathbb{N})$-martingal. Podle tvrzení 1.9 $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je martingal.

△

Příklad 1.4. Nechť X_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou reálné n.v. a pro každé $n \in \mathbb{N}$ má náhodný vektor $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ spojité rozdělení s hustotou $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, která je všude kladná. Dále je dán konzistentní systém hustot $g_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, t.j. $\int_{-\infty}^{+\infty} g_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi)\, \mathsf{d}\xi = g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pro skoro všechna $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $S_n = \frac{g_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{f_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)}$. Pak $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je martingal.

Tuto skutečnost ověříme přímým výpočtem podmíněné střední hodnoty. Pro připomenutí definic podmíněné střední hodnoty a podmíněného rozdělení, když podmiňujeme jevem, že náhodné veličiny nabývají daných hodnot, odkazujeme na kapitoly 7,8,9 v [4] nebo kapitolu VI v [5]. Zde si čtenář také může připomenout, jak s podmíněnou střední hodnotou a podmíněným rozdělením počítat.

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\,[S_{n+1} \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n] = \\
=& \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi)}{f_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi)} \, \mathsf{P}_{X_{n+1}|X_1,\dots,X_n}(\mathsf{d}\xi \,|x_1, x_2, \dots, x_n) = \\
=& \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi)}{f_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi)} \, \mathsf{f}_{X_{n+1}|X_1,\dots,X_n}(\xi \,|x_1, x_2, \dots, x_n) \, \mathsf{d}\xi = \\
=& \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi)}{f_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi)} \frac{f_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi)}{f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \, \mathsf{d}\xi = \\
=& \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi)}{f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \, \mathsf{d}\xi = \frac{g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}
\end{aligned}
$$

pro skoro všechna $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Zpětným dosazením, viz definice 7.20 v [4] nebo odstavec VI.1.16 v [5]. dostaneme

$$\mathsf{E}\,[S_{n+1} \mid X_1, X_2, \dots, X_n] = S_n \quad \text{s.j.}$$

Ověřili jsme, že $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\sigma(X_1, X_2, \dots, X_n), n \in \mathbb{N})$-martingal. Podle tvrzení 1.9 i $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je martingal.

△

Příklad 1.5. V urně je **a** bílých a **b** černých kuliček. Nezávislé tahy provádíme tak, že vytaženou kuličku do osudí vrátíme a ještě přidáme kuličku stejné barvy.

Označíme-li S_n relativní počet bílých kuliček v osudí po n-tém tahu, pak $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je martingal.

Přesvědčíme se o tom následovně. Zaveďme pomocné n.v.

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{když v } n\text{-tém tahu byla vytažena bílá kulička,} \\ 0 & \text{když v } n\text{-tém tahu byla vytažena černá kulička.} \end{cases}$$

Pro tyto n.v. platí

$$\mathsf{E}\,[X_{n+1} \mid X_1, X_2, \dots, X_n] = \mathsf{P}\,(X_{n+1} = 1 \mid X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{a + \sum_{k=1}^{n} X_k}{a + b + n} = S_n \text{ s.j.}$$

Počítejme podmíněnou střední hodnotu

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\,[S_{n+1} \mid X_1, X_2, \dots, X_n] &= \mathsf{E}\left[\frac{a + \sum_{k=1}^{n+1} X_k}{a + b + n + 1} \,\middle|\, X_1, X_2, \dots, X_n \right] = \\
&= \frac{1}{a + b + n + 1} \, \mathsf{E}\left[a + \sum_{k=1}^{n} X_k + X_{n+1} \,\middle|\, X_1, X_2, \dots, X_n \right] = \\
&= \frac{a + \sum_{k=1}^{n} X_k + \mathsf{E}\,[X_{n+1} \mid X_1, X_2, \dots, X_n]}{a + b + n + 1} = \\
&= \frac{a + \sum_{k=1}^{n} X_k + \frac{a + \sum_{k=1}^{n} X_k}{a + b + n}}{a + b + n + 1} = \frac{a + \sum_{k=1}^{n} X_k}{a + b + n} = S_n \quad \text{s.j.}
\end{aligned}
$$

V tomto příkladě platí rovnost σ-algeber $\sigma(S_1, S_2, \dots, S_n) = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$, neboť ze znalosti $S_1, S_2, \dots, S_n$ dokážeme přesně určit $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Proto již máme ověřeno, že $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je martingal.

$\triangle$

Příklad 1.6. Nechť X_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou i.i.d. reálné n.v. a $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ je filtrace taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\sigma(X_n) \subset \mathcal{F}_n$ a σ-algebry $\mathcal{F}_n$, $\sigma(X_{n+1})$ jsou nezávislé. Dále pro $n \in \mathbb{N}$ označme $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

(i) Když $X_1 \in \mathbb{L}_1$, pak $(S_n - n\mathsf{E}[X_1], n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-martingal.

(ii) Když $X_1 \in \mathbb{L}_2$, pak $\left((S_n - n\mathsf{E}[X_1])^2 - n\mathsf{Var}(X_1), n \in \mathbb{N}\right)$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-martingal.

(iii) Když $\gamma \in \mathbb{R}$ je taková, že $\mathsf{e}^{\gamma X_1} \in \mathbb{L}_1$, pak $\left(\mathsf{e}^{\gamma S_n}\left(\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\gamma X_1}\right]\right)^{-n}, n \in \mathbb{N}\right)$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-martingal.

Důkaz: Uvědomme si, že z předpokladů plyne, že $\sigma(X_1, X_2, \dots, X_n) \subset \mathcal{F}_n$ a σ-algebry $\mathcal{F}_n$, $\sigma(X_{n+j}, j \in \mathbb{N})$ jsou nezávislé. Tudíž S_n je $\mathcal{F}_n$-měřitelná a zbytek důkazu provedeme přímým výpočtem.

1.

$$\mathsf{E}[S_{n+1} - (n+1)\mathsf{E}[X_1] \mid \mathcal{F}_n] = S_n + \mathsf{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] - (n+1)\mathsf{E}[X_1] = S_n - n\mathsf{E}[X_1] \quad \text{s.j.}$$

2.

$$\begin{aligned}
& \mathsf{E}\left[(S_{n+1} - (n+1)\mathsf{E}[X_1])^2 - (n+1)\mathsf{Var}(X_1) \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] = \\
= \; & (S_n - n\mathsf{E}[X_1])^2 + 2\mathsf{E}[(X_{n+1} - \mathsf{E}[X_1])(S_n - n\mathsf{E}[X_1]) \mid \mathcal{F}_n] + \mathsf{E}\left[(X_{n+1} - \mathsf{E}[X_1])^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] - \\
& -(n+1)\mathsf{Var}(X_1) = \\
= \; & (S_n - n\mathsf{E}[X_1])^2 + 2\mathsf{E}[X_{n+1} - \mathsf{E}[X_1] \mid \mathcal{F}_n](S_n - n\mathsf{E}[X_1]) - n\mathsf{Var}(X_1) = \\
= \; & (S_n - n\mathsf{E}[X_1])^2 - n\mathsf{Var}(X_1) \quad \text{s.j.}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
& \mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\gamma S_{n+1}}\left(\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\gamma X_1}\right]\right)^{-(n+1)} \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] = \mathsf{e}^{\gamma S_n}\left(\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\gamma X_1}\right]\right)^{-(n+1)} \mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\gamma X_{n+1}} \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] = \\
= \; & \mathsf{e}^{\gamma S_n}\left(\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\gamma X_1}\right]\right)^{-n} \quad \text{s.j.}
\end{aligned}$$

Q.E.D

$\triangle$

Příklad 1.7. Nechť $(W(t), t \geq 0)$ je Wienerův proces a $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ je filtrace taková, že pro každé $s > t \geq 0$ je $\sigma(W(t)) \subset \mathcal{F}_t$ a σ-algebry $\mathcal{F}_t$, $\sigma(W(s) - W(t))$ jsou nezávislé. Potom, $(W(t), t \geq 0)$, $(W^2(t) - t, t \geq 0)$ a pro každé $\gamma \in \mathbb{R}$ také $\left(\mathsf{e}^{-\frac{1}{2}t\gamma^2}\mathsf{e}^{\gamma W(t)}, t \geq 0\right)$ jsou $\mathcal{F}_t$-martingaly.

Důkaz: Z předpokladů je $\sigma(W(u), 0 \leq u \leq t) \subset \mathcal{F}_t$ a σ-algebry $\mathcal{F}_t$, $\sigma(W(t+u) - W(t), 0 \leq u)$ jsou nezávislé. Tudíž uvažované procesy jsou adaptované vzhledem k dané filtraci.

O platnosti martingalové vlastnosti se přesvědčíme přímým výpočtem podmíněných středních hodnot pro $0 \leq s < t < +\infty$.

1.

$$\mathsf{E}[W(t) \mid \mathcal{F}_s] = \mathsf{E}[W(s) \mid \mathcal{F}_s] + \mathsf{E}[W(t) - W(s) \mid \mathcal{F}_s] = W(s) \quad \text{s.j.},$$

neboť rozdíl $W(t) - W(s)$ má nulovou střední hodnotu a je nezávislý s $\mathcal{F}_s$.

2.

$$\begin{aligned}
& \mathsf{E}\left[W^2(t)-t \mid \mathcal{F}_s\right]= \\
= \; & \mathsf{E}\left[W^2(s)+2\cdot W(s)(W(t)-W(s))+(W(t)-W(s))^2-t \mid \mathcal{F}_s\right] \\
= \; & W^2(s)+(t-s)-t=W^2(s)-s \quad \text{s.j.}
\end{aligned}$$

Nyní jsme navíc využili toho, že rozdíl $W(t)-W(s)$ má rozptyl $t-s$.

3. Připomeňme, že pro n.v. Z se standardním normálním rozdělením platí $\mathsf{E}\left[\mathrm{e}^{tZ}\right]=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2}$ pro každé $t\in\mathbb{C}$. Proto $\mathsf{E}\left[\mathrm{e}^{\gamma(W(t)-W(s))}\right]=\mathsf{E}\left[\mathrm{e}^{\gamma\sqrt{t-s}Z}\right]=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\gamma^2(t-s)}$.

$$\mathsf{E}\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t\gamma^2}\mathrm{e}^{\gamma W(t)} \;\middle|\; \mathcal{F}_s\right]=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t\gamma^2}\mathrm{e}^{\gamma W(s)}\mathsf{E}\left[\mathrm{e}^{\gamma(W(t)-W(s))} \;\middle|\; \mathcal{F}_s\right]=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}s\gamma^2}\mathrm{e}^{\gamma W(s)} \quad \text{s.j.}$$

Q.E.D

△

Příklad 1.8. Nechť X_n, $n\in\mathbb{N}$ jsou i.i.d. reálné n.v. a uvažujme pro $n\in\mathbb{N}$ průměr $S_{-n}=\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$.

Uvědomme si, že pro $n\in\mathbb{N}$ platí

$$\mathsf{E}\left[X_1 \mid X_1+X_2+\ldots+X_n\right]=\overline{X}_n \text{ s.j.}, ,$$

neboť

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[X_1 \mid X_1+\ldots+X_n\right] &= \mathsf{E}\left[X_2 \mid X_1+\ldots+X_n\right]=\ldots=\mathsf{E}\left[X_n \mid X_1+\ldots+X_n\right] \text{ s.j.}, \\
n\,\mathsf{E}\left[X_1 \mid X_1+\ldots+X_n\right] &= \sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}\left[X_k \mid X_1+\ldots+X_n\right] \\
&= \mathsf{E}\left[X_1+\ldots+X_n \mid X_1+\ldots+X_n\right]=X_1+X_2+\ldots+X_n \text{ s.j.}
\end{aligned}$$

Z posloupnosti X_1, X_2, X_3, …. vypočítáváme S_{-1}, S_{-2}, S_{-3}, …. a proto pro každé $n\in-\mathbb{N}-1$ platí

$$\mathsf{E}\left[S_{n+1} \mid S_n,S_{n-1},S_{n-2},\ldots\right] = \mathsf{E}\left[S_{n+1} \mid S_n,X_{1-n},X_{2-n},X_{3-n},\ldots\right].$$

Veličiny S_n a $X_{1-n},X_{2-n},X_{3-n},\ldots.$ jsou nezávislé. Proto můžeme psát

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[S_{n+1} \mid S_n,S_{n-1},S_{n-2},\ldots\right] &= \mathsf{E}\left[S_{n+1} \mid S_n\right] \\
&= \frac{1}{(-n-1)}\mathsf{E}\left[X_1+X_2+\ldots+X_{-n-1} \mid X_1+X_2+\ldots+X_{-n}\right] \\
&= \mathsf{E}\left[X_1 \mid X_1+X_2+\ldots+X_{-n}\right]=\overline{X}_{-n}=S_n \text{ s.j.}
\end{aligned}$$

Zjistili jsme tedy, že $(S_n,n\in-\mathbb{N})$ je martingal.

△

1.3. Základní vlastnosti.

Filtraci můžeme rozšiřovat o informaci, která je s ní nezávislá.

Tvrzení 1.10. *Nechť $(\mathcal{F}_t,t\in T)$ a $(\mathcal{G}_t,t\in T)$ jsou filtrace a pro každé $t\in T$ je σ-algebra $\mathcal{F}_t$ nezávislá se σ-algebrou $\mathcal{G}_t$. Když $(S_t,t\in T)$ je $(\mathcal{F}_t,t\in T)$-submartingal (-supermartingal, -martingal), pak také $(S_t,t\in T)$ je $(\sigma(\mathcal{F}_t\cup\mathcal{G}_t),t\in T)$-submartingal (-supermartingal, -martingal).*

Důkaz: Stačí ověřit definici podmíněné střední hodnoty. Vezměme tedy $s, t \in T$, $t < s$, $F \in \mathcal{F}_t$, $G \in \mathcal{G}_t$ a počítejme

$$\begin{aligned} &\int_{F\cap G} \mathsf{E}\left[S_s \mid \mathcal{F}_t\right] \,\mathrm{dP} = \int_\Omega \mathbb{I}_G \mathsf{E}\left[S_s \mid \mathcal{F}_t\right] \mathbb{I}_F \,\mathrm{dP} = \mathsf{P}\left(G\right) \int_F \mathsf{E}\left[S_s \mid \mathcal{F}_t\right] \,\mathrm{dP} = \\ = \;& \mathsf{P}\left(G\right) \int_F S_s \,\mathrm{dP} = \int_\Omega \mathbb{I}_G S_s \mathbb{I}_F \,\mathrm{dP} = \int_{F\cap G} S_s \,\mathrm{dP}. \end{aligned}$$

Tím je ověřeno, že $\mathsf{E}\left[S_s \mid \sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{G}_t)\right] = \mathsf{E}\left[S_s \mid \mathcal{F}_t\right]$ s.j., neboť $\mathcal{H}_t = \{F \cap G : F \in \mathcal{F}_t, G \in \mathcal{G}_t\}$ je uzavřeno na konečné průniky a $\sigma(\mathcal{H}_t) = \sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{G}_t)$. Tvrzení je tím dokázáno.

Q.E.D

Konvexní funkce zachovává submartingal.

Tvrzení 1.11. *Nechť $(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-martingal a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce. Když $g(S_t) \in \mathbb{L}_1$ pro každé $t \in T$, potom $(g(S_t), t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-submartingal.*

Důkaz: Pro $s < t$, $s, t \in T$ s použitím Jensenovy nerovnosti dostáváme

$$\mathsf{E}\left[g(S_t) \mid \mathcal{F}_s\right] \geq g\left(\mathsf{E}\left[S_t \mid \mathcal{F}_s\right]\right) = g(S_s) \quad \text{s.j.}$$

Q.E.D

Tvrzení 1.12. *Nechť $(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-submartingal a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neklesající konvexní funkce. Když $g(S_t) \in \mathbb{L}_1$ pro každé $t \in T$, potom $(g(S_t), t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-submartingal.*

Důkaz: Pro $s < t$, $s, t \in T$ s použitím Jensenovy nerovnosti a faktu, že je funkce g neklesající, dostáváme

$$\mathsf{E}\left[g(S_t) \mid \mathcal{F}_s\right] \geq g\left(\mathsf{E}\left[S_t \mid \mathcal{F}_s\right]\right) \geq g(S_s) \quad \text{s.j.}$$

Q.E.D

Pro supermartingaly a konkávní funkce platí analogická tvrzení.

Tvrzení 1.13. *Nechť $(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-martingal a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je konkávní funkce. Když $g(S_t) \in \mathbb{L}_1$ pro každé $t \in T$, potom $(g(S_t), t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-supermartingal.*

Důkaz: Tvrzení je jednoduchým důsledkem tvrzení 3.11, neboť $-g$ je konvexní funkce.

Q.E.D

Tvrzení 1.14. *Nechť $(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-supermartingal a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neklesající konkávní funkce. Když $g(S_t) \in \mathbb{L}_1$ pro každé $t \in T$, potom $(g(S_t), t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-supermartingal.*

Důkaz: Tvrzení je jednoduchým důsledkem tvrzení 3.12, neboť $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -g(-x)$ je neklesající konvexní funkce, $(-S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-submartingal a $-h(-S_t) = g(S_t)$.

Q.E.D

Speciálně dostáváme, že pro submartingal $(S_t, t \in T)$ je jeho kladná část $(S_t^+, t \in T)$ opět submartingal. Pro supermartingal $(S_t, t \in T)$ je jeho záporná část $(S_t^-, t \in T)$ submartingal. Pro martingal $(S_t, t \in T)$ jsou jeho kladná část $(S_t^+, t \in T)$, záporná část $(S_t^-, t \in T)$ a absolutní hodnota $(|S_t|, t \in T)$ submartingaly.

1.4. Kompenzátor

Velmi užitečné je umět upravit proces tak, aby byl martingalem.

Definice 1.15. *Nechť $(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-adaptovaný proces. Řekneme, že náhodný proces $(K_t, t \in T)$ je **kompenzátor** procesu $(S_t, t \in T)$ vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$, jestliže $(S_t - K_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-martingal a $(K_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_{t\uparrow}, t \in T)$-adaptovaný proces.*

Podívejme se na jednoznačnost kompenzátoru.

Tvrzení 1.16. *Nechť $(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-adaptovaný proces a náhodné procesy $(K_t, t \in T)$, $(C_t, t \in T)$ jsou dva jeho kompenzátory vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$. Potom $(K_t - C_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-martingal a zároveň také $\mathcal{F}_{t\uparrow}$-martingal.*

Důkaz: Pro $s, t \in T$, $s < t$ platí

$$\mathsf{E}\left[K_t - C_t \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathsf{E}\left[S_t - C_t \mid \mathcal{F}_s\right] - \mathsf{E}\left[S_t - K_t \mid \mathcal{F}_s\right] = (S_s - C_s) - (S_s - K_s) = K_s - C_s \quad \text{s.j.}$$

Tudíž $(K_t - C_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-martingal a zároveň je $\mathcal{F}_{t\uparrow}$-adaptovaný. Proto podle tvrzení 1.7 je i $\mathcal{F}_{t\uparrow}$-martingal.

Q.E.D

Tvrzení 1.17. *Nechť $(S_t, t \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{N})$-adaptovaný proces, $\forall\, t \in \mathbb{N}$ je $S_t \in \mathbb{L}_1$ a $(K_t, t \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_{t\uparrow}, t \in \mathbb{N})$-adaptovaný proces. Pak proces $(K_t, t \in \mathbb{N})$ je kompenzátor procesu $(S_t, t \in \mathbb{N})$ vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{N})$ tehdy a jen tehdy, když existuje $X \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_1)$ tak, že*

$$K_t = X + \sum_{j=1}^{t-1} \left(\mathsf{E}\left[S_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right] - S_j\right) \quad \text{s.j.} \tag{1.1}$$

Důkaz: Pro každé $t \in \mathbb{N}$ označme $C_t = \sum_{j=1}^{t-1} \left(\mathsf{E}\left[S_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right] - S_j\right)$.
Snadno si každý ověří, že proces $(C_t, t \in \mathbb{N})$ je kompenzátorem procesu $(S_t, t \in \mathbb{N})$.
Nechť $(K_t, t \in \mathbb{N})$ je jiný kompenzátor.
Pak podle tvrzení 4.16 je $(K_t - C_t, t \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{N})$-martingal i $\mathcal{F}_{t\uparrow}$-martingal.
Proto pro $t \in \mathbb{N}$ platí

$$K_{t+1} - C_{t+1} = \mathsf{E}\left[K_{t+1} - C_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] = K_t - C_t \quad \text{s.j.}$$

Konečnou indukcí dostáváme $K_t - C_t = K_1 - C_1$ s.j. pro všechna $t \in \mathbb{N}$ a $K_1 - C_1 \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_1)$.

Q.E.D

Pro procesy s obecnou indexovou množinou platí obdobná věta, ale pouze za určitých omezujících předpokladů. Důkaz tohoto tvrzení však vyžaduje další znalosti, které přesahují rámec tohoto textu.

Uveďme ještě příklady kompenzátorů pro i.i.d. n.v.

Příklad 1.9. Nechť X_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou i.i.d. reálné n.v. s konečným rozptylem. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Pak

- $(S_n, n \in \mathbb{N})$ má kompenzátor $(n \cdot \mathsf{E}\left[X_1\right], n \in \mathbb{N})$ vzhledem k přirozené filtraci, která je shodná s filtrací $(\sigma\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right), n \in \mathbb{N})$;
- $(S_n^2, n \in \mathbb{N})$ má kompenzátor $(n \cdot \mathsf{E}\left[X_1^2\right] + 2\,\mathsf{E}\left[X_1\right] \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)X_k, n \in \mathbb{N})$ vzhledem k filtraci $(\sigma\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right), n \in \mathbb{N})$;
- $(S_n^2, n \in \mathbb{N})$ má kompenzátor $(n \cdot \mathsf{E}\left[X_1^2\right] + 2\,\mathsf{E}\left[X_1\right] \sum_{k=1}^{n-1} \mathsf{E}\left[S_k \mid |S_1|, |S_2|, \ldots, |S_k|\right], n \in \mathbb{N})$ vzhledem k přirozené filtraci, t.j. vzhledem k filtraci $(\sigma\left(|S_1|, |S_2|, \ldots, |S_n|\right), n \in \mathbb{N})$.

Odtud vidíme, že pokud X_1 má nulovou střední hodnotu, potom $(S_n^2, n \in \mathbb{N})$ má kompenzátor $(n \cdot \mathsf{E}\left[X_1^2\right], n \in \mathbb{N})$ vzhledem k filtraci $(\sigma\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right), n \in \mathbb{N})$ i vzhledem k přirozené filtraci $(\sigma\left(|S_1|, |S_2|, \ldots, |S_n|\right), n \in \mathbb{N})$.

Nalézt konkrétní tvar kompenzátoru procesu $(S_n^2, n \in \mathbb{N})$ vzhledem k přirozené filtraci není jednoduché. Čtenář si to může vyzkoušet v případě, kdy X_1 má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[-1, 2]$.

$\triangle$

1.5. Markovský čas

Při pozorování stochastického procesu je naším hlavním cílem jeho optimální řízení na základě nashromážděné znalosti. Tento úkol je reprezentován markovským časem.

Definice 1.18. *Nechť $T \subset \mathbb{R}$, $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ je filtrace a $\tau : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$. Budeme říkat, že τ je **markovský čas** vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$, jestliže $[\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t$ pro každé $t \in T$.*

Při některých úvahách je výhodnější ekvivalentní definice.

Lemma 1.19. *Nechť $T \subset \mathbb{R}$, $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ je filtrace a $\tau : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$. Pak τ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ tehdy a jen tehdy, když $[\tau \leq t] \in \mathcal{F}_s$ pro každé $t \in \mathbb{R}$, $s \in T$, $t \leq s$.*

Důkaz: Když τ splňuje podmínku, pak je evidentně markovský čas. Stačí se proto zabývat pouze opačnou implikací.
Nechť τ je markovský čas a $t \in \mathbb{R}$, $s \in T$, $t \leq s$. Označme $\hat{t} = \sup\{v \in T : v \leq t\}$ a rozlišme tři případy.

1. $\hat{t} = -\infty$, tj. pro každé $v \in T$ je $t < v$. Pak $[\tau \leq t] = \emptyset \in \mathcal{F}_s$.
2. Když $\hat{t} \in T$, pak $[\tau \leq t] = [\tau \leq \hat{t}] \in \mathcal{F}_{\hat{t}} \subset \mathcal{F}_s$.
3. Když $\hat{t} > -\infty$ a $\hat{t} \notin T$, pak existuje posloupnost $v_n \in T$ taková, že $v_n \nearrow \hat{t}$. Potom

$$[\tau \leq t] = \bigcup_{\substack{v<t \\ v \in T}} [\tau \leq v] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [\tau \leq v_n] \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{F}_{v_n} \subset \mathcal{F}_s$$

Q.E.D

Lemma 1.20. *Když je množina T nejvýše spočetná, pak τ je markovský čas tehdy a jen tehdy, jestliže $[\tau = t] \in \mathcal{F}_t$ pro každé $t \in T$.*

Důkaz:

1. Nechť τ je markovský čas a $t \in T$.
   Pak $[\tau = t] = [\tau \leq t] - \bigcup_{\substack{s<t \\ s \in T}} [\tau \leq s] \in \mathcal{F}_t$, protože T je nejvýše spočetná.
2. Je-li $\forall t \in T$, $[\tau = t] \in \mathcal{F}_t$, pak $[\tau \leq t] = \bigcup_{\substack{s \leq t \\ s \in T}} [\tau = s] \in \mathcal{F}_t$, protože T je nejvýše spočetná.

   Takže τ je markovský čas.

Q.E.D

Čas prvého výstupu z borelovské množiny je důležitým příkladem markovského času.

Příklad 1.10. Nechť $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-adaptovaný proces a B je borelovská podmnožina $\mathbb{R}$. Pak čas prvního výstupu S_n z množiny B, t.j. $\tau = \min\{n \in \mathbb{N} : S_n \notin B\}$, je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$. Používáme zde úmluvy $\min\{\emptyset\} = +\infty$.

K důkazu si stačí uvědomit, že

$$[\tau = n] = [S_1 \in B] \cap [S_2 \in B] \cap \ldots \cap [S_{n-1} \in B] \cap [S_n \notin B] \in \mathcal{F}_n$$

nebo

$$[\tau \leq n] = \bigcup_{k=1}^{n} [S_k \notin B] \in \mathcal{F}_n.$$

△

Tento příklad je základním, nejdůležitějším a nejpoužívanějším typem markovského času. Pro proces s obecnou indexovou množinou však čas prvního výstupu z dané množiny nemusí být automaticky markovským časem. Diskusi tohoto problému provedeme podrobněji později. Nejdříve si uvedeme ještě několik základní objektů a pojmů, které jsou důležité pro teorii martingalů a náhodných procesů vůbec.

Definice 1.21. *Pro markovský čas $\tau : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ definujeme* ***σ-algebru událostí do času τ***

$$\mathcal{F}_\tau = \{F \in \mathcal{F}_{+\infty} : \forall t \in T \text{ je } F \cap [\tau \le t] \in \mathcal{F}_t\}$$

a když $(S_t, t \in T)$ je náhodný proces, pak definujeme jeho ***zastavení v čase τ*** *jako*

$$S_\tau(\omega) = \begin{cases} S_{\tau(\omega)}(\omega) & \text{pokud } \tau(\omega) \in T, \\ 0 & \text{pokud } \tau(\omega) = +\infty. \end{cases}$$

Uvědomme si základní vlastnosti definovaných pojmů a vztahy mezi nimi.

Tvrzení 1.22. *Nechť $\tau : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$. Pak $\mathcal{F}_\tau$ je σ-algebra a τ je $\mathcal{F}_\tau$-měřitelná n.v.*

Důkaz: Nejdříve ověříme, že $\mathcal{F}_\tau$ je σ-algebra a pak teprve měřitelnost n.v. τ.

1. Ověříme, že $\mathcal{F}_\tau$ splňuje vlastnosti σ-algebry.
   Zřejmě $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$, protože $\Omega \cap [\tau \le t] = [\tau \le t] \in \mathcal{F}_t$ pro každé $t \in T$.
   Když $F \in \mathcal{F}_\tau$, pak i $\Omega - F \in \mathcal{F}_\tau$, neboť $(\Omega - F) \cap [\tau \le t] = [\tau \le t] - F \cap [\tau \le t] \in \mathcal{F}_t$ pro každé $t \in T$.
   Když $F_k \in \mathcal{F}_\tau$ pro $k \in \mathbb{N}$, pak i $\bigcup_{k=1}^{+\infty} F_k \in \mathcal{F}_\tau$, neboť $\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} F_k\right) \cap [\tau \le t] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (F_k \cap [\tau \le t]) \in \mathcal{F}_t$ pro každé $t \in T$.

2. N.v. τ je $\mathcal{F}_\tau$-měřitelná, neboť pro každé $t \in T$ je $[\tau \le t] \in \mathcal{F}_\tau$. Přesvědčíme se o tom průnikem s testovacími množinami $[\tau \le t] \cap [\tau \le s] = [\tau \le \min\{t, s\}] \in \mathcal{F}_s$ pro každé $s \in T$.

Q.E.D

Lemma 1.23. *Nechť $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ je filtrace a $\tau \equiv t_0$, kde $t_0 \in T$ je pevné. Pak τ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ a $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{t_0}$.*

Důkaz: Zřejmě τ je markovský čas, neboť $[\tau \le t] = \emptyset$ pro $t < t_0$ a $[\tau \le t] = \Omega$ pro $t \ge t_0$.
Tím pádem také $F \in \mathcal{F}_\tau \Leftrightarrow \forall t \in T : \; F \cap [\tau \le t] \in \mathcal{F}_t \Leftrightarrow F \in \mathcal{F}_{t_0}$.

Q.E.D

Tvrzení 1.24. *Nechť $\tau : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$.*

(i) Pro každé $t \in T$ je $\min\{\tau, t\}$ markovský čas a je to $\mathcal{F}_t$-měřitelná n.v.

(ii) Když $\rho : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ je $\mathcal{F}_\tau$-měřitelná n.v. a $\rho \ge \tau$, potom je ρ také markovský čas.

Důkaz:

1. Vezměme $s \in T$ a ověřme definici markovského času.
   Pro $s < t$ platí $[\min\{\tau, t\} \le s] = [\tau \le s] \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.
   Pro $s \ge t$ platí $[\min\{\tau, t\} \le s] = \Omega \in \mathcal{F}_t$.
   Ukázali jsme, že $\min\{\tau, t\}$ je markovský čas a $\mathcal{F}_t$-měřitelná n.v.

2. Pro $t \in T$ dostáváme
   $[\rho \le t] = [\rho \le t] \cap [\tau \le t] \in \mathcal{F}_t$ protože $\rho \ge \tau$ a $[\rho \le t] \in \mathcal{F}_\tau$.

Q.E.D

Tvrzení 1.25. *Nechť $\tau, \rho : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ jsou markovské časy vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$.*

(i) Pak $\min\{\tau, \rho\}$ a $\max\{\tau, \rho\}$ jsou markovské časy.

(ii) Když $\rho \le \tau$, pak $\mathcal{F}_\rho \subset \mathcal{F}_\tau$.

(iii) Množiny $[\rho \le \tau]$, $[\rho \ge \tau]$, $[\rho = \tau]$, $[\rho < \tau]$ a $[\rho > \tau]$ patří do σ-algebry $\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\rho$.

(iv) Když $F \in \mathcal{F}_\rho$, potom $F \cap [\rho \le \tau] \in \mathcal{F}_\tau$.

Důkaz:

1. Pro $t \in T$ platí $[\min\{\tau, \rho\} \le t] = [\tau \le t] \cup [\rho \le t] \in \mathcal{F}_t$ a $[\max\{\tau, \rho\} \le t] = [\tau \le t] \cap [\rho \le t] \in \mathcal{F}_t$. Ověřili jsme tedy, že $\min\{\tau, \rho\}$ a $\max\{\tau, \rho\}$ jsou markovské časy.

2. Nechť $\rho \le \tau$ a $F \in \mathcal{F}_\rho$. Pak pro $t \in T$ platí $F \cap [\tau \le t] = (F \cap [\rho \le t]) \cap [\tau \le t] \in \mathcal{F}_t$. Tudíž $F \in \mathcal{F}_\tau$.

3. Stačí ověřit, že $[\rho \le \tau] \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\rho$. Pro zbylé množiny plyne tato vlastnost buď prohozením pořadí markovských časů nebo z rozpisu $[\rho = \tau] = [\rho \le \tau] \cap [\rho \ge \tau]$ a $[\rho < \tau] = \Omega - [\rho \ge \tau]$.
   Vezměme $t \in T$.
   Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí
$$
\begin{aligned}
[\rho \le \tau] \cap [\tau \le t] &= \bigcup_{k=0}^{+\infty} \left([\rho \le \tau] \cap [t - (k+1)2^{-n} < \tau \le t - k2^{-n}]\right) \\
&\subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} \left([\rho \le t - k2^{-n}] \cap [t - (k+1)2^{-n} < \tau \le t - k2^{-n}]\right) \\
&\subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} \left([\rho < \tau + 2^{-n}] \cap [t - (k+1)2^{-n} < \tau \le t - k2^{-n}]\right) \\
&= [\rho < \tau + 2^{-n}] \cap [\tau \le t], \\
[\rho \le \tau] \cap [\rho \le t] &= \bigcup_{k=0}^{+\infty} \left([\rho \le \tau] \cap [t - (k+1)2^{-n} < \rho \le t - k2^{-n}]\right) \\
&\subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} \left([t - (k+1)2^{-n} < \tau] \cap [t - (k+1)2^{-n} < \rho \le t - k2^{-n}]\right) \\
&\subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} \left([\rho - 2^{-n} < \tau] \cap [t - (k+1)2^{-n} < \rho \le t - k2^{-n}]\right) \\
&= [\rho - 2^{-n} < \tau] \cap [\tau \le t].
\end{aligned}
$$
   Potom platí
$$
\begin{aligned}
[\rho \le \tau] \cap [\tau \le t] &= \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=0}^{+\infty} \left([\rho \le t - k2^{-n}] \cap [t - (k+1)2^{-n} < \tau \le t - k2^{-n}]\right) \in \mathcal{F}_t, \\
[\rho \le \tau] \cap [\rho \le t] &= \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=0}^{+\infty} \left([t - (k+1)2^{-n} < \tau] \cap [t - (k+1)2^{-n} < \rho \le t - k2^{-n}]\right) \in \mathcal{F}_t.
\end{aligned}
$$
   Tím jsme ověřili, že $[\rho \le \tau] \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\rho$.

4. Víme již, že $[\rho \le \tau] \in \mathcal{F}_\rho$; viz (iii); proto pro $t \in T$ a $F \in \mathcal{F}_\rho$ platí
   $F \cap [\rho \le \tau] \cap [\tau \le t] = (F \cap [\rho \le t]) \cap ([\rho \le \tau] \cap [\rho \le t]) \cap [\tau \le t] \in \mathcal{F}_t$.
   Ověřili jsme, že $F \cap [\rho \le \tau] \in \mathcal{F}_\tau$.

Q.E.D

Za přirozených předpokladů na indexovou množinu je supremum i infimum spočetně mnoha markovských časů opět markovským časem.

Tvrzení 1.26. *Nechť $T \subset \mathbb{R}$ je uzavřená množina a $\tau_n : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$ jsou markovské časy vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$.*

Pak $\sup\{\tau_n : n \in \mathbb{N}\} : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$.

Důkaz: Díky uzavřenosti indexové množiny T je $\sup\{\tau_n : n \in \mathbb{N}\}$ buď $+\infty$, nebo leží v množině T. Pro $t \in T$ platí $[\sup\{\tau_n : n \in \mathbb{N}\} \le t] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[\tau_n \le t] \in \mathcal{F}_t$.

Q.E.D

Tvrzení 1.27. *Nechť $T \subset \mathbb{R}$ je uzavřená množina a $\tau_n : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$ jsou markovské časy vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$.*

Když $\inf\{\tau_n : n \in \mathbb{N}\} > -\infty$, pak $\inf\{\tau_n : n \in \mathbb{N}\} : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_{t+}, t \in T)$.

Je-li navíc filtrace $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ zprava spojitá, pak $\inf\{\tau_n : n \in \mathbb{N}\} : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$.

Důkaz:

1. Díky uzavřenosti množiny T a předpokladu $\inf\{\tau_n : n \in \mathbb{N}\} > -\infty$ je $\inf\{\tau_n : n \in \mathbb{N}\}$ buď $+\infty$, nebo leží v množině T.

2. Nechť $t \in T$ a $\inf\{s \in T : s > t\} = t$.

   Pak pro každé $s \in T$, $s > t$ platí $[\inf\{\tau_n : n \in \mathbb{N}\} < s] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\tau_n < s] \in \mathcal{F}_s$.

   Tudíž $[\inf\{\tau_n : n \in \mathbb{N}\} \le t] \in \mathcal{F}_{t+}$.

3. Nechť $t \in T$ a $\inf\{s \in T : s > t\} > t$.

   Pak $[\inf\{\tau_n : n \in \mathbb{N}\} \le t] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\tau_n \le t] \in \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$.

Tím jsme ověřili, že $\inf\{\tau_n : n \in \mathbb{N}\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_{t+}, t \in T)$.
Je-li filtrace $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ zprava spojitá, t.j. $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ pro každé $t \in T$, pak evidentně $\inf\{\tau_n : n \in \mathbb{N}\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$.

Q.E.D

Nyní se vraťme k vlastnostem času prvého výstupu náhodného procesu z dané množiny.

Definice 1.28. *Nechť $(S_t, t \in T)$ je náhodný proces a $\tau : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$. **Čas prvního výstupu** procesu $(S_t, t \in T)$ z množiny $B \subset \mathbb{R}$ po čase τ definujeme jako $\rho_{B,\tau} = \inf\{t \in T : S_t \notin B, \tau \le t\}$.*

Podobně můžeme uvažovat **čas prvního vstupu** procesu $(S_t, t \in T)$ do množiny $B \subset \mathbb{R}$ po čase τ jako $\sigma_{B,\tau} = \inf\{t \in T : S_t \in B, \tau \le t\}$. Stačí se však zabývat pouze časem výstupu, neboť čas prvého vstupu do množiny $B \subset \mathbb{R}$ po čase τ je shodný s časem prvého výstupu z množiny $\mathbb{R} \setminus B$ po čase τ.

Tvrzení 1.29. *Nechť $D \subset T \subset \mathbb{R}$ a $D \cap (a, b)$ je konečná množina pro každé $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť $B \subset \mathbb{R}$ je borelovská množina, $(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-adaptovaný proces a $\tau : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$.*

Pak $\rho := \min\{t \in D : S_t \notin B, \tau \le t\} : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$.

Důkaz: Struktura D zaručuje, že konečného infima v definici zobrazení ρ se vždy nabývá. To znamená, že ρ je dobře definováno a pro každé $t \in T$ platí

$$[\rho \le t] = \bigcup_{s \le t, s \in D} [S_s \notin B] \cap [\tau \le s] \in \mathcal{F}_t \text{ , neboť } D \text{ je nejvýše spočetná.}$$

Q.E.D

V následujícím důkazech několikrát použijeme technické lemma.

Lemma 1.30. *Když $T \subset \mathbb{R}$ je uzavřená množina a $\varepsilon > 0$, pak existuje $D \subset T$ tak, že*

(i) $D \cap (a, b)$ je konečná množina pro každé $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$;

(ii) pro každé $t \in T$ existuje $s \in D$ tak, že $t \leq s < t + \varepsilon$.

Důkaz: Požadované vlastnosti má například volba

$$D := \{\max\{s \in T \,:\, (k-1)\varepsilon < s \leq k\varepsilon\} \,:\, k \in I\}, \text{ kde } I := \{k \in \mathbb{Z} \,:\, \exists\, s \in T, (k-1)\varepsilon < s \leq k\varepsilon\}.$$

Tato volba evidentně splňuje (i), neboť každý z intervalů $((k-1)\varepsilon, k\varepsilon]$ obsahuje nejvýše jeden bod z D. K nahlédnutí vlastnosti (ii) si stačí pouze uvědomit, že maxima existují, protože T je uzavřená množina, a že když $t \in T$, pak existuje $k \in \mathbb{Z}$ tak, že $(k-1)\varepsilon < t \leq k\varepsilon$. Tudíž $k \in I$ a

$$(k-1)\varepsilon < t \leq \max\{s \in T \,:\, (k-1)\varepsilon < s \leq k\varepsilon\} \leq k\varepsilon < t + \varepsilon.$$

Q.E.D

Tvrzení 1.31. *Nechť $T \subset \mathbb{R}$ je uzavřená množina, $(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-adaptovaný proces a $\tau : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$.*

Když $(S_t, t \in T)$ je zprava spojitý proces a $F \subset \mathbb{R}$ je uzavřená množina, pak $\rho_{F,\tau} : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_{t+}, t \in T)$.

Je-li navíc filtrace $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ zprava spojitá, pak $\rho_{F,\tau} : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$.

Důkaz: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ podle lemmatu 5.30 existuje nejvýše spočetná množina $D_n \subset T$ tak, že pro každé $t \in T$ existuje $d \in D_n$ s vlastností $t \leq d < t + 2^{-n}$ a $D_n \cap (a, b)$ je konečná množina pro každé $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
Pak $\rho_n := \min\{t \in D_n \,:\, S_t \notin F, \tau \leq t\} : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ podle tvrzení 5.29.

1. Evidentně $\rho_{F,\tau} \leq \rho_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tudíž podle tvrzení 5.27 je $\inf\{\rho_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_{t+}, t \in T)$.

2. Nyní ukážeme rovnost $\rho_{F,\tau} = \inf\{\rho_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.

   Tato rovnost se ověří tak, že uvážíme $\omega \in \Omega$ pro něž $\rho_{F,\tau}(\omega) \in T$ a $\varepsilon > 0$.

   Pak existuje $t \in T$ takové, že $t - \varepsilon < \rho_{F,\tau}(\omega) \leq t$ a $S_t(\omega) \notin F$, $\tau(\omega) \leq t$.

   Množina F je uzavřená a proces $(S_t, t \in T)$ je zprava spojitý, proto existuje $0 < \delta \leq \varepsilon$ tak, že pro každé $s \in T$, $t \leq s < t + \delta$ je $S_s(\omega) \notin F$.

   Odtud pro $n \in \mathbb{N}$, $2^{-n} < \delta$ je $\rho_n(\omega) < t + \delta \leq \rho_{F,\tau}(\omega) + 2\varepsilon$.

   Tím jsme ověřili, že pro každé $\omega \in \Omega$ platí $\rho_{F,\tau}(\omega) = \inf\{\rho_n(\omega) \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.

Tím jsme ukázali, že $\rho_{F,\tau}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_{t+}, t \in T)$.
Pokud je filtrace zprava spojitá, pak je $\rho_{F,\tau}$ automaticky markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$.

Q.E.D

Tvrzení 1.32. *Nechť T je uzavřená množina, $(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-adaptovaný proces a $\tau : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$.*

Když $(S_t, t \in T)$ je spojitý proces a $G \subset \mathbb{R}$ je otevřená množina, pak $\rho_{G,\tau} : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$.

Důkaz: Množina G je otevřená a proto existují uzavřené množiny $F_n \subset G$, $n \in \mathbb{N}$ takové, že $F_1 \subset \mathsf{int}\,(F_2) \subset F_2 \subset \mathsf{int}\,(F_3) \subset \;\ldots.$ a $\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n = G$.

Pak evidentně $\rho_{F_1,\tau} \leq \rho_{F_2,\tau} \leq \rho_{F_3,\tau} \leq \ldots. \leq \rho_{G,\tau}$ a $\sup\{\rho_{F_n,\tau} \,:\, n \in \mathbb{N}\} \leq \rho_{G,\tau}$.

1. Z uzavřenosti indexové množiny T a faktu $\rho_{G,\tau} \geq \tau$ je $\rho_{G,\tau} : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$.
2. Nyní ukážeme nerovnost $\sup\{\rho_{F_n,\tau} : n \in \mathbb{N}\} \geq \rho_{G,\tau}$.
   Nechť $\omega \in \Omega$, $t \in T$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\rho_{F_n,\tau}(\omega) < t$.
   Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $s_n \in T$ tak, že $S_{s_n}(\omega) \notin F_n$ a $\tau(\omega) \leq s_n < t$.
   Vyberme konvergentní podposloupnost s_{n_k}, $\lim\limits_{k\to+\infty} s_{n_k} = q$.
   Jistě $\tau(\omega) \leq q \leq t$ a z uzavřenosti T je $q \in T$.
   Ze spojitosti procesu $\lim\limits_{k\to+\infty} S_{s_{n_k}}(\omega) = S_q(\omega) \notin \mathsf{int}\,(F_n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a tudíž $S_q(\omega) \notin G$.
   To znamená, že $\rho_{G,\tau} \leq t$.

   Takto jsme zjistili, že $\rho_{G,\tau} = \sup\{\rho_{F_n,\tau} : n \in \mathbb{N}\}$.
3. Podle tvrzeni 5.31 pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou $\rho_{F_n,\tau}$ markovské časy vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_{t+}, t \in T)$.
   Podle tvrzení 5.26 je $\rho_{G,\tau} = \sup\{\rho_{F_n,\tau} : n \in \mathbb{N}\}$ markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_{t+}, t \in T)$.
4. Ještě zbývá ukázat, že $\rho_{G,\tau}$ je markovský čas vzhledem k původní filtraci.
   Vezměme proto $t \in T$ a rozlišme tři případy.
   (a) Když $t = \min\{T\}$, pak
   $$[\rho_{G,\tau} \leq t] = [\rho_{G,\tau} = t] = [S_t \notin G] \in \mathcal{F}_t.$$
   (b) Když $t > \min\{T\}$ a $\hat{t} = \max\{s \in T : s < t\} < t$, pak
   $$[\rho_{G,\tau} \leq t] = \left[\rho_{G,\tau} \leq \hat{t}\,\right] \cup \left(\left[\rho_{G,\tau} > \hat{t}\,\right] \cap [S_t \notin G]\right) \in \mathcal{F}_t.$$
   (c) Když $t > \min\{T\}$ a $\hat{t} = \max\{s \in T : s < t\} = t$, pak existuje posloupnost $s_k \in T$, $s_k < t$ taková, že $s_k \nearrow t$.
   Množina G je otevřená, množina F_n je uzavřená a $F_n \subset G$, pak jev $\rho_{G,\tau} \leq t$ implikuje $\rho_{F_n,\tau} < t$.
   Proto platí
   $$[\rho_{G,\tau} \leq t] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{+\infty} [\rho_{F_n,\tau} \leq s_k] \in \mathcal{F}_t.$$

Ověřili jsme, že $\rho_{G,\tau} = \sup\{\rho_{F_n,\tau} : n \in \mathbb{N}\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$.

Q.E.D

Tvrzení 1.33. *Nechť T je uzavřená množina, $(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-adaptovaný proces a $\tau : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$.*

Když $(S_t, t \in T)$ je spojitý proces a $G \subset \mathbb{R}$ je G_δ-množina, pak $\rho_{G,\tau} : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_{t+}, t \in T)$.

Je-li navíc filtrace $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ zprava spojitá, pak $\rho_{G,\tau} : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$.

Důkaz:

1. Z uzavřenosti indexové množiny T a faktu $\rho_{G,\tau} \geq \tau$ je $\rho_{G,\tau} : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$.
2. Množina G je G_δ a tak existují otevřené množiny $G_n \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n = G$.
   Podle tvrzeni 5.32 pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou $\rho_{G_n,\tau}$ markovské časy vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$.
   Jistě $\inf\{\rho_{G_n,\tau} : n \in \mathbb{N}\} \geq \rho_{G,\tau}$. Nyní ukážeme opačnou nerovnost.
   Nechť $\omega \in \Omega$, $t \in T$ a $\rho_{G,\tau}(\omega) < t$.

Pak existuje $s \in T$ tak, že $S_s(\omega) \notin G$ a $\tau(\omega) \leq s < t$.

Tudíž existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $S_s(\omega) \notin G_n$, a proto $\inf\{\rho_{G_n,\tau} : n \in \mathbb{N}\} < t$.

Zjistili jsme, že $\inf\{\rho_{G_n,\tau} : n \in \mathbb{N}\} = \rho_{G,\tau}$.

Tvrzení proto plyne z tvrzení 5.27.

Q.E.D

Myšlenka postupné aproximace použitá v důkazech tvrzení 5.31, 5.32 a 5.33 je vyčerpána. Pro množiny, které jsou $G_{\delta\sigma} \setminus G_\delta$, již konstrukce nefunguje.

Pro ilustraci si uveďme příklad, kdy výstup procesu z množiny není markovským časem.

Příklad 1.11. Uvažujme situaci, kdy $T = \Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathbb{B}([0,1])$ a $P = \lambda/_{[0,1]}$, kde λ je Lebesgueova míra. Nechť dále $A \subset [0,1]$ není borelovská množina. Definujme nyní

$$\begin{aligned} X_t(\omega) &= 1 \quad \text{pokud} \quad t = \omega \in A, \\ &= 0 \quad \text{jinak.} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Uvažujme τ čas prvého výstupu procesu X z jednobodové množiny $\{0\}$. Pak

$$\begin{aligned} \tau(\omega) \quad = \quad \min\{t \in [0,1] : X_t \neq 0\} \quad &= \quad \omega \quad \text{pokud} \quad \omega \in A, \\ &= \quad +\infty \quad \text{jinak.} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Odtud $[\tau \leq 1] = A$ je neborelovská množina a proto τ není měřitelné zobrazení. Není tedy náhodnou veličinou a tedy ani markovským časem.

△

Zbývá ještě prodiskutovat měřitelnost zastavení procesu S_τ.

Tvrzení 1.34. *Nechť $\emptyset \neq D \subset T$ je nejvýše spočetná množina, $(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-adaptovaný proces a $\tau : \Omega \to D \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$. Pak S_τ je $\mathcal{F}_\tau$-měřitelná n.v.*

Důkaz: Pro $t \in T$ a B borelovskou podmnožinu $\mathbb{R}$ platí $[S_\tau \in B] \cap [\tau \leq t] = \bigcup_{\substack{s \leq t \\ s \in D}} [S_s \in B, \tau = s] \in \mathcal{F}_t$, protože množina D je nejvýše spočetná a pro každé $s \in D$, $s \leq t$ je $[S_s \in B, \tau = s] \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

Q.E.D

Nabývá-li markovský čas nespočetně hodnot, pak již S_τ nemusí být $\mathcal{F}_\tau$-měřitelná n.v. Dokonce se může stát, že S_τ není ani náhodná veličina; t.j. není ani $\mathcal{A}$-měřitelná. Musíme vědět více o trajektoriích procesu. V tomto případě potřebujeme jejich, alespoň jednostrannou, spojitost.

Tvrzení 1.35. *Nechť $T \subset \mathbb{R}$ je uzavřená množina, $(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-adaptovaný proces a $\tau : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t, t \in T)$. Když je proces $(S_t, t \in T)$ zprava spojitý a filtrace $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ je zprava spojitá, pak S_τ je $\mathcal{F}_\tau$-měřitelná n.v.*

Důkaz: Podle lemmatu 5.30 existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina $A_n \subset T$ taková, že $A_n \cap (\alpha, \beta)$ je konečná množina pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ a pro každé $t \in T$ existuje $a \in A_n$ tak, že $t \leq a < t + 2^{-n}$.
Definujme $\tau_n = \inf\{a \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n : \tau \leq a\}$.
Podle tvrzení 5.24 (ii) je τ_n markovský čas, neboť $\tau_n \geq \tau$ a τ_n je $\mathcal{F}_\tau$-měřitelná n.v., protože je měřitelnou funkcí τ.
Z konstrukce vyplývá, že τ_n nabývá nejvýše spočetně hodnot (a to z množiny $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$). Podle tvrzeni 5.34 víme, že S_{τ_n} je $\mathcal{F}_{\tau_n}$-měřitelná n.v.
Dále z konstrukce dostáváme, že $\tau_n \searrow \tau$ a tak podle tvrzení 5.25 (ii) je $\mathcal{F}_{\tau_1} \supset \mathcal{F}_{\tau_2} \supset \mathcal{F}_{\tau_3} \supset \ldots$.
Vyšetřovaný proces je spojitý zprava a proto $\lim_{n \to +\infty} S_{\tau_n} = S_\tau$. Tudíž n.v. S_τ je $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathcal{F}_{\tau_n}$-měřitelná.

Nyní stačí ukázat, že $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathcal{F}_{\tau_n} = \mathcal{F}_\tau$.

1. Inkluze $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathcal{F}_{\tau_n} \supset \mathcal{F}_\tau$ plyne opět z tvrzení 5.25 (ii).

2. Vezměme $A \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathcal{F}_{\tau_n}$.

   Pak pro každé $u \in T$ a $n \in \mathbb{N}$ je $A \cap [\tau_n \leq u] \in \mathcal{F}_u$ a také $A \cap [\tau_n < u] \in \mathcal{F}_u$.

   Zafixujme nyní $t \in T$.

   Když $t < \inf\{s \in T : t < s\}$, potom $A \cap [\tau \leq t] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A \cap [\tau_n \leq t] \in \mathcal{F}_t$.

   Když $t = \inf\{s \in T : t < s\}$, potom ze spojitosti zprava filtrace dostáváme

$$A \cap [\tau \leq t] = \bigcap_{\substack{s>t \\ s\in T}} A \cap [\tau < s] = \bigcap_{\substack{s>t \\ s\in T}} \bigcup_{n=1}^{+\infty} A \cap [\tau_n < s] \in \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t.$$

   Tudíž $A \in \mathcal{F}_\tau$.

Tím jsme ověřili, že S_τ je $\mathcal{F}_\tau$-měřitelná n.v.

Q.E.D

Kapitola 2

Optional Sampling Theorem a Optional Stopping Theorem

V této kapitole se budeme zabývat podmínkami pro zachování submartingalové vlastnosti při změně času.

Tvrzení 2.1. *Nechť $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-submartingal a $\tau, \rho : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ jsou markovské časy vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$.*

Když existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $\rho \leq \tau \leq k$, pak $S_\tau, S_\rho \in \mathbb{L}_1$ a $\mathsf{E}\left[S_\tau \mid \mathcal{F}_\rho\right] \geq S_\rho$ s.j.

Důkaz:

1. Podle tvrzení 5.34 víme, že S_τ je $\mathcal{F}_\tau$-měřitelná n.v. a S_ρ je $\mathcal{F}_\rho$-měřitelná n.v. Jejich integrovatelnost plyne z rozpisu
   $S_\tau = \sum\limits_{n=1}^{k} S_n \cdot \mathbb{I}_{[\tau=n]} \in \mathbb{L}_1$, $S_\rho = \sum\limits_{n=1}^{k} S_n \cdot \mathbb{I}_{[\rho=n]} \in \mathbb{L}_1$.

2. Pro odhad podmíněné střední hodnoty si zavedeme pomocné veličiny $\Lambda_n = \min\{\tau, \rho + n\}$. Pro každé $n = 0, 1, \ldots, k-1$ je Λ_n markovský čas, plyne to z kombinace tvrzení 5.24 část (ii) a tvrzení 5.25 část (i). Dále platí $\Lambda_0 = \rho$, $\Lambda_{k-1} = \tau$ a $\Lambda_n \leq \Lambda_{n+1} \leq \Lambda_n + 1$.

   Podmíněnou střední hodnotu nejdříve rozepíšeme $\mathsf{E}\left[S_\tau \mid \mathcal{F}_\rho\right] = \sum\limits_{n=0}^{k-2} \mathsf{E}\left[S_{\Lambda_{n+1}} - S_{\Lambda_n} \,\middle|\, \mathcal{F}_\rho\right] + S_\rho$ s.j.

   Nyní pro každé $n = 0, 1, \ldots, k-2$ ukážeme, že je příslušná podmíněná střední hodnota nezáporná. Vezměme $F \in \mathcal{F}_\rho$ a počítejme

   $\int\limits_F \left(S_{\Lambda_{n+1}} - S_{\Lambda_n}\right) \mathrm{d}\mathsf{P} = \int\limits_{F \cap [\tau > \rho+n]} \left(S_{\Lambda_{n+1}} - S_{\Lambda_n}\right) \mathrm{d}\mathsf{P} = \sum\limits_{j=1}^{k-n-1} \int\limits_{F \cap [\rho=j] \cap [\tau > j+n]} \left(S_{j+n+1} - S_{j+n}\right) \mathrm{d}\mathsf{P} \geq 0$.

   Nezápornost plyne z toho, že $(F \cap [\rho = j]) \cap [\tau > j+n] \in \mathcal{F}_{j+n}$ a $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-submartingal.

   Tudíž $\mathsf{E}\left[S_{\Lambda_{n+1}} - S_{\Lambda_n} \,\middle|\, \mathcal{F}_\rho\right] \geq 0$ s.j. pro každé $n = 0, 1, \ldots, k-2$ a tak $\mathsf{E}\left[S_\tau \mid \mathcal{F}_\rho\right] \geq S_\rho$ s.j.

Q.E.D

Podmínku omezenosti markovských časů lze nahradit obecnější podmínkou. Musíme však předpokládat integrovatelnost zastavení submartingalu v obou markovských časech.

Tvrzení 2.2. *Nechť $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-submartingal a $\tau, \rho : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ jsou markovské časy vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$.*

Když $\rho \leq \tau$, $\mathsf{P}(\tau < +\infty) = 1$, $S_\tau, S_\rho \in \mathbb{L}_1$ a $\liminf\limits_{n \to +\infty} \int\limits_{[\tau > n]} (S_n)^+ \,\mathrm{d}\mathsf{P} = 0$, potom $\mathsf{E}\left[S_\tau \mid \mathcal{F}_\rho\right] \geq S_\rho$ s.j.

Důkaz: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $\tau_n = \min\{\tau, n\}$ a $\rho_n = \min\{\rho, n\}$. Podle tvrzení 5.24 část (i) jsme takto definovali markovské časy.
Podle tvrzeni 0.1 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\mathsf{E}\left[S_{\tau_n} \mid \mathcal{F}_{\rho_n}\right] \geq S_{\rho_n}$ s.j.
Tuto nerovnost však potřebujeme ukázat pro původní markovské časy. Uděláme to přímým ověřením definice podmíněné střední hodnoty.
Vezměme $F \in \mathcal{F}_\rho$ a uvědomme si, že $F \cap [\rho \leq n] \in \mathcal{F}_{\rho_n}$. Vyplývá to z toho, že $F \cap [\rho \leq n] \cap [\rho_n \leq j] = F \cap [\rho \leq j] \in \mathcal{F}_j$ pro $j < n$ a $F \cap [\rho \leq n] \cap [\rho_n \leq j] = F \cap [\rho \leq n] \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_j$ pro $j \geq n$.
Proto

$$\int_{F\cap[\rho\leq n]} S_{\tau_n}\,\mathsf{dP} \geq \int_{F\cap[\rho\leq n]} S_{\rho_n}\,\mathsf{dP} = \int_{F\cap[\rho\leq n]} S_\rho\,\mathsf{dP} \quad \text{pro všechna} \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Pro pravou stranu nerovnosti platí

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{F\cap[\rho\leq n]} S_\rho\,\mathsf{dP} = \int_{F\cap[\rho<+\infty]} S_\rho\,\mathsf{dP} = \int_F S_\rho\,\mathsf{dP},$$

   protože S_ρ je integrovatelná a $\mathsf{P}(\rho < +\infty) = 1$.

2. Pro levou stranu nerovnosti platí

$$\liminf_{n\to+\infty} \int\limits_{F\cap[\rho\leq n]} S_{\tau_n}\,\mathsf{dP} = \liminf_{n\to+\infty} \left(\int\limits_{F\cap[\tau\leq n]} S_\tau\,\mathsf{dP} + \int\limits_{F\cap[\rho\leq n<\tau]} S_n\,\mathsf{dP} \right) \leq \int\limits_F S_\tau\,\mathsf{dP}.$$

   Je tomu tak proto, že

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{F\cap[\tau\leq n]} S_\tau\,\mathsf{dP} = \int_{F\cap[\tau<+\infty]} S_\tau\,\mathsf{dP} = \int_F S_\tau\,\mathsf{dP},$$

   neboť S_τ je integrovatelná a $\mathsf{P}(\tau < +\infty) = 1$.
   Dále

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{F\cap[\rho\leq n<\tau]} S_n\,\mathsf{dP} \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{F\cap[\rho\leq n<\tau]} (S_n)^+\,\mathsf{dP} \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{[\tau>n]} (S_n)^+\,\mathsf{dP} = 0.$$

Pro každé $F \in \mathcal{F}_\rho$ dostáváme $\int\limits_F S_\tau\,\mathsf{dP} \geq \int\limits_F S_\rho\,\mathsf{dP}$.
Tím je ověřena definice podmíněné střední hodnoty a tak $\mathsf{E}\left[S_\tau \mid \mathcal{F}_\rho\right] \geq S_\rho$ s.j.

Q.E.D

Uvědomme si, že tvrzení 0.1 je speciálním případem tvrzení 0.2. Je tomu tak proto, že omezenost markovských časů implikuje integrovatelnost S_τ i S_ρ a také podmínku $\liminf\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{[\tau>n]} (S_n)^+\,\mathsf{dP} = 0$. Tvrzení 0.2 umožňuje ukázat věty o zachování submartingalové vlastnosti při zastavování v markovských časech.

Věta 2.3. (Optional Sampling Theorem) *Nechť $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-submartingal a $\tau_k : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ jsou pro každé $k \in \mathbb{N}$ markovské časy vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$.*
Když pro každé $k \in \mathbb{N}$ je $\tau_k \leq \tau_{k+1}$, $\mathsf{P}(\tau_k < +\infty) = 1$, $S_{\tau_k} \in \mathbb{L}_1$ a $\liminf\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{[\tau_k>n]} (S_n)^+\,\mathsf{dP} = 0$, potom $(S_{\tau_k}, k \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_{\tau_k}, k \in \mathbb{N})$-submartingal.

Důkaz: Submartingalovou vlastnost získáme použitím tvrzeni 0.2 pro každé $k \in \mathbb{N}$ zvlášť.

Q.E.D

V případě, kdy $\tau_k = \min\{\tau, k\}$ lze tvrzení trochu zesílit.

Věta 2.4. (Optional Stopping Theorem) *Nechť $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-submartingal a $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$.*
Označíme-li pro každé $k \in \mathbb{N}$ $\tau_k = \min\{\tau, k\}$, potom $(S_{\tau_k}, k \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_k, k \in \mathbb{N})$-submartingal.

Důkaz: Podle tvrzení 0.1 víme, že S_{τ_k} je $\mathcal{F}_{\tau_k}$-měřitelná n.v. a je také integrovatelná. Podle tvrzení 5.25 část (ii) je $\mathcal{F}_{\tau_k} \subset \mathcal{F}_k$ a tak S_{τ_k} je $\mathcal{F}_k$-měřitelná n.v. Musíme ještě ověřit submartingalovou vlastnost. Počítejme proto

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left[S_{\tau_{k+1}} - S_{\tau_k} \mid \mathcal{F}_k\right] &= \mathsf{E}\left[\left(S_{\tau_{k+1}} - S_{\tau_k}\right) \cdot \mathbb{I}_{[\tau>k]} \mid \mathcal{F}_k\right] = \mathsf{E}\left[\left(S_{k+1} - S_k\right) \cdot \mathbb{I}_{[\tau>k]} \mid \mathcal{F}_k\right] = \\ &= \mathbb{I}_{[\tau>k]} \cdot \mathsf{E}\left[\left(S_{k+1} - S_k\right) \mid \mathcal{F}_k\right] \geq 0 \quad \text{s.j.}\end{aligned}$$

Tím je ověřeno, že $(S_{\tau_k}, k \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_k, k \in \mathbb{N})$-submartingal.

Q.E.D

Je užitečné mít uvedené věty formulovány pro supermartingaly. Uveďme si je proto.

Tvrzení 2.5. *Nechť $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-supermartingal a $\tau, \rho : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ jsou markovské časy vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$.*

Když existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $\rho \leq \tau \leq k$, pak $S_\tau, S_\rho \in \mathbb{L}_1$ a $\mathsf{E}\left[S_\tau \mid \mathcal{F}_\rho\right] \leq S_\rho$ s.j.

Důkaz: Tvrzení je ekvivalentní s tvrzením 0.1. Stačí si pouze uvědomit, že $(-S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-submartingal.

Q.E.D

Tvrzení 2.6. *Nechť $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-supermartingal a $\tau, \rho : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ jsou markovské časy vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$.*

Když $\rho \leq \tau$, $\mathsf{P}(\tau < +\infty) = 1$, $S_\tau, S_\rho \in \mathbb{L}_1$ a $\liminf\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{[\tau>n]} (S_n)^- \, \mathsf{d}\mathsf{P} = 0$, potom $\mathsf{E}\left[S_\tau \mid \mathcal{F}_\rho\right] \leq S_\rho$ s.j.

Důkaz: Tvrzení je ekvivalentní s tvrzením 0.1. Stačí si pouze uvědomit, že $(-S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-submartingal.

Q.E.D

Věta 2.7. (Optional Sampling Theorem pro supermartingal) *Nechť $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-supermartingal a $\tau_k : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ jsou pro každé $k \in \mathbb{N}$ markovské časy vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$.*

Když pro každé $k \in \mathbb{N}$ je $\tau_k \leq \tau_{k+1}$, $\mathsf{P}(\tau_k < +\infty) = 1$, $S_{\tau_k} \in \mathbb{L}_1$ a $\liminf\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{[\tau_k>n]} (S_n)^- \, \mathsf{d}\mathsf{P} = 0$, potom $(S_{\tau_k}, k \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_{\tau_k}, k \in \mathbb{N})$-supermartingal.

Důkaz: Věta je ekvivalentní s tvrzením 0.3. Stačí si pouze uvědomit, že $(-S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-submartingal.

Q.E.D

Věta 2.8. (Optional Stopping Theorem pro supermartingal) *Nechť $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-supermartingal a $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$.*

Označíme-li pro každé $k \in \mathbb{N}$ $\tau_k = \min\{\tau, k\}$, potom $(S_{\tau_k}, k \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_k, k \in \mathbb{N})$-supermartingal.

Důkaz: Věta je ekvivalentní s tvrzením 0.4. Stačí si pouze uvědomit, že $(-S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-submartingal.

Q.E.D

2.1. Postačující podmínky

K ověření podmínek vyskytujících se v tvrzeních 0.2, 0.6 a ve větách 0.3, 0.7 mohou být s výhodou použita následující kritéria. Prvé kritérium je založeno na nezávislosti.

Lemma 2.9. *Nechť $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-adaptovaný proces a $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$, který je nezávislý s $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ a $\mathsf{P}(\tau < +\infty) = 1$. Potom*

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{[\tau>n]} (S_n)^+ \ \mathrm{dP} = 0 \iff \liminf_{n\to+\infty} \mathsf{E}\left[(S_n)^+\right] \cdot \mathsf{P}(\tau > n) = 0 \ , \tag{2.1}$$

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{[\tau>n]} (S_n)^- \ \mathrm{dP} = 0 \iff \liminf_{n\to+\infty} \mathsf{E}\left[(S_n)^-\right] \cdot \mathsf{P}(\tau > n) = 0 \ , \tag{2.2}$$

$$S_\tau \in \mathbb{L}_1 \iff \sum_{n=1}^{+\infty} \mathsf{E}\left[|S_n|\right] \cdot \mathsf{P}(\tau = n) < +\infty \tag{2.3}$$

Důkaz: Důkaz lemmatu je jednoduchý, neboť předpokládaná nezávislost implikuje

$$\begin{aligned}
\int_{[\tau>n]} (S_n)^+ \ \mathrm{dP} &= \mathsf{E}\left[(S_n)^+\right] \cdot \mathsf{P}(\tau > n) \ , \\
\int_{[\tau>n]} (S_n)^- \ \mathrm{dP} &= \mathsf{E}\left[(S_n)^-\right] \cdot \mathsf{P}(\tau > n) \ , \\
\mathsf{E}\left[|S_\tau|\right] &= \mathsf{E}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} |S_n| \cdot \mathbb{I}_{[\tau=n]}\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathsf{E}\left[|S_n|\right] \cdot \mathsf{P}(\tau = n) \ .
\end{aligned}$$

Q.E.D

Zde však přirozeně vzniká otázka, zda-li taková situace nastává. Odpovědí je následující lemma.

Lemma 2.10. *Nechť $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-submartingal a $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ je n.v. taková, že $\sigma(\tau)$ je nezávislá s $\mathcal{F}_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Označíme-li $\mathcal{G}_n = \sigma(\sigma(\tau) \cup \mathcal{F}_n)$, pak $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{G}_n, n \in \mathbb{N})$-submartingal a $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{G}_n, n \in \mathbb{N})$, který je nezávislý s $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$.*

Důkaz: Evidentně, $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{G}_n, n \in \mathbb{N})$, který je nezávislý s $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$. Z tvrzení 3.10 plyne, že $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{G}_n, n \in \mathbb{N})$-submartingal.

Q.E.D

Další dvě kritéria jsou založena na podmiňování. Prvé z nich splňuje například shora omezený submartingal, speciálně nekladný.

Lemma 2.11. *Nechť $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-adaptovaný proces a $U \in \mathbb{L}_1$ je taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $S_n \leq \mathsf{E}\left[U \mid \mathcal{F}_n\right]$ s.j. Když $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ a $\mathsf{P}(\tau < +\infty) = 1$, potom*

$$\mathsf{E}\left[(S_\tau)^+\right] \leq \mathsf{E}\left[(U)^+\right] \ , \tag{2.4}$$

$$\mathsf{E}\left[(S_\tau)^-\right] \leq \mathsf{E}\left[(U)^+\right] - \mathsf{E}\left[S_1\right] \ , \tag{2.5}$$

$$\mathsf{E}\left[|S_\tau|\right] \leq 2\mathsf{E}\left[(U)^+\right] - \mathsf{E}\left[S_1\right] \ , \tag{2.6}$$

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{[\tau>n]} (S_n)^+ \ \mathrm{dP} = 0 \ . \tag{2.7}$$

Důkaz: Kladná část je neklesající konvexní funkce. Pak podle tvrzení 3.12 víme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $(S_n)^+ \leq \mathsf{E}\left[(U)^+ \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right]$ s.j. Proto platí

$$\mathsf{E}\left[(S_\tau)^+\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{[\tau=n]} (S_n)^+ \ \mathrm{dP} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{[\tau=n]} (U)^+ \ \mathrm{dP} = \mathsf{E}\left[(U)^+\right] \ ,$$

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{[\tau>n]} (S_n)^+ \ \mathrm{dP} \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{[\tau>n]} (U)^+ \ \mathrm{dP} \leq \lim_{n\to+\infty} \int_{[\tau>n]} (U)^+ \ \mathrm{dP} = 0 \ .$$

Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[(S_\tau)^- \mathbb{I}_{[\tau\le n]}\right] &= \mathsf{E}\left[\left((S_\tau)^+ - S_\tau\right)\mathbb{I}_{[\tau\le n]}\right] = \mathsf{E}\left[(S_\tau)^+ \mathbb{I}_{[\tau\le n]}\right] - \mathsf{E}\left[S_{\min\{\tau,n\}}\right] + \mathsf{E}\left[S_n \mathbb{I}_{[\tau>n]}\right] \\
&\le \mathsf{E}\left[(U)^+ \mathbb{I}_{[\tau\le n]}\right] - \mathsf{E}\left[S_1\right] + \mathsf{E}\left[U\mathbb{I}_{[\tau>n]}\right] \ .
\end{aligned}$$

Jelikož $U \in \mathbb{L}_1$, můžeme udělat limitní přechod při $n \to +\infty$. Pak dostaneme

$$\mathsf{E}\left[(S_\tau)^-\right] \le \mathsf{E}\left[(U)^+\right] - \mathsf{E}\left[S_1\right] \ .$$

Ještě zbývá si uvědomit, že pro absolutní hodnotu platí

$$\mathsf{E}\left[|S_\tau|\right] = \mathsf{E}\left[(S_\tau)^+\right] + \mathsf{E}\left[(S_\tau)^-\right] \le 2\mathsf{E}\left[(U)^+\right] - \mathsf{E}\left[S_1\right] \ .$$

Q.E.D

Druhé splňuje například zdola omezený supermartingal, speciálně nezáporný.

Lemma 2.12. *Nechť $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-adaptovaný proces a $U \in \mathbb{L}_1$ je taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $S_n \ge \mathsf{E}\left[U \mid \mathcal{F}_n\right]$ s.j. Když $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ a $\mathsf{P}(\tau < +\infty) = 1$, potom*

$$\mathsf{E}\left[(S_\tau)^+\right] \le \mathsf{E}\left[(U)^-\right] + \mathsf{E}\left[S_1\right] \ , \tag{2.8}$$

$$\mathsf{E}\left[(S_\tau)^-\right] \le \mathsf{E}\left[(U)^-\right] \ , \tag{2.9}$$

$$\mathsf{E}\left[|S_\tau|\right] \le 2\mathsf{E}\left[(U)^-\right] + \mathsf{E}\left[S_1\right] \ , \tag{2.10}$$

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{[\tau>n]} (S_n)^- \, \mathrm{d}\mathsf{P} = 0 \ . \tag{2.11}$$

Důkaz: Posloupnost $(-S_n,\ n \in \mathbb{N})$ a náhodná veličina $-U$ splňují předpoklady lemmatu 1.11. Odtud již plyne tvrzení.

Q.E.D

Další kritérium splňuje například čas prvého výstupu z omezené borelovské množiny. Připomeňme ještě, že „$A \Longrightarrow B$ s.j." označuje implikaci, která platí skoro jistě. To znamená $\mathsf{P}(A \Longrightarrow B) = 1$ neboli $\mathsf{P}(A \cap \neg B) = 0$ či $\mathsf{P}(\neg A \cup B) = 1$.

Lemma 2.13. *Nechť $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-adaptovaný proces a $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$.*

Když $\mathsf{P}(\tau < +\infty) = 1$ a existují $c \in \mathbb{R}_+$ a posloupnost $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$ tak, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\tau > n_k \implies S_{n_k} \le c$ s.j., potom $\liminf\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{[\tau>n]} (S_n)^+ \, \mathrm{d}\mathsf{P} = 0$.

Důkaz: Důkaz lemmatu je jednoduchý, neboť za uvedených předpokladů je

$$\liminf_{n\to+\infty} \int\limits_{[\tau>n]} (S_n)^+ \, \mathrm{d}\mathsf{P} \le \liminf_{k\to+\infty} \int\limits_{[\tau>n_k]} (S_{n_k})^+ \, \mathrm{d}\mathsf{P} \le \liminf_{k\to+\infty} c \cdot \mathsf{P}(\tau > n_k) = c \cdot \mathsf{P}(\tau = +\infty) = 0 \ .$$

Q.E.D

Lemma 2.14. *Nechť $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-adaptovaný proces a $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$.*

Když $\mathsf{P}(\tau < +\infty) = 1$ a existují $c \in \mathbb{R}_+$ a posloupnost $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$ tak, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\tau > n_k \implies S_{n_k} \ge -c$ s.j., potom $\liminf\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{[\tau>n]} (S_n)^- \, \mathrm{d}\mathsf{P} = 0$.

Důkaz: Důkaz lemmatu je jednoduchý, neboť za uvedených předpokladů je

$$\liminf_{n\to+\infty} \int\limits_{[\tau>n]} (S_n)^- \ \mathsf{dP} \le \liminf_{k\to+\infty} \int\limits_{[\tau>n_k]} (S_{n_k})^- \ \mathsf{dP} \le \liminf_{k\to+\infty} c\cdot \mathsf{P}(\tau>n_k) = c\cdot\mathsf{P}(\tau=+\infty)=0\ .$$

Q.E.D

Lemma 2.15. *Nechť $(S_n, n\in\mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n\in\mathbb{N})$-adaptovaný proces a $\tau:\Omega\to\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_n, n\in\mathbb{N})$.*

Když $S_n\in\mathbb{L}_1$ pro každé $n\in\mathbb{N}$, $\tau\in\mathbb{L}_1$ a existují $c\in\mathbb{R}_+$ a $n_0\in\mathbb{N}$ tak, že pro každé $n\ge n_0$, $n\in\mathbb{N}$ platí $\tau>n \implies \mathsf{E}\left[|S_{n+1}-S_n| \mid \mathcal{F}_n\right]\le c$ s.j., potom pro každý ρ markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_n, n\in\mathbb{N})$ takový, že $\rho\le\tau$, máme $S_\rho\in\mathbb{L}_1$ a $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{[\rho>n]}|S_n|\ \mathsf{dP}=0$.

Důkaz: Položme $S_0\equiv 0$ a pro každé $n\in\mathbb{N}$ definujme $Y_n=\sum\limits_{k=1}^{n}|S_k-S_{k-1}|$. Pak

$$Y_\rho=\sum_{n=1}^{+\infty} Y_n\cdot\mathbb{I}_{[\rho=n]}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}|S_k-S_{k-1}|\right)\cdot\mathbb{I}_{[\rho=n]}=\sum_{k=1}^{+\infty}|S_k-S_{k-1}|\cdot\mathbb{I}_{[\rho\ge k]}$$

a odtud

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[Y_\rho] &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathsf{E}\left[|S_k-S_{k-1}|\cdot\mathbb{I}_{[\rho\ge k]}\right]\le\sum_{k=1}^{n_0-1}\mathsf{E}\left[|S_k-S_{k-1}|\right]+\sum_{k=n_0}^{+\infty}\mathsf{E}\left[|S_k-S_{k-1}|\cdot\mathbb{I}_{[\tau>k-1]}\right]=\\
&= \sum_{k=1}^{n_0-1}\mathsf{E}\left[|S_k-S_{k-1}|\right]+\sum_{k=n_0}^{+\infty}\mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left[|S_k-S_{k-1}| \mid \mathcal{F}_{k-1}\right]\cdot\mathbb{I}_{[\tau>k-1]}\right]\le\\
&\le \sum_{k=1}^{n_0-1}\mathsf{E}\left[|S_k-S_{k-1}|\right]+\sum_{k=n_0}^{+\infty}c\cdot\mathsf{P}(\tau>k-1)\le\sum_{k=1}^{n_0-1}\mathsf{E}\left[|S_k-S_{k-1}|\right]+c\cdot\mathsf{E}[\tau]<+\infty.
\end{aligned}$$

Z monotonie posloupnosti Y_n, $n\in\mathbb{N}$ dostáváme

$$\int\limits_{[\rho>n]}|S_n|\ \mathsf{dP}\le\int\limits_{[\rho>n]}Y_n\ \mathsf{dP}\le\int\limits_{[\rho>n]}Y_\rho\ \mathsf{dP}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0,$$

protože $Y_\rho\in\mathbb{L}_1$ a $\mathsf{P}(\rho<+\infty)=1$.
Evidentně $|S_n|\le Y_n$ a tak i $|S_\rho|\le Y_\rho$. Tudíž $S_\rho\in\mathbb{L}_1$, neboť měřitelnost plyne z tvrzení 5.34.

Q.E.D

Pokud martingal vznikl odečtením kompenzátoru od nezáporného náhodného procesu, pak z integrovatelnosti zastavení kompenzátoru lze usuzovat na integrovatelnost zastavení martingalu.

Lemma 2.16. *Nechť $(S_n, n\in\mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n\in\mathbb{N})$-adaptovaný proces, $S_n\ge 0$ pro všechna $n\in\mathbb{N}$ a $(K_n, n\in\mathbb{N})$ je jeho kompenzátor. Když ρ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_n, n\in\mathbb{N})$ takový, že $K_\rho\in\mathbb{L}_1$ a $\limsup\limits_{n\to+\infty}\mathsf{E}\left[(S_n-K_n)\,\mathbb{I}_{[\rho>n]}\right]>-\infty$, potom $S_\rho, S_\rho-K_\rho\in\mathbb{L}_1$.*

Důkaz: Nejdříve pro $k\in\mathbb{N}$ odhadneme

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[(S_\rho-K_\rho)\,\mathbb{I}_{[\rho\le k]}\right] &= \sum_{j=1}^{k}\mathsf{E}\left[(S_j-K_j)\,\mathbb{I}_{[\rho=j]}\right]=\\
&= \sum_{j=1}^{k}\mathsf{E}\left[(S_j-K_j)\,\mathbb{I}_{[\rho>j-1]}\right]-\sum_{j=1}^{k}\mathsf{E}\left[(S_j-K_j)\,\mathbb{I}_{[\rho>j]}\right]=\\
&= \mathsf{E}[S_1-K_1]+\sum_{j=1}^{k-1}\mathsf{E}\left[(S_j-K_j)\,\mathbb{I}_{[\rho>j]}\right]-\sum_{j=1}^{k}\mathsf{E}\left[(S_j-K_j)\,\mathbb{I}_{[\rho>j]}\right]=\\
&= \mathsf{E}[S_1-K_1]-\mathsf{E}\left[(S_k-K_k)\,\mathbb{I}_{[\rho>k]}\right].
\end{aligned}$$

Z nezápornosti S_ρ a z předpokladů lemmatu dostáváme

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left[S_\rho\right] &= \lim_{k\to+\infty} \mathsf{E}\left[S_\rho \mathbb{I}_{[\rho\le k]}\right] \le \liminf_{k\to+\infty} \mathsf{E}\left[\left(S_\rho - K_\rho\right)\mathbb{I}_{[\rho\le k]}\right] + \limsup_{k\to+\infty} \mathsf{E}\left[K_\rho \mathbb{I}_{[\rho\le k]}\right] \le \\ &\le \mathsf{E}\left[S_1 - K_1\right] + \mathsf{E}\left[K_\rho\right] - \limsup_{k\to+\infty} \mathsf{E}\left[\left(S_k - K_k\right)\mathbb{I}_{[\rho>k]}\right] < +\infty. \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že $S_\rho \in \mathbb{L}_1$. Pak také $S_\rho - K_\rho \in \mathbb{L}_1$.

Q.E.D

Lemma 2.17. *Nechť $(S_n, n\in\mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n\in\mathbb{N})$-adaptovaný proces, $S_n \ge 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $(K_n, n\in\mathbb{N})$ je jeho kompenzátor. Když ρ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_n, n\in\mathbb{N})$ takový, že $K_\rho \in \mathbb{L}_1$, a $K_1 \le K_2 \le K_3 \le \dots$, potom $S_\rho, S_\rho - K_\rho \in \mathbb{L}_1$.*

Důkaz: Stačí ověřit podmínku z předchozího lemmatu 1.16, a to

$$\limsup_{k\to+\infty} \mathsf{E}\left[\left(S_k - K_k\right)\mathbb{I}_{[\rho>k]}\right] \ge -\liminf_{k\to+\infty} \mathsf{E}\left[K_k \mathbb{I}_{[\rho>k]}\right] \ge -\liminf_{k\to+\infty} \mathsf{E}\left[K_\rho \mathbb{I}_{[\rho>k]}\right] = 0.$$

Q.E.D

2.2. Waldovy rovnosti

Použití lemmat 1.9, 1.15, 1.16 a 1.17 si ukážeme při odvozování Waldových rovností pro markovské časy.

Věta 2.18. (Waldovy rovnosti pro markovské časy) *Nechť $X_k, k\in\mathbb{N}$ jsou i.i.d. reálné n.v. a položme $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\sigma(X_n) \subset \mathcal{F}_n$ a σ-algebry $\mathcal{F}_n$ a $\sigma(X_{n+1})$ jsou nezávislé, a $\tau, \rho : \Omega \to \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ jsou markovské časy vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_n, n\in\mathbb{N})$, $\rho \le \tau$.*

(i) *Když $X_1, \tau \in \mathbb{L}_1$, pak $\mathsf{E}\left[S_\tau - \tau\cdot\mathsf{E}\left[X_1\right] \mid \mathcal{F}_\rho\right] = S_\rho - \rho\cdot\mathsf{E}\left[X_1\right]$ s.j.*

(ii) *Když $X_1 \in \mathbb{L}_2$, $\tau \in \mathbb{L}_1$ a τ je nezávislý s $\{X_k, k\in\mathbb{N}\}$, potom*
$\mathsf{E}\left[\left(S_\tau - \tau\cdot\mathsf{E}\left[X_1\right]\right)^2 - \tau\cdot\mathsf{Var}\left(X_1\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_\rho\right] = \left(S_\rho - \rho\cdot\mathsf{E}\left[X_1\right]\right)^2 - \rho\cdot\mathsf{Var}\left(X_1\right)$ *s.j.*

(iii) *Když $X_1 \in \mathbb{L}_2$, $\tau \in \mathbb{L}_1$ a existují $c \in \mathbb{R}_+$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \ge n_o$, $n \in \mathbb{N}$ platí $\tau > n \Longrightarrow \left|S_n - n\cdot\mathsf{E}\left[X_1\right]\right| \le c$ s.j., potom* $\mathsf{E}\left[\left(S_\tau - \tau\cdot\mathsf{E}\left[X_1\right]\right)^2 - \tau\cdot\mathsf{Var}\left(X_1\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_\rho\right] = \left(S_\rho - \rho\cdot\mathsf{E}\left[X_1\right]\right)^2 - \rho\cdot\mathsf{Var}\left(X_1\right)$ *s.j.*

(iv) *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \ne 0$ je takové, že $\mathsf{e}^{\alpha X_1} \in \mathbb{L}_1$. Když $\mathsf{P}\left(\tau < +\infty\right) = 1$ a τ je nezávislý s $\{X_k, k\in\mathbb{N}\}$, potom* $\mathsf{E}\left[\dfrac{\mathsf{e}^{\alpha S_\tau}}{\left(\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\alpha X_1}\right]\right)^\tau} \,\middle|\, \mathcal{F}_\rho\right] = \dfrac{\mathsf{e}^{\alpha S_\rho}}{\left(\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\alpha X_1}\right]\right)^\rho}$ *s.j.*

(v) *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \ne 0$ je takové, že $\mathsf{e}^{\alpha X_1} \in \mathbb{L}_1$ a $X_1, \tau \in \mathbb{L}_1$. Když existují $c \in \mathbb{R}_+$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \ge n_o$, $n \in \mathbb{N}$ platí $\tau > n \Longrightarrow \left|S_n - n\cdot\mathsf{E}\left[X_1\right]\right| \le c$ s.j., potom*

$$\mathsf{E}\left[\frac{\mathsf{e}^{\alpha S_\tau}}{\left(\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\alpha X_1}\right]\right)^\tau} \,\middle|\, \mathcal{F}_\rho\right] = \frac{\mathsf{e}^{\alpha S_\rho}}{\left(\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\alpha X_1}\right]\right)^\rho} \quad \textit{s.j.}$$

Důkaz: V příkladu 2.6 jsme odvodili, že:

a) Když $X_1 \in \mathbb{L}_1$, pak $\left(S_n - n\mathsf{E}\left[X_1\right], n\in\mathbb{N}\right)$ je $(\mathcal{F}_n, n\in\mathbb{N})$-martingal.

b) Když $X_1 \in \mathbb{L}_2$, pak $\left(\left(S_n - n\mathsf{E}\left[X_1\right]\right)^2 - n\mathsf{Var}\left(X_1\right), n\in\mathbb{N}\right)$ je $(\mathcal{F}_n, n\in\mathbb{N})$-martingal.

c) Když $\gamma \in \mathbb{R}$ je taková, že $\mathsf{e}^{\gamma X_1} \in \mathbb{L}_1$, pak $\left(\mathsf{e}^{\gamma S_n}\left(\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\gamma X_1}\right]\right)^{-n}, n\in\mathbb{N}\right)$ je $(\mathcal{F}_n, n\in\mathbb{N})$-martingal.

Nyní postupně přidáme předpoklady na uvažované markovské časy.

1. Když $X_1, \tau \in \mathbb{L}_1$, pak víme, že $(S_n - n \cdot \mathsf{E}[X_1], n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-martingal a platí

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left[|(S_{n+1} - (n+1) \cdot \mathsf{E}[X_1]) - (S_n - n \cdot \mathsf{E}[X_1])| \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathsf{E}\left[|X_{n+1} - \mathsf{E}[X_1]| \mid \mathcal{F}_n\right] \\ &= \mathsf{E}\left[|X_1 - \mathsf{E}[X_1]|\right] \quad \text{s.j.} \end{aligned}$$

Předpokládáme $\tau \in \mathbb{L}_1$ a tak jsou splněny předpoklady lemmatu 1.15. Podle tohoto lemmatu, τ a ρ splňují předpoklady tvrzení 0.2 a tak platí $\mathsf{E}[S_\tau - \tau \cdot \mathsf{E}[X_1] \mid \mathcal{F}_\rho] = S_\rho - \rho \cdot \mathsf{E}[X_1]$ s.j.

2. Když $X_1 \in \mathbb{L}_2$ a $\tau \in \mathbb{L}_1$ je nezávislý s $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$, pak víme, že $\big((S_n - n \cdot \mathsf{E}[X_1])^2 - n \cdot \mathsf{Var}(X_1), n \in \mathbb{N}\big)$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-martingal a platí

$$\begin{aligned} &\int_{[\tau > n]} \left|(S_n - n \cdot \mathsf{E}[X_1])^2 - n \cdot \mathsf{Var}(X_1)\right| \, \mathsf{dP} = \mathsf{E}\left[|(S_n - n \cdot \mathsf{E}[X_1])^2 - n \cdot \mathsf{Var}(X_1)|\right] \cdot \mathsf{P}(\tau > n) \leq \\ &\leq \left(\mathsf{E}\left[(S_n - n \cdot \mathsf{E}[X_1])^2\right] + n \cdot \mathsf{Var}(X_1)\right) \cdot \mathsf{P}(\tau > n) = \\ &= 2 \cdot \mathsf{Var}(X_1) \cdot n \cdot \mathsf{P}(\tau > n) \leq 2 \cdot \mathsf{Var}(X_1) \cdot \int_{[\tau > n]} \tau \, \mathsf{dP} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Uvědomme si, že proces $\big((S_n - n \cdot \mathsf{E}[X_1])^2, n \in \mathbb{N}\big)$ je nezáporný a $(n\mathsf{Var}(X_1), n \in \mathbb{N})$ je jeho kompenzátor vzhledem k dané filtraci.

Evidentně $\rho\mathsf{Var}(X_1), \tau\mathsf{Var}(X_1) \in \mathbb{L}_1$ a kompenzátor je neklesající. Proto podle lemmatu 1.17 je $(S_\rho - \rho \cdot \mathsf{E}[X_1])^2 - \rho \cdot \mathsf{Var}(X_1), (S_\tau - \tau \cdot \mathsf{E}[X_1])^2 - \tau \cdot \mathsf{Var}(X_1) \in \mathbb{L}_1$.

Ukázali jsme, že jsou splněny předpoklady tvrzení 0.2 a tak platí

$$\mathsf{E}\left[(S_\tau - \tau \cdot \mathsf{E}[X_1])^2 - \tau \cdot \mathsf{Var}(X_1) \;\middle|\; \mathcal{F}_\rho\right] = (S_\rho - \rho \cdot \mathsf{E}[X_1])^2 - \rho \cdot \mathsf{Var}(X_1) \quad \text{s.j.}$$

3. Nechť $X_1 \in \mathbb{L}_2$, $\tau \in \mathbb{L}_1$ a $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_o$ je $\tau > n \Longrightarrow |S_n - n \cdot \mathsf{E}[X_1]| \leq c$ s.j.

Pak pro $n \geq n_o$ na množině $[\tau > n]$ platí

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}\left[|((S_{n+1} - (n+1) \cdot \mathsf{E}[X_1])^2 - (n+1) \cdot \mathsf{Var}(X_1)) - ((S_n - n \cdot \mathsf{E}[X_1])^2 - n \cdot \mathsf{Var}(X_1))| \;\middle|\; \mathcal{F}_n\right] = \\ &= \mathsf{E}\left[|2 \cdot (S_n - n \cdot \mathsf{E}[X_1]) \cdot (X_{n+1} - \mathsf{E}[X_1]) + (X_{n+1} - \mathsf{E}[X_1])^2 - \mathsf{Var}(X_1)| \;\middle|\; \mathcal{F}_n\right] \leq \\ &\leq 2 \cdot |S_n - n \cdot \mathsf{E}[X_1]| \cdot \mathsf{E}\left[|X_{n+1} - \mathsf{E}[X_1]|\right] + \mathsf{E}\left[(X_{n+1} - \mathsf{E}[X_1])^2\right] + \mathsf{Var}(X_1) \leq \\ &\leq 2 \cdot c \cdot \mathsf{E}\left[|X_1 - \mathsf{E}[X_1]|\right] + 2 \cdot \mathsf{Var}(X_1) \quad \text{s.j.} \end{aligned}$$

Podle lemmatu 1.15 jsou splněny předpoklady tvrzení 0.2 a tak z něj vyplývá, že

$$\mathsf{E}\left[(S_\tau - \tau \cdot \mathsf{E}[X_1])^2 - \tau \cdot \mathsf{Var}(X_1) \;\middle|\; \mathcal{F}_\rho\right] = (S_\rho - \rho \cdot \mathsf{E}[X_1])^2 - \rho \cdot \mathsf{Var}(X_1) \quad \text{s.j.}$$

4. Když $\mathsf{e}^{\alpha X_1} \in \mathbb{L}_1$ a $\tau < +\infty$ s.j. je nezávislý s $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$, pak víme, že $\left(\dfrac{\mathsf{e}^{\alpha S_n}}{\left(\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\alpha X_1}\right]\right)^n}, n \in \mathbb{N}\right)$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-martingal a platí

$$\mathsf{E}\left[\frac{\mathsf{e}^{\alpha S_n}}{\left(\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\alpha X_1}\right]\right)^n} \cdot \mathbb{I}_{[\tau > n]}\right] = \mathsf{E}\left[\frac{\mathsf{e}^{\alpha S_n}}{\left(\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\alpha X_1}\right]\right)^n}\right] \cdot \mathsf{P}(\tau > n) = \mathsf{P}(\tau > n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathsf{P}(\tau = +\infty) = 0.$$

Sledovaný proces je nezáporný a jeho kompenzátorem je nula, protože je sám již martingalem. Jsou proto automaticky splněny předpoklady lemmatu 1.17. Z tohoto lemmatu dostáváme, že obě zastavení procesu v markovských časech τ i ρ jsou integrovatelná.

Ověřili jsme předpoklady tvrzení 0.2 a proto platí

$$\mathsf{E}\left[\frac{\mathsf{e}^{\alpha S_\tau}}{\left(\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\alpha X_1}\right]\right)^\tau}\,\middle|\, \mathcal{F}_\rho\right] = \frac{\mathsf{e}^{\alpha S_\rho}}{\left(\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\alpha X_1}\right]\right)^\rho} \text{ s.j.}$$

5. Když $\mathsf{e}^{\alpha X_1}, X_1, \tau \in \mathbb{L}_1$ a $\forall n \geq n_o$ platí $\tau > n \Longrightarrow |S_n - n\mathsf{E}[X_1]| \leq c$ s.j.
   Z Jensenovy nerovnosti je $\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\alpha(X_1 - \mathsf{E}[X_1])}\right] \geq \mathsf{e}^{\alpha \mathsf{E}[X_1 - \mathsf{E}[X_1]]} = 1$ a tak na množině $[\tau > n]$ platí

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left[\left|\frac{\mathsf{e}^{\alpha S_{n+1}}}{\left(\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\alpha X_1}\right]\right)^{n+1}} - \frac{\mathsf{e}^{\alpha S_n}}{\left(\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\alpha X_1}\right]\right)^{n}}\right|\,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] &= \frac{\mathsf{e}^{\alpha S_n}}{\left(\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\alpha X_1}\right]\right)^{n}} \cdot \mathsf{E}\left[\left|\frac{\mathsf{e}^{\alpha X_{n+1}}}{\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\alpha X_1}\right]} - 1\right|\,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] = \\ = \frac{\mathsf{e}^{\alpha(S_n - n\mathsf{E}[X_1])}}{\left(\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\alpha(X_1 - \mathsf{E}[X_1])}\right]\right)^n} \cdot \mathsf{E}\left[\left|\frac{\mathsf{e}^{\alpha X_1}}{\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\alpha X_1}\right]} - 1\right|\,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] &\leq \mathsf{e}^{|\alpha|\, c} \cdot \mathsf{E}\left[\left|\frac{\mathsf{e}^{\alpha X_1}}{\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\alpha X_1}\right]} - 1\right|\right] \quad \text{s.j.}\end{aligned}$$

   Předpokládáme $\tau \in \mathbb{L}_1$ a tak jsou splněny předpoklady lemmatu 1.15. Podle tohoto lemmatu τ a ρ splňují předpoklady tvrzení 0.2 a platí $\mathsf{E}\left[\frac{\mathsf{e}^{\alpha S_\tau}}{\left(\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\alpha X_1}\right]\right)^\tau}\,\middle|\, \mathcal{F}_\rho\right] = \frac{\mathsf{e}^{\alpha S_\rho}}{\left(\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\alpha X_1}\right]\right)^\rho}$ s.j.

Q.E.D

Věta 2.19. (Waldovy rovnosti) *Nechť $X_k, k \in \mathbb{N}$ jsou i.i.d. reálné n.v. a $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Dále nechť $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-adaptovaný proces, přičemž pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou σ-algebry $\mathcal{F}_n$ a $\sigma(X_i, i > n)$ nezávislé, a $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$.*

(i) *Když $X_1, \tau \in \mathbb{L}_1$, pak $\mathsf{E}[S_\tau] = \mathsf{E}[\tau] \cdot \mathsf{E}[X_1]$.*

(ii) *Když $X_1 \in \mathbb{L}_2$ a $\tau \in \mathbb{L}_1$ je nezávislý s $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$, potom $\mathsf{E}\left[(S_\tau - \tau \cdot \mathsf{E}[X_1])^2\right] = \mathsf{E}[\tau] \cdot \mathsf{Var}(X_1)$.*
Když navíc $\tau \in \mathbb{L}_2$, pak $S_\tau \in \mathbb{L}_2$ a $\mathsf{Var}(S_\tau) = \mathsf{E}[\tau] \cdot \mathsf{Var}(X_1) + (\mathsf{E}[X_1])^2 \cdot \mathsf{Var}(\tau)$.

(iii) *Když $X_1 \in \mathbb{L}_2$, $\tau \in \mathbb{L}_1$ a existuje $c \in \mathbb{R}_+$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\tau > n \Longrightarrow |S_n - n\mathsf{E}[X_1]| \leq c$ s.j., potom $\mathsf{E}\left[(S_\tau - \tau \cdot \mathsf{E}[X_1])^2\right] = \mathsf{E}[\tau] \cdot \mathsf{Var}(X_1)$.*
Když navíc $\tau \in \mathbb{L}_2$, pak $S_\tau \in \mathbb{L}_2$ a

$$\mathsf{Var}(S_\tau) = \mathsf{E}[\tau] \cdot \mathsf{Var}(X_1) + 2 \cdot \mathsf{E}[X_1] \cdot \mathsf{E}[(S_\tau - \tau \cdot \mathsf{E}[X_1]) \cdot (\tau - \mathsf{E}[\tau])] + (\mathsf{E}[X_1])^2 \cdot \mathsf{Var}(\tau) \ .$$

(iv) *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ je takové, že $\mathsf{e}^{\alpha X_1} \in \mathbb{L}_1$. Když $\mathsf{P}(\tau < +\infty) = 1$ a τ je nezávislý s $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$, potom $\mathsf{E}\left[\frac{\mathsf{e}^{\alpha S_\tau}}{\left(\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\alpha X_1}\right]\right)^\tau}\right] = 1$.*

(v) *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ je takové, že $\mathsf{e}^{\alpha X_1} \in \mathbb{L}_1$. Když $X_1, \tau \in \mathbb{L}_1$ a existuje $c \in \mathbb{R}_+$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\tau > n \Longrightarrow |S_n - n\mathsf{E}[X_1]| \leq c$ s.j., potom $\mathsf{E}\left[\frac{\mathsf{e}^{\alpha S_\tau}}{\left(\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\alpha X_1}\right]\right)^\tau}\right] = 1$.*

Důkaz: Výsledky této věty plynou vypočtením středních hodnot z rovností uvedených ve větě 2.18 pro případ $\rho = 1$.

1. Pro (i) dostáváme $\mathsf{E}[S_\tau - \tau \cdot \mathsf{E}[X_1]] = \mathsf{E}[S_1 - \mathsf{E}[X_1]] = 0$ a tak $\mathsf{E}[S_\tau] = \mathsf{E}[\tau] \cdot \mathsf{E}[X_1]$.
2. Pro (ii) a (iii) je to $\mathsf{E}\left[(S_\tau - \tau \cdot \mathsf{E}[X_1])^2 - \tau \cdot \mathsf{Var}(X_1)\right] = \mathsf{E}\left[(S_1 - \mathsf{E}[X_1])^2 - \mathsf{Var}(X_1)\right] = 0$ a tak

$$\mathsf{E}\left[(S_\tau - \tau \cdot \mathsf{E}[X_1])^2\right] = \mathsf{E}[\tau] \cdot \mathsf{Var}(X_1)\,.$$

Když $\tau \in \mathbb{L}_2$, pak také $S_\tau \in \mathbb{L}_2$, jelikož jsme právě ukázali, že $S_\tau - \tau \cdot \mathsf{E}[X_1] \in \mathbb{L}_2$.
A navíc platí

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Var}(S_\tau) = \mathsf{E}\left[(S_\tau - \mathsf{E}[\tau]\cdot\mathsf{E}[X_1])^2\right] = \\
&= \mathsf{E}\left[((S_\tau - \tau\cdot\mathsf{E}[X_1]) + (\tau - \mathsf{E}[\tau])\cdot\mathsf{E}[X_1])^2\right] \\
&= \mathsf{E}\left[(S_\tau - \tau\cdot\mathsf{E}[X_1])^2\right] + 2\cdot\mathsf{E}[X_1]\cdot\mathsf{E}[(S_\tau - \tau\cdot\mathsf{E}[X_1])\cdot(\tau - \mathsf{E}[\tau])] + (\mathsf{E}[X_1])^2\cdot\mathsf{E}\left[(\tau - \mathsf{E}[\tau])^2\right] \\
&= \mathsf{E}[\tau]\cdot\mathsf{Var}(X_1) + 2\cdot\mathsf{E}[X_1]\cdot\mathsf{E}[(S_\tau - \tau\cdot\mathsf{E}[X_1])\cdot(\tau - \mathsf{E}[\tau])] + (\mathsf{E}[X_1])^2\cdot\mathsf{Var}(\tau)\ .
\end{aligned}$$

V případě (ii) se rovnost zjednoduší na

$$\mathsf{Var}(S_\tau) = \mathsf{E}[\tau]\cdot\mathsf{Var}(X_1) + (\mathsf{E}[X_1])^2\cdot\mathsf{Var}(\tau)\ .$$

Díky nezávislosti totiž prostřední člen vypadne. Přesvědčíme se o tom přímým výpočtem

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}[(S_\tau - \tau\cdot\mathsf{E}[X_1])\cdot(\tau - \mathsf{E}[\tau])] = \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathsf{E}\left[(S_\tau - \tau\cdot\mathsf{E}[X_1])\cdot(\tau - \mathsf{E}[\tau])\cdot\mathbb{I}_{[\tau=n]}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathsf{E}\left[(S_n - n\cdot\mathsf{E}[X_1])\cdot(n - \mathsf{E}[\tau])\cdot\mathbb{I}_{[\tau=n]}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}(n - \mathsf{E}[\tau])\cdot\mathsf{E}[S_n - n\cdot\mathsf{E}[X_1]]\cdot\mathsf{P}(\tau = n) = 0\ .
\end{aligned}$$

3. Pro (iv) a (v) zase vychází $\mathsf{E}\left[\dfrac{\mathsf{e}^{\alpha S_\tau}}{\left(\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\alpha X_1}\right]\right)^\tau}\right] = \mathsf{E}\left[\dfrac{\mathsf{e}^{\alpha S_1}}{\mathsf{E}\left[\mathsf{e}^{\alpha X_1}\right]}\right] = 1.$

Q.E.D

Povšimněme si, že části (i), (ii) a (iv) věty 2.19 se shodují s tvrzením 5.17 ze skript [4].

Kapitola 3

Maximální nerovnosti

V této kapitole uvádíme některé maximální nerovnosti, které jsou užitečné při studiu chování náhodných procesů. S jejich aplikací se často setkáváme v teorii martingalů, teorii stochastických odhadů a také v teorii testování hypotéz. Nerovnosti jsou čerpány z monografie [1].

Věta 3.1. (martingalová nerovnost) *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $U, U_1, U_2, \ldots, U_n$ jsou reálné n.v. takové, že $U \in \mathbb{L}_1$, $\mathsf{P}(U \in I) = 1$ a pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$ je $U_j \leq \mathsf{E}[U \mid U_1, U_2, \ldots, U_j]$ s.j., $\mathsf{P}(U_j \in I) = 1$. Označme $\mathsf{M}_n = \max\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$. Pak pro $\varphi : I \to \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ neklesající konvexní funkci a libovolné $t \in I$ platí*

$$\varphi(t)\mathsf{P}(\mathsf{M}_n > t) \leq \int_{[\mathsf{M}_n > t]} \varphi(U) \,\mathsf{d}\mathsf{P}.$$

Důkaz: Nechť $t \in I$ a označme $\tau := \min\{i = 1, 2, \ldots, n : U_i > t\}$. Víme, že τ je markovský čas vzhledem k filtraci $(\sigma(U_1, U_2, \ldots, U_i), i \in \{1, 2, \ldots, n\})$ a tak dostáváme odhad

$$\begin{aligned} \int_{[\mathsf{M}_n > t]} \varphi(U) \,\mathsf{d}\mathsf{P} &= \sum_{i=1}^{n} \int_{[\tau = i]} \varphi(U) \,\mathsf{d}\mathsf{P} \geq \sum_{i=1}^{n} \int_{[\tau = i]} \varphi(\mathsf{E}[U \mid U_1, U_2, \ldots, U_i]) \,\mathsf{d}\mathsf{P} \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} \int_{[\tau = i]} \varphi(U_i) \,\mathsf{d}\mathsf{P} \geq \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\tau = i)\, \varphi(t) = \varphi(t)\, \mathsf{P}(\mathsf{M}_n > t)\,. \end{aligned}$$

Q.E.D

Věta 3.2. (Kolmogorovova maximální nerovnost) *Když $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathbb{L}_2$ jsou nezávislé n.v., pak pro každé $t \in \mathbb{R}_+$*

$$\mathsf{P}\left(\max\left\{\left|\sum_{i=1}^{j}(X_i - \mathsf{E}[X_i])\right| : j = 1, 2, \ldots, n\right\} > t\right) \leq \frac{1}{t^2}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{Var}(X_i)\,.$$

Důkaz: Věta je speciálním případem věty 0.1 pro volbu
$\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : t \mapsto t^2$, $U_j = \left|\sum_{i=1}^{j}(X_i - \mathsf{E}[X_i])\right|$ a $U = U_n$.
Stačí si pouze uvědomit, že

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[U \mid X_1, X_2, \ldots, X_j] &= \mathsf{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathsf{E}[X_i])\right| \,\middle|\, X_1, X_2, \ldots, X_j\right] \geq \\ &\geq \left|\mathsf{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathsf{E}[X_i]) \,\middle|\, X_1, X_2, \ldots, X_j\right]\right| = U_j \quad \text{s.j.} \end{aligned}$$

Tudíž také

$$\mathsf{E}[U \mid U_1, U_2, \ldots, U_j] \geq U_j \quad \text{s.j.}$$

Q.E.D

Věta 3.3. (Ottavianiho-Skorochodova nerovnost) *Nechť $X_1, X_2, \dots, X_n$ jsou nezávislé n.v. Označme $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$ pro každé $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\widetilde{\mathsf{M}}_n = \max\{|S_k| : k \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ a pro $u > 0$ položme $\lambda_u = \min\{\mathsf{P}(|S_n - S_k| \le u) : k \in \{1, 2, \dots, n-1\}\}$. Pak pro $t > 0$, $s > 0$ platí odhad*

$$\lambda_s \, \mathsf{P}\left(\widetilde{\mathsf{M}}_n > t + s\right) \le \mathsf{P}(|S_n| > t) \, .$$

Důkaz: Použijme markovský čas $\tau := \inf\{i = 1, 2, \dots, n : |S_i| > t + s\}$. Pak platí

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(|S_n| > t) &\ge \mathsf{P}\left(\widetilde{\mathsf{M}}_n > s + t, |S_n| > t\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\tau = i, |S_n| > t) \ge \\
&\ge \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\tau = i, |S_i| - |S_n - S_i| > t) \ge \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(|S_n - S_i| \le s, \tau = i) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(|S_n - S_i| \le s) \, \mathsf{P}(\tau = i) \ge \lambda_s \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\tau = i) = \lambda_s \mathsf{P}\left(\widetilde{\mathsf{M}}_n > s + t\right) .
\end{aligned}$$

Q.E.D

Věta 3.4. (Lévyho maximální nerovnost) *Nechť $X_1, X_2, \dots, X_n$ jsou reálné n.v. takové, že pro každé $i = 1, 2, \dots, n-1$ je $\mathcal{L}(X_1, X_2, \dots, X_n) = \mathcal{L}(X_1, X_2, \dots, X_i, -X_{i+1}, \dots, -X_n)$.*

Položme $\widetilde{\mathsf{M}}_n = \max\{|S_k| : k \in \{1, 2, \dots, n\}\}$, pak pro každé $t > 0$ platí

$$\mathsf{P}\left(\widetilde{\mathsf{M}}_n > t\right) \le 2 \, \mathsf{P}(|S_n| > t) \, .$$

Důkaz: Použijme markovský čas $\tau := \inf\{i = 1, 2, \dots, n : |S_i| > t\}$. Pak platí

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(|S_n| > t) &\ge \mathsf{P}\left(\widetilde{\mathsf{M}}_n > t, |S_n| > t\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\tau = i, |S_n| > t) \ge \\
&\ge \sum_{i=1}^{n-1} \mathsf{P}(\tau = i, |S_n| > t) = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \mathsf{P}(\tau = i, |X_1 + \ldots + X_i - X_{i+1} - \ldots - X_n| > t) = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \mathsf{P}(\tau = i, |S_n - 2S_i| > t) \ge \sum_{i=1}^{n-1} \mathsf{P}(\tau = i, 2|S_i| - |S_n| > t) \ge \\
&\ge \sum_{i=1}^{n-1} \mathsf{P}(\tau = i, |S_n| \le t) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\tau = i, |S_n| \le t) = \\
&= \mathsf{P}\left(\widetilde{\mathsf{M}}_n > t, |S_n| \le t\right) = \mathsf{P}\left(\widetilde{\mathsf{M}}_n > t\right) - \mathsf{P}(|S_n| > t) \, .
\end{aligned}$$

Q.E.D

Věta 3.5. (Submartingalové maximální nerovnosti) *Nechť $(S_k, k \in \{1, \dots, n\})$ je submartingal. Označme $\mathsf{M}_n = \max\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, $\mathsf{N}_n = \min\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ a $\widetilde{\mathsf{M}}_n = \max\{|S_1|, |S_2|, \dots, |S_n|\}$.*

Pak pro každé $\varepsilon > 0$ platí odhady:

$$\mathsf{P}(\mathsf{M}_n \ge \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{[\mathsf{M}_n \ge \varepsilon]} S_n \, \mathrm{d}\mathsf{P} \le \frac{\mathsf{E}\left[(S_n)^+\right]}{\varepsilon} \, , \tag{3.1}$$

$$\mathsf{P}\left(\mathsf{N}_n \leq -\varepsilon\right) \leq \frac{\mathsf{E}\left[(S_n)^+\right] - \mathsf{E}\left[S_1\right]}{\varepsilon}, \tag{3.2}$$

$$\mathsf{P}\left(\widetilde{\mathsf{M}}_n \geq \varepsilon\right) \leq \frac{2\,\mathsf{E}\left[(S_n)^+\right] - \mathsf{E}\left[S_1\right]}{\varepsilon}. \tag{3.3}$$

Důkaz:

1. K důkazu nerovnosti (3.1) definujeme $\tau = \min\{k \in \{1, \dots, n\} : S_k \geq \varepsilon\}$. Jedná se vlastně o první výstup z množiny $(-\infty, \varepsilon)$ a tím pádem podle tvrzení 5.29 o markovský čas.
   Uvědomme si, že platí $\left[\mathsf{M}_n \geq \varepsilon\right] = \left[\tau < +\infty\right] = \left[\tau \leq n\right] = \left[S_\tau \geq \varepsilon\right]$.
   Proto dostáváme
   $$\begin{aligned} \mathsf{P}\left(\mathsf{M}_n \geq \varepsilon\right) &= \mathsf{P}\left(S_\tau \geq \varepsilon\right) \leq \int_{[S_\tau \geq \varepsilon]} \frac{S_\tau}{\varepsilon}\, \mathsf{dP} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{[\tau \leq n]} S_\tau\, \mathsf{dP} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{[\tau \leq n]} S_{\min\{\tau,n\}}\, \mathsf{dP} \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{[\tau \leq n]} S_n\, \mathsf{dP} \leq \frac{\mathsf{E}\left[(S_n)^+\right]}{\varepsilon}. \end{aligned}$$
   V odhadech jsme využili toho, že $\mathsf{E}\left[S_n \mid \mathcal{F}_{\min\{\tau,n\}}\right] \geq S_{\min\{\tau,n\}}$ s.j. podle tvrzeni 0.1 a že $[\tau \leq n] \in \mathcal{F}_{\min\{\tau,n\}}$.

2. K důkazu nerovnosti (3.2) definujeme $\tau = \min\{k \in \{1, \dots, n\} : S_k \leq -\varepsilon\}$. Jedná se vlastně o první výstup z množiny $(-\varepsilon, +\infty)$ a tím pádem podle tvrzení 5.29 o markovský čas.
   Uvědomme si, že platí
   $$\left[\mathsf{N}_n \leq -\varepsilon\right] = \left[\tau < +\infty\right] = \left[\tau \leq n\right] = \left[S_\tau \leq -\varepsilon\right].$$
   Proto dostáváme
   $$\begin{aligned} \mathsf{P}\left(\mathsf{N}_n \leq -\varepsilon\right) &= \mathsf{P}\left(S_\tau \leq -\varepsilon\right) \leq \int_{[S_\tau \leq -\varepsilon]} \frac{(-S_\tau)}{\varepsilon}\, \mathsf{dP} = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{[\tau \leq n]} S_\tau\, \mathsf{dP} = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{[\tau \leq n]} S_{\min\{\tau,n\}}\, \mathsf{dP} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{[\tau = +\infty]} S_{\min\{\tau,n\}}\, \mathsf{dP} - \int_{\Omega} S_{\min\{\tau,n\}}\, \mathsf{dP} \right) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{[\tau = +\infty]} S_n\, \mathsf{dP} - \int_{\Omega} S_1\, \mathsf{dP} \right) \leq \frac{\mathsf{E}\left[(S_n)^+\right] - \mathsf{E}\left[S_1\right]}{\varepsilon}. \end{aligned}$$
   V odhadu jsme využili toho, že $\mathsf{E}\left[S_{\min\{\tau,n\}}\right] \geq \mathsf{E}\left[S_1\right]$ podle tvrzeni 0.1.

3. Nerovnost (3.3) je spojením nerovností (3.1) a (3.2).

Q.E.D

Přepišme tuto větu pro supermartingaly.

Věta 3.6. *Nechť $(S_k, k \in \{1, \dots, n\})$ je supermartingal. Označme $\mathsf{M}_n = \max\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, $\mathsf{N}_n = \min\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ a $\widetilde{\mathsf{M}}_n = \max\{|S_1|, |S_2|, \dots, |S_n|\}$.*
Pak pro každé $\varepsilon > 0$ platí odhady:

$$\mathsf{P}\left(\mathsf{M}_n \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathsf{E}\left[(S_n)^-\right] + \mathsf{E}\left[S_1\right]}{\varepsilon}, \tag{3.4}$$

$$\mathsf{P}\left(\mathsf{N}_n \leq -\varepsilon\right) \leq \frac{\mathsf{E}\left[(S_n)^-\right]}{\varepsilon}\ , \tag{3.5}$$

$$\mathsf{P}\left(\widetilde{\mathsf{M}}_n \geq \varepsilon\right) \leq \frac{2\,\mathsf{E}\left[(S_n)^-\right] + \mathsf{E}\left[S_1\right]}{\varepsilon}\ . \tag{3.6}$$

Důkaz: Věta je pouze přepisem předchozí věty 0.5, neboť $(-S_k, k \in \{1,\ldots,n\})$ je submartingal.

Q.E.D

Pro martingaly dostáváme lepší odhady.

Věta 3.7. *Nechť* $(S_k, k \in \{1,\ldots,n\})$ *je martingal. Označme* $\mathsf{M}_n = \max\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$, $\mathsf{N}_n = \min\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ *a* $\widetilde{\mathsf{M}}_n = \max\{|S_1|, |S_2|, \ldots, |S_n|\}$.
Pak pro každé $\varepsilon > 0$ *platí odhady:*

$$\mathsf{P}\left(\mathsf{M}_n \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathsf{E}\left[(S_n)^+\right]}{\varepsilon}\ , \tag{3.7}$$

$$\mathsf{P}\left(\mathsf{N}_n \leq -\varepsilon\right) \leq \frac{\mathsf{E}\left[(S_n)^-\right]}{\varepsilon}\ , \tag{3.8}$$

$$\mathsf{P}\left(\widetilde{\mathsf{M}}_n \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathsf{E}\left[|S_n|^r\right]}{\varepsilon^r} \quad \forall\, r \geq 1\ . \tag{3.9}$$

Důkaz: Nerovnost (3.7) je nerovností (3.1), neboť $(S_k, k \in \{1,\ldots,n\})$ je submartingal.
Nerovnost (3.8) je nerovností (3.5), neboť $(S_k, k \in \{1,\ldots,n\})$ je supermartingal.
Podle tvrzení 3.11 pro každé $r \geq 1$ víme, že $(|S_k|^r, k \in \{1,\ldots,n\})$ je submartingal. Nerovnost (3.9) je pak nerovnosti (3.1) pro submartingal $(|S_k|^r,\ k \in \{1,\ldots,n\})$.

Q.E.D

Pro martingal umíme ještě odhadnout střední hodnotu maxima absolutních hodnot.

Věta 3.8. *Nechť* $(S_k, k \in \{1,\ldots,n\})$ *je martingal a* $\widetilde{\mathsf{M}}_n = \max\{|S_1|, |S_2|, \ldots, |S_n|\}$.
Pak pro každé $r > 1$ *platí odhad:*

$$\mathsf{E}\left[(\widetilde{\mathsf{M}}_n)^r\right] \leq \left(\frac{r}{r-1}\right)^r \mathsf{E}\left[|S_n|^r\right]. \tag{3.10}$$

Důkaz:

1. Když $\mathsf{E}\left[|S_n|^r\right] = 0$, pak $S_k = 0$ s.j. pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$, neboť vyšetřujeme martingal. Tudíž i $\mathsf{M}_n = 0$ s.j. a nerovnost (3.10) platí.

2. Když $\mathsf{E}\left[|S_n|^r\right] = +\infty$, pak nerovnost (3.10) je triviální.

3. Nechť $0 < \mathsf{E}\left[|S_n|^r\right] < +\infty$.

   Z Jensenovy nerovnosti víme, že $\mathsf{E}\left[|S_1|^r\right] \leq \mathsf{E}\left[|S_2|^r\right] \leq \ldots \leq \mathsf{E}\left[|S_n|^r\right] < +\infty$.

   Pak také

   $$0 < \mathsf{E}\left[|S_n|^r\right] \leq \mathsf{E}\left[(\widetilde{\mathsf{M}}_n)^r\right] \leq \mathsf{E}\left[|S_1|^r\right] + \mathsf{E}\left[|S_2|^r\right] + \ldots + \mathsf{E}\left[|S_n|^r\right] < +\infty.$$

   Z integrovatelnosti maxima dostáváme

   $$\mathsf{E}\left[(\widetilde{\mathsf{M}}_n)^r\right] = \int_0^{+\infty} \mathsf{P}\left((\widetilde{\mathsf{M}}_n)^r \geq t\right)\, \mathsf{d}t = \int_0^{+\infty} \mathsf{P}\left((\widetilde{\mathsf{M}}_n)^r \geq s^r\right) \cdot r \cdot s^{r-1}\, \mathsf{d}s.$$

Použijeme-li nyní první část odhadu (3.1), Fubiniho větu a Hölderovu nerovnost získáme odhad

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[(\widetilde{\mathsf{M}}_n)^r\right] &\leq r\cdot\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{s}\int_{[\widetilde{\mathsf{M}}_n\geq s]}|S_n|\,\mathsf{dP}\right)\cdot s^{r-1}\,\mathsf{d}s = r\cdot\int_\Omega\left(\int_0^{\widetilde{\mathsf{M}}_n} s^{r-2}\,\mathsf{d}s\right)|S_n|\,\mathsf{dP} = \\
&= r\cdot\int_\Omega\frac{(\widetilde{\mathsf{M}}_n)^{r-1}}{r-1}|S_n|\,\mathsf{dP}\leq\frac{r}{r-1}\left(\mathsf{E}\left[|S_n|^r\right]\right)^{\frac{1}{r}}\left(\mathsf{E}\left[(\widetilde{\mathsf{M}}_n)^r\right]\right)^{\frac{r-1}{r}}.
\end{aligned}
$$

Odtud dostaneme $\left(\mathsf{E}\left[(\widetilde{\mathsf{M}}_n)^r\right]\right)^{\frac{1}{r}}\leq\frac{r}{r-1}\left(\mathsf{E}\left[|S_n|^r\right]\right)^{\frac{1}{r}}$, což je nerovnost (3.10).

Q.E.D

Nyní se budeme zabývat počtem přeskoků daného intervalu.

Definice 3.9. *Pro $n\in\mathbb{N}$, $a,b,y_1,y_2,\ldots,y_n\in\mathbb{R}$, $a<b$ definujeme **počet přeskoků nahoru** intervalu (a,b) posloupností $y_1,y_2,\ldots,y_n$ jako*

$$
\mathrm{H}_n(a,b\,;\,y_1,y_2,\ldots,y_n)=\mathsf{card}\left(\left\{(i,j)\in\mathbb{N}^2\ :\ \begin{array}{c}1\leq i<j\leq n, y_i\leq a, y_j\geq b,\\ a<y_k<b\ \forall k\in\{i+1,i+2,\ldots,j-1\}\end{array}\right\}\right). \tag{3.11}
$$

*a **počet přeskoků dolů** intervalu (a,b) posloupností $y_1,y_2,\ldots,y_n$ jako*

$$
\mathrm{U}_n(a,b\,;\,y_1,y_2,\ldots,y_n)=\mathsf{card}\left(\left\{(i,j)\in\mathbb{N}^2\ :\ \begin{array}{c}1\leq i<j\leq n, y_i\geq b, y_j\leq a,\\ a<y_k<b\ \forall k\in\{i+1,i+2,\ldots,j-1\}\end{array}\right\}\right). \tag{3.12}
$$

Pro nekonečnou posloupnost y_i, $i\in\mathbb{N}$ klademe

$$
\mathrm{H}(a,b\,;\,y_i,i\in\mathbb{N})=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{H}_n(a,b\,;\,y_1,y_2,\ldots,y_n)\ , \tag{3.13}
$$

$$
\mathrm{U}(a,b\,;\,y_i,i\in\mathbb{N})=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{U}_n(a,b\,;\,y_1,y_2,\ldots,y_n)\,. \tag{3.14}
$$

Mezi přeskoky nahoru a dolů je velmi těsný vztah.

Lemma 3.10. *Pro $n\in\mathbb{N}$, $a,b,y_1,y_2,\ldots,y_n\in\mathbb{R}$, $a<b$ vždy platí*

$$
\mathrm{U}_n(a,b\,;\,y_1,y_2,\ldots,y_n)-1\leq\mathrm{H}_n(a,b\,;\,y_1,y_2,\ldots,y_n)\leq\mathrm{U}_n(a,b\,;\,y_1,y_2,\ldots,y_n)+1\ , \tag{3.15}
$$

$$
\mathrm{U}_n(a,b\,;\,y_1,y_2,\ldots,y_n)=\mathrm{H}_n(-a,-b\,;\,-y_1,-y_2,\ldots,-y_n)\ . \tag{3.16}
$$

Důkaz: K důkazu je třeba si pouze uvědomit, že mezi sousedními přeskoky stejného druhu musí být přeskok opačného druhu. Dále, změna znaménka posloupnosti změní charakter přeskoku.

Q.E.D

Lemma 3.11. *Když $n\in\mathbb{N}$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ a $S_1,S_2,\ldots,S_n$ jsou reálné n.v., potom $\mathrm{H}_n(a,b\,;\,S_1,S_2,\ldots,S_n)$ i $\mathrm{U}_n(a,b\,;\,S_1,S_2,\ldots,S_n)$ jsou n.v.*

Důkaz: Vzhledem k (3.16) stačí ukázat měřitelnost počtu přeskoků nahoru. Pro $k\in\mathbb{N}$ platí

$$
\begin{aligned}
&[\mathrm{H}_n(a,b\,;\,S_1,S_2,\ldots,S_n)\geq k]= \\
&\bigcup_{1\leq i_1<j_1<i_2<j_2<\ldots<i_k<j_k\leq n}[S_{i_1}\leq a,S_{j_1}\geq b,S_{i_2}\leq a,S_{j_2}\geq b,\ldots,S_{i_k}\leq a,S_{j_k}\geq b,]\in\mathcal{A}\,.
\end{aligned}
$$

Tím jsme ukázali, že počet přeskoků nahoru i počet přeskoků dolů jsou n.v.

Q.E.D

U submartingalu existuje užitečný odhad středního počtu přeskoků.

Věta 3.12. (Doobova nerovnost) *Když $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $(S_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\})$ je submartingal, pak platí odhad*

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left[\mathrm{U}_n(a, b\,;\, S_1, S_2, \ldots, S_n)\right] - 1 \le \mathsf{E}\left[\mathrm{H}_n(a, b\,;\, S_1, S_2, \ldots, S_n)\right] \le \\ \le \frac{\mathsf{E}\left[(S_n - a)^+\right]}{b - a} - \frac{\mathsf{E}\left[(S_1 - a)^+\right]}{b - a} \le \frac{\mathsf{E}\left[(S_n - a)^+\right]}{b - a}\,. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Důkaz: První část nerovnosti plyne bezprostředně z lemmatu 0.10.
Pro důkaz druhé části nerovnosti označme $Z_i = (S_i - a)^+$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$).
Pak $\mathrm{H}_n(a, b\,;\, S_1, S_2, \ldots, S_n) = \mathrm{H}_n(0, b - a\,;\, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ a $\Big((S_i - a)^+, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\Big)$ je submartingal podle tvrzení 3.12.
Definujeme markovské časy $\Psi_0 \equiv 1$ a pro $k \in \mathbb{N}$ pokračujeme dále indukcí

$$\Lambda_k = \min\{\min\{i \in \mathbb{N} \,:\, i \ge \Psi_{k-1}, Z_i = 0\}\,, n\} \quad , \quad \Psi_k = \min\{\min\{i \in \mathbb{N} \,:\, i \ge \Lambda_k, Z_i \ge b - a\}\,, n\}\,.$$

Nyní platí

$$\begin{aligned} Z_n - Z_1 &= Z_{\Lambda_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}} - Z_{\Psi_o} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \left(Z_{\Lambda_k} - Z_{\Psi_{k-1}}\right) + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(Z_{\Psi_k} - Z_{\Lambda_k}\right) \ge \\ &\ge \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(Z_{\Lambda_{k+1}} - Z_{\Psi_k}\right) + (b - a)\mathrm{H}_n(0, b - a\,;\, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)\,. \end{aligned}$$

Podle tvrzení 0.1 je $\mathsf{E}\left[Z_{\Lambda_{k+1}} - Z_{\Psi_k}\right] \ge 0$. Odtud

$$\mathsf{E}\left[Z_n - Z_1\right] = \mathsf{E}\left[(S_n - a)^+\right] - \mathsf{E}\left[(S_1 - a)^+\right] \ge (b - a)\mathsf{E}\left[\mathrm{H}_n(0, b - a\,;\, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)\right].$$

Q.E.D

Pro supermartingaly má věta následující tvar.

Věta 3.13. *Když $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $(S_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\})$ je supermartingal, pak platí odhad*

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left[\mathrm{H}_n(a, b\,;\, S_1, S_2, \ldots, S_n)\right] - 1 \le \mathsf{E}\left[\mathrm{U}_n(a, b\,;\, S_1, S_2, \ldots, S_n)\right] \le \\ \le \frac{\mathsf{E}\left[(b - S_n)^+\right]}{b - a} - \frac{\mathsf{E}\left[(b - S_1)^+\right]}{b - a} \le \frac{\mathsf{E}\left[(b - S_n)^+\right]}{b - a}\,. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Důkaz: Věta je pouze přepisem předchozí věty 0.12, neboť $(-S_k, k \in \{1, \ldots, n\})$ je submartingal a podle (3.16) víme, že platí $\mathrm{U}_n(a, b\,;\, S_1, S_2, \ldots, S_n) = \mathrm{H}_n(-b, -a\,;\, -S_1, -S_2, \ldots, -S_n)$.

Q.E.D

Počítání přeskoků je jedna z možností jak ověřit konvergenci s.j. posloupnosti n.v.

Tvrzení 3.14. *Nechť S_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou reálné n.v.*

(i) *Zobecněná reálná n.v. S taková, že $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{s.j.} S$, existuje tehdy a jen tehdy, když*

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *je* $\mathsf{P}\left(\mathrm{H}(a, b\,;\, S_n, n \in \mathbb{N}) < +\infty\right) = 1$.

(ii) *Reálná n.v. S taková, že $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{s.j.} S$, existuje tehdy a jen tehdy, když*

$\mathsf{P}\left(\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |S_n| < +\infty\right) = 1$ *a* $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *je* $\mathsf{P}\left(\mathrm{H}(a, b\,;\, S_n, n \in \mathbb{N}) < +\infty\right) = 1$.

Důkaz: V obou případech uvedených ve větě existence limity implikuje dané podmínky. Zbývá ukázat pouze opačné implikace.

1. Předpokládejme, že každý interval posloupnost s.j. přeskočí pouze konečně krát a $\mathsf{P}\left(\liminf_{n\to+\infty} S_n < \limsup_{n\to+\infty} S_n\right) > 0$.
   Pak existuje $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ tak, že $\mathsf{P}\left(\liminf_{n\to+\infty} S_n < a < b < \limsup_{n\to+\infty} S_n\right) > 0$.
   To ale znamená, že $\mathsf{P}\left(\mathrm{H}(a, b\, ;\ S_n, n \in \mathbb{N}) = +\infty\right) > 0$.
   Došli jsme tak ke sporu a tudíž $\mathsf{P}\left(\liminf_{n\to+\infty} S_n = \limsup_{n\to+\infty} S_n\right) = 1$.
   Položíme-li $S = \limsup_{n\to+\infty} S_n$ dostaneme zobecněnou reálnou n.v. s vlastností $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} S$.

2. Víme, že existuje S zobecněná reálná n.v. s vlastností $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} S$.
   Když $\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n| < +\infty$ s.j. a označíme-li $Z = S \cdot \mathbb{I}_{[|S|<+\infty]}$, pak Z je reálná n.v. splňující $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} Z$, neboť $S = \limsup_{n\to+\infty} S_n$ s.j.a tak $|S| < +\infty$ s.j.

Q.E.D

Pomocí Doobovy nerovnosti odvodíme další maximální nerovnost pro martingaly.

Věta 3.15. (Brownova maximální nerovnosti) *Nechť pro pevné $n \in \mathbb{N}$ je dán martingal $(S_k, k \in \{1, \dots, n\})$ s $\mathsf{E}[S_1] = 0$. Označme $\mathsf{M}_n = \max\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ a $\widetilde{\mathsf{M}}_n = \max\{|S_1|, |S_2|, \dots, |S_n|\}$.*
Pak pro $\varepsilon > 0$ platí:

(i)

$$\mathsf{P}(\mathsf{M}_n \geq 2\varepsilon) \leq \mathsf{P}(S_n > \varepsilon) + \int\limits_{[S_n > 2\varepsilon]} \left(\frac{S_n}{\varepsilon} - 2\right) \, \mathrm{d}\mathsf{P} \leq \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{[S_n > \varepsilon]} S_n \, \mathrm{d}\mathsf{P},$$

(ii)

$$\mathsf{P}\left(\widetilde{\mathsf{M}}_n \geq 2\varepsilon\right) \leq \mathsf{P}(|S_n| > \varepsilon) + \int\limits_{[|S_n| > 2\varepsilon]} \left(\frac{|S_n|}{\varepsilon} - 2\right) \, \mathrm{d}\mathsf{P} \leq \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{[|S_n| > \varepsilon]} |S_n| \, \mathrm{d}\mathsf{P}.$$

Důkaz: Použitím Doobovy nerovnosti, věta 0.12, a faktu, že $\mathsf{E}[S_n] = 0$ ukážeme první nerovnost

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(\mathsf{M}_n \geq 2\varepsilon) \leq \mathsf{P}(\mathsf{M}_n \geq 2\varepsilon, S_n \leq \varepsilon) + \mathsf{P}(S_n > \varepsilon) \leq \\
&\quad \leq \mathsf{P}(\mathrm{H}_n(-2\varepsilon, -\varepsilon\, ;\ 0, -S_1, -S_2, \dots, -S_n) \geq 1) + \mathsf{P}(S_n > \varepsilon) \leq \\
&\quad \leq \mathsf{E}[\mathrm{H}_n(-2\varepsilon, -\varepsilon\, ;\ 0, -S_1, -S_2, \dots, -S_n)] + \mathsf{P}(S_n > \varepsilon) \leq \\
&\quad \leq \frac{\mathsf{E}\left[(-S_n + 2\varepsilon)^+\right]}{\varepsilon} - \frac{\mathsf{E}\left[(2\varepsilon)^+\right]}{\varepsilon} + \mathsf{P}(S_n > \varepsilon) \leq \\
&\quad \leq \mathsf{P}(S_n > \varepsilon) + \int\limits_{[S_n \leq 2\varepsilon]} \left(-\frac{S_n}{\varepsilon} + 2\right) \mathrm{d}\mathsf{P} - 2 \leq \mathsf{P}(S_n > \varepsilon) + \int\limits_{[S_n > 2\varepsilon]} \left(\frac{S_n}{\varepsilon} - 2\right) \mathrm{d}\mathsf{P} \leq \\
&\quad \leq \mathsf{P}(S_n > \varepsilon) + \int\limits_{[S_n > \varepsilon]} \left(\frac{S_n}{\varepsilon} - 1\right) \mathrm{d}\mathsf{P} \leq \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{[S_n > \varepsilon]} S_n \, \mathrm{d}\mathsf{P}.
\end{aligned}$$

Druhou nerovnost dostaneme tak, že první nerovnost použijeme jednak pro $S_1, S_2, \dots, S_n$ a jednak pro $-S_1, -S_2, \dots, -S_n$ a výsledky sečteme.

Q.E.D

Kapitola 4

Konvergence submartingalů

Věta 4.1. (Doobova věta) *Nechť* $(S_n, n \in \mathbb{N})$ *je submartingal, který splňuje* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{E}[S_n^+] < +\infty$. *Pak existuje* $S \in \mathbb{L}_1$ *taková, že* $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} S$ *a*

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[S^+\right] &\leq \liminf_{n\to+\infty} \mathsf{E}\left[S_n^+\right] = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{E}\left[S_n^+\right], && (4.1)\\
\mathsf{E}\left[S^-\right] &\leq \liminf_{n\to+\infty} \mathsf{E}\left[S_n^-\right] \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{E}\left[S_n^+\right] - \mathsf{E}\left[S_1\right], && (4.2)\\
\mathsf{E}\left[|S|\right] &\leq \liminf_{n\to+\infty} \mathsf{E}\left[S_n^+\right] + \liminf_{n\to+\infty} \mathsf{E}\left[S_n^-\right] \leq 2 \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{E}\left[S_n^+\right] - \mathsf{E}\left[S_1\right]. && (4.3)
\end{aligned}$$

Důkaz: Vezměme $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. S použitím Doobovy nerovnosti, věta 0.12, dostáváme odhad

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[\mathrm{H}(a,b\,;\,S_n, n\in\mathbb{N})\right] &= \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\left[\mathrm{H}_n(a,b\,;\,S_1,S_2,\dots,S_n)\right] \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{\mathsf{E}\left[(S_n-a)^+\right]}{b-a} \leq \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{\mathsf{E}\left[S_n^+\right]+a^-}{b-a} \leq \frac{\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{E}\left[S_n^+\right]+a^-}{b-a} < +\infty.
\end{aligned}$$

Odtud $\mathsf{P}\left(\mathrm{H}(a,b\,;\,S_n, n\in\mathbb{N}) < +\infty\right) = 1 \ \forall a,b \in \mathbb{R},\ a<b$.
Podle tvrzení 0.14 existuje zobecněná reálná n.v. Z taková, že $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} Z$. Ověříme její integrovatelnost. Použitím Fatouova lemmatu a faktu, že střední hodnoty submartingalu $(S_n^+, n\in\mathbb{N})$ s rostoucím časem neklesají, dostáváme odhady

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[Z^+\right] &\leq \liminf_{n\to+\infty} \mathsf{E}\left[S_n^+\right] = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{E}\left[S_n^+\right] < +\infty,\\
\mathsf{E}\left[Z^-\right] &\leq \liminf_{n\to+\infty} \mathsf{E}\left[S_n^-\right] = \liminf_{n\to+\infty} \left(\mathsf{E}\left[S_n^+\right] - \mathsf{E}\left[S_n\right]\right) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathsf{E}\left[S_n^+\right] - \mathsf{E}\left[S_1\right] \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{E}\left[S_n^+\right] - \mathsf{E}\left[S_1\right] < +\infty.
\end{aligned}$$

Sečtením těchto dvou nerovností získáme nerovnost pro střední hodnotu absolutní hodnoty.
Tudíž $S = Z \cdot \mathbb{I}_{[|Z|<+\infty]} \in \mathbb{L}_1$ a $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} S$.

Q.E.D

Tato věta má několik jednoduchých důsledků:

a) Když $(S_n, n\in\mathbb{N})$ je shora omezený submartingal, pak $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} S \in \mathbb{L}_1$.

b) Když $(S_n, n\in\mathbb{N})$ je zdola omezený supermartingal, pak $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} S \in \mathbb{L}_1$.

c) Když $(S_n, n\in\mathbb{N})$ je nezáporný supermartingal, pak $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} S \in \mathbb{L}_1$.

d) Když $(S_n, n\in\mathbb{N})$ je zdola nebo shora omezený martingal, pak $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} S \in \mathbb{L}_1$.

Příklad 4.1. Nechť X_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé reálné a integrovatelné n.v. s $\mathsf{E}[X_n] = 0$. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

Již víme, že $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je martingal.

Uvědomíme-li si, že v tomto případě $\mathsf{E}[S_n^+] = \mathsf{E}[S_n^-]$ a $\mathsf{E}[S_n^+] = \frac{1}{2}\mathsf{E}[|S_n|]$, pak z Doobovy věty, věta 0.1, dostáváme tvrzení pro sčitatelnost řady nezávislých reálných n.v.

Když $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{E}[|\sum_{k=1}^{n} X_k|] < +\infty$, potom je řada $\sum_{k=1}^{+\infty} X_k$ sčitatelná s.j., jejím součtem je integrovatelná n.v. a $\mathsf{E}\left[\left|\sum_{k=1}^{+\infty} X_k\right|\right] \le \liminf\limits_{n\to+\infty} \mathsf{E}[|\sum_{k=1}^{n} X_k|] < +\infty$.

Toto tvrzení je obecnější nežli věta 10.4 ze skript [4], neboť

$$\mathsf{E}\left[\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|\right] \le \sqrt{\mathsf{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mathsf{Var}(X_k)} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \mathsf{Var}(X_k)}.$$

Za slabší předpoklady však platíme tím, že ztrácíme konvergenci v $\mathbb{L}_2$.

△

Příklad 4.2. Nechť X_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé, nezáporné reálné n.v. a $1 \le \mathsf{E}[X_n] < +\infty$. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $S_n = \prod\limits_{k=1}^{n} X_k$.

Víme, že $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je submartingal a samozřejmě $S_n^+ = S_n$. Z věty 0.1 pak dostáváme tvrzení:

Když $\prod\limits_{k=1}^{+\infty} \mathsf{E}[X_k] < +\infty$, potom $\prod\limits_{k=1}^{+\infty} X_k$ existuje s.j. a platí $\mathsf{E}\left[\prod\limits_{k=1}^{+\infty} X_k\right] \le \prod\limits_{k=1}^{+\infty} \mathsf{E}[X_k]$.

△

Příklad 4.3. Nechť X_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé, nezáporné reálné n.v. a $\mathsf{E}[X_n] \le 1$. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $S_n = \prod\limits_{k=1}^{n} X_k$.

Víme, že $(S_n, n \in \mathbb{N})$ tvoří nezáporný supermartingal a tak podle věty 0.1 součin $\prod\limits_{k=1}^{+\infty} X_k$ existuje s.j. a z Fatouova lemmatu platí $\mathsf{E}\left[\prod\limits_{k=1}^{+\infty} X_k\right] \le \prod\limits_{k=1}^{+\infty} \mathsf{E}[X_k]$.

△

Věta 4.2. (Konvergence inverzního submartingalu) *Nechť $(S_n, n \in -\mathbb{N} = \{-1, -2, -3, \dots\})$ je submartingal. Pak existuje zobecněná reálná n.v. Z taková, že $S_n \xrightarrow[n\to-\infty]{s.j.} Z$ a*

$$\mathsf{E}[Z^+] \le \liminf_{n\to-\infty} \mathsf{E}[S_n^+] = \inf_{n\in-\mathbb{N}} \mathsf{E}[S_n^+] \le \mathsf{E}[S_{-1}^+] < +\infty\ , \quad \mathsf{E}[Z^-] \le \liminf_{n\to-\infty} \mathsf{E}[S_n^-] \le \sup_{n\in-\mathbb{N}} \mathsf{E}[S_n^-]\,.$$

Pokud $\sup\limits_{n\in-\mathbb{N}} \mathsf{E}[S_n^-] < +\infty$, pak existuje $S \in \mathbb{L}_1$ taková, že $S_n \xrightarrow[n\to-\infty]{s.j.} S$.

Důkaz: Vezměme $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. S použitím Doobovy nerovnosti, věta 0.12,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[\mathrm{H}(a,b\,;\,S_{-n}, n \in \mathbb{N})] &= \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}[\mathrm{H}_n(a,b\,;\,S_{-1}, S_{-2}, \dots, S_{-n})] \le \\
&\le \lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}[\mathrm{H}_n(a,b\,;\,S_{-n}, S_{-n+1}, \dots, S_{-1})] + 1 \le \\
&\le \frac{\mathsf{E}\left[(S_{-1}-a)^+\right]}{b-a} + 1 < +\infty.
\end{aligned}$$

Odtud $\mathsf{P}(\mathrm{H}(a,b\,;\,S_{-n}, n \in \mathbb{N}) < +\infty) = 1$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Podle tvrzení 0.14 existuje zobecněná reálná n.v. Z taková, že $S_n \xrightarrow[n\to-\infty]{s.j.} Z$.

Nyní se podíváme na její integrovatelnost. Použitím Fatouova lemmatu a faktu, že střední hodnoty submartingalu $(S_n^+, n \in -\mathbb{N})$ v čase neklesají, dostáváme odhad

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left[Z^+\right] &\leq \liminf_{n \to -\infty} \mathsf{E}\left[S_n^+\right] = \inf_{n \in -\mathbb{N}} \mathsf{E}\left[S_n^+\right] \leq \mathsf{E}\left[S_{-1}^+\right], \\ \mathsf{E}\left[Z^-\right] &\leq \liminf_{n \to -\infty} \mathsf{E}\left[S_n^-\right] \leq \sup_{n \in -\mathbb{N}} \mathsf{E}\left[S_n^-\right]. \end{aligned}$$

Pokud tedy $\sup_{n \in -\mathbb{N}} \mathsf{E}\left[S_n^-\right] < +\infty$, pak $Z \in \mathbb{L}_1$.

Položíme-li $S = Z \cdot \mathbb{I}_{[|Z| < +\infty]}$ získáme $S \in \mathbb{L}_1$ a $S_n \xrightarrow[n \to -\infty]{s.j.} S$.

Q.E.D

Tvrzení 4.3. *Nechť $(S_t, t \in (0,1))$ je submartingal. Pak pro každé $t \in (0,1)$ existují $U_t, V_t \in \mathbb{L}_1$ takové, že $S_u \xrightarrow[u \to t-]{P} U_t$ a $S_u \xrightarrow[u \to t+]{P} V_t$.*

Důkaz: Vezměme $t \in (0,1)$. Nyní zvolme pevně posloupnosti $u_n, v_n \in (0,1)$ takové, že $u_n \nearrow t$ a $v_n \searrow t$. Jelikož $\mathsf{E}\left[S_{u_n}^+\right] \leq \mathsf{E}\left[S_t^+\right]$, pak podle věty 0.1 existuje integrovatelná reálná n.v. U_t taková, že $S_{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{s.j.} U_t$. Dále $\mathsf{E}\left[S_{v_n}^-\right] \leq \mathsf{E}\left[S_t^-\right]$, pak podle věty 0.2 existuje integrovatelná reálná n.v. V_t taková, že $S_{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{s.j.} V_t$.
Nechť $r_n \in (0,1)$ je jiná posloupnost splňující $r_n \nearrow t$. Označme jako q_n posloupnost vzniklou sloučením posloupností u_n, r_n a seřazením jejich členů podle velikosti. Pak $q_n \nearrow t$ a podle věty 0.1 má posloupnost S_{q_n} limitu s.j. Pak ale nutně $S_{q_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{s.j.} U_t$. Tudíž $S_{r_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{s.j.} U_t$ pro každou posloupnost $r_n \in (0,1)$, $r_n \nearrow t$. Potom $S_{r_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{P} U_t$ pro každou posloupnost $r_n \in (0,1)$, $r_n \nearrow t$ a to implikuje $S_u \xrightarrow[u \to t-]{P} U_t$.
Nechť $w_n \in (0,1)$ je jiná posloupnost splňující $w_n \searrow t$. Označme jako q_n posloupnost vzniklou sloučením posloupností v_n, w_n a seřazením jejich členů podle velikosti. Pak $q_n \searrow t$ a podle věty 0.2 má posloupnost S_{q_n} limitu s.j. Pak ale nutně $S_{q_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{s.j.} V_t$. Tudíž $S_{w_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{s.j.} V_t$ pro každou posloupnost $w_n \in (0,1)$, $w_n \searrow t$. Potom $S_{w_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{P} V_t$ pro každou posloupnost $w_n \in (0,1)$, $w_n \searrow t$ a to implikuje $S_u \xrightarrow[u \to t+]{P} V_t$.

Q.E.D

Nyní zavedeme pojem stejnoměrně integrovatelného martingalu. Připomeneme si při tom pojem stejné stejnoměrné integrovatelnosti náhodných veličin.

Definice 4.4. *Řekneme, že* ***$(S_t, t \in T)$ je stejnoměrně integrovatelný $(\mathcal{F}_t \mathcal{F}_t, t \in T)$-submartingal (-supermartingal, -martingal)*** *, pokud $(S_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-submartingal (-supermartingal, -martingal) a $(S_t, t \in T)$ je kolekce stejně stejnoměrně integrovatelných náhodných veličin, tj.*

$$\lim_{K \to +\infty} \sup\left\{\mathsf{E}\left[|S_t| \mathbb{I}_{[|S_t| \geq K]}\right] : t \in T\right\} = 0 .$$

Věta 4.5. *Když $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je stejnoměrně integrovatelný $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-submartingal, pak existuje $S \in \mathbb{L}_1$ taková, že $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{s.j.} S$ a $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{L}_1} S$. Navíc platí $\mathsf{E}\left[S \mid \mathcal{F}_n\right] \geq S_n$ s.j. pro každé $n \in \mathbb{N}$.*

Důkaz:

1. Náhodné veličiny $(S_n, n \in \mathbb{N})$ jsou stejně stejnoměrně integrovatelné. Proto $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathsf{E}\left[|S_n|\right] < +\infty$ a podle věty 0.1 existuje $S \in \mathbb{L}_1$ taková, že $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{s.j.} S$.

   Stejná stejnoměrná integrovatelnost zajišťuje, že také $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{L}_1} S$.

2. Víme, že $S_n \leq \mathsf{E}\left[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \leq \mathsf{E}\left[S_{n+2} \mid \mathcal{F}_n\right] \leq \ldots$ s.j.
   Položme $Z = \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathsf{E}\left[S_{n+k} \mid \mathcal{F}_n\right]$.
   Pak $\mathsf{E}\left[S_{n+k} \mid \mathcal{F}_n\right] \xrightarrow[k\to+\infty]{s.j.} Z$, ale také $\mathsf{E}\left[S_{n+k} \mid \mathcal{F}_n\right] \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbb{L}_1} \mathsf{E}\left[S \mid \mathcal{F}_n\right]$, neboť $S_{n+k} \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbb{L}_1} S$.
   Odtud dostáváme $Z = \mathsf{E}\left[S \mid \mathcal{F}_n\right]$ s.j. a následně $S_n \leq \mathsf{E}\left[S \mid \mathcal{F}_n\right]$ s.j. $\forall n \in \mathbb{N}$.

Q.E.D

Věta 4.6. *Když $(S_n, n \in -\mathbb{N})$ je stejnoměrně integrovatelný $(\mathcal{F}_n, n \in -\mathbb{N})$-submartingal, pak existuje $S \in \mathbb{L}_1$ taková, že $S_n \xrightarrow[n\to-\infty]{s.j.} S$ a $S_n \xrightarrow[n\to-\infty]{\mathbb{L}_1} S$. Navíc platí $S \leq \mathsf{E}\left[S_n \mid \mathcal{F}_{-\infty}\right]$ s.j. pro každé $n \in -\mathbb{N}$.*

Důkaz:

1. Náhodné veličiny $(S_n, n \in -\mathbb{N})$ jsou stejně stejnoměrně integrovatelné. Proto $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{E}\left[|S_n|\right] < +\infty$ a podle věty 0.2 existuje $S \in \mathbb{L}_1$ taková, že $S_n \xrightarrow[n\to-\infty]{s.j.} S$.

   Stejná stejnoměrná integrovatelnost zajišťuje, že $S_n \xrightarrow[n\to-\infty]{\mathbb{L}_1} S$.

2. Připomeňme, že $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} \mathcal{F}_{-k}$.
   Víme, že $\mathsf{E}\left[S_{-1} \mid \mathcal{F}_{-\infty}\right] \geq \mathsf{E}\left[S_{-2} \mid \mathcal{F}_{-\infty}\right] \geq \mathsf{E}\left[S_{-3} \mid \mathcal{F}_{-\infty}\right] \geq \ldots$ s.j., protože
   $\mathsf{E}\left[S_{-k} \mid \mathcal{F}_{-\infty}\right] = \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left[S_{-k} \mid \mathcal{F}_{-k-1}\right] \mid \mathcal{F}_{-\infty}\right] \geq \mathsf{E}\left[S_{-k-1} \mid \mathcal{F}_{-\infty}\right]$ s.j.
   Položme $Z = \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathsf{E}\left[S_{-k} \mid \mathcal{F}_{-\infty}\right]$.
   Pak $\mathsf{E}\left[S_n \mid \mathcal{F}_{-\infty}\right] \xrightarrow[n\to-\infty]{s.j.} Z$ a také $\mathsf{E}\left[S_n \mid \mathcal{F}_{-\infty}\right] \xrightarrow[n\to-\infty]{\mathbb{L}_1} \mathsf{E}\left[S \mid \mathcal{F}_{-\infty}\right]$ s.j., neboť $S_n \xrightarrow[n\to-\infty]{\mathbb{L}_1} S$.
   Potom $Z = \mathsf{E}\left[S \mid \mathcal{F}_{-\infty}\right] = S$ s.j., neboť $S = \liminf\limits_{n\to-\infty} S_n$ s.j. a $\liminf\limits_{n\to-\infty} S_n$ je $\mathcal{F}_{-\infty}$-měřitelná n.v.
   Odtud dostáváme $\mathsf{E}\left[S_n \mid \mathcal{F}_{-\infty}\right] \geq S$ s.j.

Q.E.D

Lemma 4.7. *Když $Y \in \mathbb{L}_1$, pak n.v. $(\mathsf{E}\left[Y \mid \mathcal{F}\right], \mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebra$)$ jsou stejně stejnoměrně integrovatelné.*

Důkaz: Vezměme $0 < K < +\infty$ a počítejme.

$$\mathsf{E}\left[|\mathsf{E}\left[Y \mid \mathcal{F}\right]| \mathbb{I}_{[|\mathsf{E}[Y \mid \mathcal{F}]| \geq K]}\right] \leq \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left[|Y| \mid \mathcal{F}\right] \mathbb{I}_{[\mathsf{E}[|Y| \mid \mathcal{F}] \geq K]}\right] = \mathsf{E}\left[|Y| \mathbb{I}_{[\mathsf{E}[|Y| \mid \mathcal{F}] \geq K]}\right].$$

Dále

$$\mathsf{P}\left(\mathsf{E}\left[|Y| \mid \mathcal{F}\right] \geq K\right) \leq \frac{\mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left[|Y| \mid \mathcal{F}\right]\right]}{K} = \frac{\mathsf{E}\left[|Y|\right]}{K}.$$

Tudíž

$$\sup\left\{\mathsf{E}\left[|\mathsf{E}\left[Y \mid \mathcal{F}\right]| \mathbb{I}_{[|\mathsf{E}[Y \mid \mathcal{F}]| \geq K]}\right] : \mathcal{F} \subset \mathcal{A} \ \sigma\text{-algebra}\right\} \leq \sup\left\{\mathsf{E}\left[|Y| \mathbb{I}_A\right] : \mathsf{P}(A) \leq \frac{\mathsf{E}\left[|Y|\right]}{K}\right\}.$$

Stejná stejnoměrná integrovatelnost uvažovaných n.v. plyne ze stejnoměrné spojitosti střední hodnoty ("integrálu").

Q.E.D

Věta 4.8. *Nechť $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-adaptovaný proces. Pak $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je stejnoměrně integrovatelný $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-martingal tehdy a jen tehdy, existuje-li $S \in \mathbb{L}_1$ taková, že $\mathsf{E}\left[S \mid \mathcal{F}_n\right] = S_n$ s.j. pro každé $n \in \mathbb{N}$.*

Důkaz: Věta plyne okamžitě z věty 0.5 a lemmatu 0.7.

Q.E.D

Nyní si uvědomme spojitost podmíněné střední hodnoty.

Tvrzení 4.9. *Nechť $Y \in \mathbb{L}_1$ a $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$ jsou σ-algebry.*

(i) Když $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset \ldots$, pak

$$\mathsf{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_n\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} \mathsf{E}\left[Y \,\middle|\, \sigma\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathcal{F}_k\right)\right] \quad a \quad \mathsf{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_n\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}_1} \mathsf{E}\left[Y \,\middle|\, \sigma\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathcal{F}_k\right)\right].$$

(ii) Když $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \supset \mathcal{F}_3 \supset \ldots$, pak

$$\mathsf{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_n\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} \mathsf{E}\left[Y \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{+\infty} \mathcal{F}_k\right] \quad a \quad \mathsf{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_n\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}_1} \mathsf{E}\left[Y \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{+\infty} \mathcal{F}_k\right].$$

Důkaz:

1. Nechť $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset \ldots$.

   Pak podle věty 0.8 je $(\mathsf{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_n\right], n \in \mathbb{N})$ je stejnoměrně integrovatelný martingal. Podle věty 0.5 existuje $S \in \mathbb{L}_1$ taková, že $\mathsf{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_n\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} S$, $\mathsf{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_n\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}_1} S$ a $\mathsf{E}\left[S \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathsf{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_n\right]$ s.j. pro každé $n \in \mathbb{N}$.

   Potřebujeme pouze ukázat, že $S = \mathsf{E}\left[Y \,\middle|\, \sigma\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathcal{F}_k\right)\right]$ s.j.

   Víme, že $S = \liminf_{n\to+\infty} \mathsf{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_n\right]$ s.j. a $\liminf_{n\to+\infty} \mathsf{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_n\right]$ je $\sigma\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathcal{F}_k\right)$-měřitelná. Pro $F \in \mathcal{F}_n$ platí

   $$\int_F \liminf_{n\to+\infty} \mathsf{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_n\right] \,\mathrm{dP} = \int_F S \,\mathrm{dP} = \int_F \mathsf{E}\left[S \mid \mathcal{F}_n\right] \,\mathrm{dP} = \int_F \mathsf{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_n\right] \,\mathrm{dP} = \int_F Y \,\mathrm{dP}.$$

   Ověřili jsme druhou podmínku z definice podmíněné střední hodnoty na algebře $\bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathcal{F}_k$. Tím pádem je ověřeno, že $\liminf_{n\to+\infty} \mathsf{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathsf{E}\left[Y \,\middle|\, \sigma\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathcal{F}_k\right)\right]$ s.j. a $S = \mathsf{E}\left[Y \,\middle|\, \sigma\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathcal{F}_k\right)\right]$ s.j.

2. Nechť $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \supset \mathcal{F}_3 \supset \ldots$.

   Pak podle věty 0.8 je $(\mathsf{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_{-n}\right], n \in -\mathbb{N})$ je stejnoměrně integrovatelný martingal. Podle věty 0.6 existuje $S \in \mathbb{L}_1$ taková, že $\mathsf{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_n\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} S$, $\mathsf{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_n\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}_1} S$ a $S = \mathsf{E}\left[Y \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{+\infty} \mathcal{F}_k\right]$ s.j.

Q.E.D

Tvrzení 4.10. *Nechť $Y \in \mathbb{L}_1$ a pro každé $t \in (0,1)$ jsou dány σ-algebry $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ takové, že $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pokud $0 < t < s < 1$. Označíme-li $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$ a $\mathcal{F}_{t-} = \sigma\left(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s\right)$, pak*

$\mathsf{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_s\right] \xrightarrow[s\to t-]{\mathbb{L}_1} \mathsf{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_{t-}\right]$ *a* $\mathsf{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_s\right] \xrightarrow[s\to t+]{\mathbb{L}_1} \mathsf{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_{t+}\right]$.

Důkaz: Tvrzení se dokáže obdobnou úvahou jako tvrzení 0.3 s využitím tvrzení 0.9.

Q.E.D

Příklad 4.4. Nechť X_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé reálné n.v. s nulovou střední hodnotou.
Když $\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k, n \in \mathbb{N}\right\}$ jsou stejně stejnoměrně integrovatelné, potom je řada $\sum_{k=1}^{+\infty} X_k$ sčitatelná s.j. i v $\mathbb{L}_1$.
Dále platí $\mathsf{E}\left[\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathsf{E}\left[\left|\sum_{k=1}^{+\infty} X_k\right|\right]$ a $\mathsf{E}\left[\sum_{k=1}^{+\infty} X_k \,\middle|\, X_1, X_2, \ldots, X_n\right] = \sum_{k=1}^{n} X_k$ s.j.

△

Příklad 4.5. Nechť X_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé reálné n.v. a $\mathsf{E}[X_n] = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
Když $\left\{\prod_{k=1}^{n} X_k, n \in \mathbb{N}\right\}$ jsou stejně stejnoměrně integrovatelné, potom součin $\prod_{k=1}^{+\infty} X_k$ existuje s.j. i v $\mathbb{L}_1$.
Dále platí $\mathsf{E}\left[\prod_{k=1}^{+\infty} X_k\right] = 1$ a $\mathsf{E}\left[\prod_{k=1}^{+\infty} X_k \,\middle|\, X_1, X_2, \ldots, X_n\right] = \prod_{k=1}^{n} X_k$ s.j.

△

Konvergence submartingalu je implikována integrovatelností suprema jeho přírůstků.

Věta 4.11. (Konvergence submartingalu II) *Nechť $(S_n, n \in \mathbb{N})$ je submartingal a $(\sup\{S_{n+1} - S_n : n \in \mathbb{N}\})^+ \in \mathbb{L}_1$, potom existuje reálná n.v. S a $\Omega_0 \subset \Omega$, $\mathsf{P}(\Omega_0) = 1$ tak, že pro všechna $\omega \in \Omega_0 \cap [\sup\{S_n : n \in \mathbb{N}\} < +\infty]$ platí $S_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} S(\omega)$.*

Důkaz: Pro každé $\lambda > 0$ je $\tau(\lambda) = \min\{n \in \mathbb{N} : S_n \geq \lambda\}$ markovský čas.
Označíme-li $\tau(\lambda, n) = \min\{\tau(\lambda), n\}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak podle Optional Stopping Theorem, věta 0.4, posloupnost $\left(S_{\tau(\lambda,n)}, n \in \mathbb{N}\right)$ je submartingal. Uvědomme si, že

- když $\tau(\lambda) > n$, pak $S_{\tau(\lambda,n)} = S_n < \lambda$;
- když $1 < \tau(\lambda) \leq n$, pak
$$S_{\tau(\lambda,n)} = S_{\tau(\lambda)} = S_{\tau(\lambda)-1} + \left(S_{\tau(\lambda)} - S_{\tau(\lambda)-1}\right) < \lambda + \sup\{S_{k+1} - S_k : k \in \mathbb{N}\};$$
- když $\tau(\lambda) = 1$, pak $S_{\tau(\lambda,n)} = S_1$.

Odtud platí
$$\mathsf{E}\left[S^+_{\tau(\lambda,n)}\right] \leq \lambda + \mathsf{E}\left[S_1^+\right] + \mathsf{E}\left[(\sup\{S_{k+1} - S_k : k \in \mathbb{N}\})^+\right] < +\infty.$$
Podle Doobovy věty, věta 0.1, platí $S_{\tau(\lambda,n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} S(\lambda)$.
Takže
$$S_n \cdot \mathbb{I}_{[\sup\{S_k\,:\,k\in\mathbb{N}\}<\lambda]} = S_{\tau(\lambda,n)} \cdot \mathbb{I}_{[\sup\{S_k\,:\,k\in\mathbb{N}\}<\lambda]} \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} S(\lambda) \cdot \mathbb{I}_{[\sup\{S_k\,:\,k\in\mathbb{N}\}<\lambda]}.$$
Odtud
$$S_n \cdot \mathbb{I}_{[\sup\{S_k\,:\,k\in\mathbb{N}\}<+\infty]} \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} S = S(1) \cdot \mathbb{I}_{[\sup\{S_k\,:\,k\in\mathbb{N}\}<1]} + \sum_{\lambda=2}^{+\infty} S(\lambda) \cdot \mathbb{I}_{[\lambda-1\leq\sup\{S_k\,:\,k\in\mathbb{N}\}<\lambda]}.$$

Q.E.D

Věta je vhodná například pro submartingaly s omezenými přírůstky.
Nyní se vrátíme k důsledkům Doobovy věty. Na jejím základě odvodíme větu o sčitatelnosti řady n.v. a zákon velkých čísel pro martingalové diference.

Definice 4.12. *Uvažujme indexovou množinu $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ nebo $I = \mathbb{N}$ nebo $I = -\mathbb{N}$ nebo $I = \mathbb{Z}$. Nechť $T = \{t_i : i \in I\} \subset \mathbb{R}$ je taková, že když $i, i+1 \in I$, pak $t_i < t_{i+1}$.*
Když $(X_t, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-adaptovaný proces a $X_t \in \mathbb{L}_1$ pro každé $t \in T$, pak říkáme, že ***$(X_t, t \in T)$ jsou $(\mathcal{F}_t, t \in T)$-martingalové diference****, jestliže $\mathsf{E}\left[X_{t_{i+1}} \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_i}\right] = 0$ s.j. pro každé $i, i+1 \in I$.*
Dále budeme říkat, že ***$(X_t, t \in T)$ jsou martingalové diference****, jestliže $(X_t, t \in T)$ jsou $(\mathcal{S}_t, t \in T)$-martingalové diference pro přirozenou filtraci $\mathcal{S}_t = \sigma(X_s, s \leq t, s \in T)$.*

Pro spojitý čas je možné pojem „martingalových diferencí“ chápat jako postupné „zahušťování“ indexové množiny. Připomeňme si, že v deterministickém případě vede tento postup k pojmu derivace a integrálu. Obdobně u martingalů vede k pojmu stochastického diferenciálu a stochastického integrálu. Tato teorie však již přesahuje rámec tohoto textu.

Nyní se soustřeďme na větu o sčitatelnosti řady a na zákon velkých čísel.

Věta 4.13. *Nechť $(X_t, t \in T)$ jsou martingalové diference a $X_n \in \mathbb{L}_2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Když $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathsf{Var}\,(X_k) < +\infty$, pak je řada $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} X_k$ sčitatelná s.j. i v $\mathbb{L}_2$.*

Důkaz: Předpoklady věty 0.1 jsou splněny, protože

$$\mathsf{E}\left[\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|\right] \leq \sqrt{\mathsf{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right]} = \sqrt{\mathsf{E}\,[X_1^2] + \sum_{k=2}^{n} \mathsf{Var}\,(X_k)} \leq \sqrt{\mathsf{E}\,[X_1^2] + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathsf{Var}\,(X_k)} < +\infty.$$

Tudíž je řada sčitatelná s.j. Uvažované n.v. jsou nekorelované a tak je sčitatelnost v $\mathbb{L}_2$ ekvivalentní s konečností součtu jejich rozptylů.

Q.E.D

Věta 4.14. (SZVČ pro martingalové diference) *Nechť $(X_t, t \in T)$ jsou martingalové diference a $X_n \in \mathbb{L}_2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Když $0 < b_n \nearrow +\infty$ a $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathsf{Var}(X_k)}{b_k^2} < +\infty$, potom $\frac{1}{b_n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} 0$ a $\frac{1}{b_n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}_2} 0$.*

Důkaz:

1. Pro n.v. $\frac{X_n}{b_n}$, $n \in \mathbb{N}$ jsou splněny předpoklady věty 0.13. Tudíž řada $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{X_k}{b_k}$ je sčitatelná s.j.

   Z Kroneckerova lemmatu již plyne $\frac{1}{b_n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} 0$.

2. Z Kroneckerova lemmatu vyplývá, že $\frac{1}{b_n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathsf{Var}\,(X_k) = \mathsf{E}\left[\left(\frac{1}{b_n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Což je dokazovaná konvergence v $\mathbb{L}_2$.

Q.E.D

Kapitola 5

Centrální limitní věta

Zbývá ještě ukázat centrální limitní větu.

Věta 5.1. (CLV McLeish 1974) *Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je dáno $k_n \in \mathbb{N}$ a reálné n.v. $X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{k_n,n} \in \mathbb{L}_1$.*

(i) $(X_{k,n}, k = 1, 2, \ldots, k_n)$ *jsou martingalové diference pro každé $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{E}\left[\max\{|X_{k,n}| : k = 1, 2, \ldots, k_n\}^2\right] < +\infty,$

(iii) $\max\{|X_{k,n}| : k = 1, 2, \ldots, k_n\} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathsf{P}} 0,$

(iv) $\sum_{k=1}^{k_n} X_{k,n}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathsf{P}} 1.$

Potom $\sum_{k=1}^{k_n} X_{k,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} X$ *a* $\mathcal{L}(X) = \mathrm{N}(0, 1)$.

Důkaz: Viz [5], věta VI.4.1. na str.370.

Q.E.D

Nyní provedeme diskusi podmínek zaručujících CLV pro martingalové diference. Budeme uvažovat trojúhelníkové schéma martingalových diferencí.

Definice 5.2. *Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je dáno $k_n \in \mathbb{N}$ a pravděpodobnostní prostory $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathsf{P}_n)$. Budeme říkat, že reálné n.v. $X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{k_n,n}$ a σ-algebry $\mathcal{F}_{1,n}, \mathcal{F}_{2,n}, \ldots, \mathcal{F}_{k_n,n} \subset \mathcal{A}_n$ tvoří **trojúhelníkové schéma martingalových diferencí**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ je splněno:*

(i) $\mathcal{F}_{1,n} \subset \mathcal{F}_{2,n} \subset \ldots \subset \mathcal{F}_{k_n,n} \subset \mathcal{A}_n$.

(ii) $X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{k_n,n} \in \mathbb{L}_1$.

(iii) $(X_{k,n}, k = 1, 2, \ldots, k_n)$ *jsou* $(\mathcal{F}_{k,n}, k = 1, 2, \ldots, k_n)$*-martingalové diference.*

Budeme označovat

$$
\begin{aligned}
M_n &= \max\{|X_{k,n}| : k = 1, 2, \ldots, k_n\},\\
v_n &= \sum_{k=1}^{k_n} \mathsf{Var}\,(X_{k,n}),\\
V_n &= \sum_{k=1}^{k_n} \mathsf{Var}\,(X_{k,n}\,|\mathcal{F}_{k-1,n}) = \sum_{k=1}^{k_n} \mathsf{E}\left[X_{k,n}^2 \;\middle|\; \mathcal{F}_{k-1,n}\right].
\end{aligned}
$$

Pak uvažujeme následující podmínky:

Stejnoměrná asymptotická zanedbatelnost (SAZ): $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathsf{P}} 0.$

Normalizační podmínka (N): $\sum_{k=1}^{k_n} X_{k,n}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathsf{P}} 1.$

Feller-Lindebergova podmínka (FL):

$$L_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{k_n} \mathsf{E}\left[X_{k,n}^2 \mathbb{I}_{[|X_{k,n}|\geq\varepsilon]}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ pro každé } \varepsilon > 0.$$

Podmíněná Feller-Lindebergova podmínka (PFL):

$$PL_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{k_n} \mathsf{E}\left[X_{k,n}^2 \mathbb{I}_{[|X_{k,n}|\geq\varepsilon]} \;\middle|\; \mathcal{F}_{k-1,n}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathsf{P}} 0 \text{ pro každé } \varepsilon > 0.$$

Lemma 5.3. *$(FL) \Rightarrow (PFL)$.*

Důkaz: Pro $\varepsilon > 0$ platí $\mathsf{E}\left[PL_n(\varepsilon)\right] = L_n(\varepsilon)$.
Tudíž $L_n(\varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow PL_n(\varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}_1} 0 \Rightarrow PL_n(\varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathsf{P}} 0.$

Q.E.D

Lemma 5.4. *$(FL) \Rightarrow \left(M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}_2} 0\right) \Rightarrow (SAZ)$.*

Důkaz: Definujme $\tau_n = \min\Big\{k \in \{1, 2, \dots, k_n\} : X_{k,n}^2 = M_n^2\Big\}$. Poznamenejme, že nejde o markovský čas.
Pak pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$\mathsf{E}\left[M_n^2\right] = \mathsf{E}\left[X_{\tau_n,n}^2\right] \leq \mathsf{E}\left[X_{\tau_n,n}^2 \mathbb{I}_{[|X_{\tau_n,n}|\geq\varepsilon]}\right] + \varepsilon^2 \leq \sum_{k=1}^{k_n} \mathsf{E}\left[X_{k,n}^2 \mathbb{I}_{[|X_{k,n}|\geq\varepsilon]}\right] + \varepsilon^2 = L_n(\varepsilon) + \varepsilon^2.$$

Odtud již plyne tvrzení lemmatu.

Q.E.D

Lemma 5.5. *Když $\{V_n, n \in \mathbb{N}\}$ jsou stejně stejnoměrně integrovatelné, pak $(PFL) \Rightarrow (FL)$.*

Důkaz: Když jsou $\{V_n, n \in \mathbb{N}\}$ stejně stejnoměrně integrovatelné, pak také $\{PL_n(\varepsilon), \varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}\}$ jsou stejně stejnoměrně integrovatelné, neboť $0 \leq PL_n(\varepsilon) \leq V_n$. Pak již automaticky z (PFL) plyne (FL).

Q.E.D

Příklad 5.1. Když $V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathsf{P}} 1$ a $\mathsf{E}\left[V_n\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, pak jsou $\{V_n, n \in \mathbb{N}\}$ stejně stejnoměrně integrovatelné a $(PFL) \Rightarrow (FL)$. Stejná stejnoměrná integrovatelnost vyplývá z toho, že

$$\mathsf{E}\left[V_n \mathbb{I}_{[V_n\geq 2]}\right] = \mathsf{E}\left[V_n\right] - \mathsf{E}\left[V_n \mathbb{I}_{[V_n<2]}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Podle lemmatu 0.5 již víme, že z (PFL) plyne (FL).

△

Lemma 5.6. *Když platí (FL) a $\sup\{v_n : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$, pak $\mathsf{E}\left[\left|\sum_{k=1}^{k_n} X_{k,n}^2 - V_n\right|\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$*

Důkaz: Pro $\varepsilon > 0$ dostáváme odhad

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[\left|\sum_{k=1}^{k_n} X_{k,n}^2 - V_n\right|\right] &\leq \mathsf{E}\left[\left|\sum_{k=1}^{k_n}\left(X_{k,n}^2 \mathbb{I}_{[|X_{k,n}|<\varepsilon]} - \mathsf{E}\left[X_{k,n}^2 \mathbb{I}_{[|X_{k,n}|<\varepsilon]} \;\middle|\; \mathcal{F}_{k-1,n}\right]\right)\right|\right] + 2L_n(\varepsilon) \leq \\
&\leq \sqrt{\mathsf{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{k_n}\left(X_{k,n}^2 \mathbb{I}_{[|X_{k,n}|<\varepsilon]} - \mathsf{E}\left[X_{k,n}^2 \mathbb{I}_{[|X_{k,n}|<\varepsilon]} \;\middle|\; \mathcal{F}_{k-1,n}\right]\right)\right)^2\right]} + 2L_n(\varepsilon) \leq \\
&\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{k_n} \mathsf{E}\left[\left(X_{k,n}^2 \mathbb{I}_{[|X_{k,n}|<\varepsilon]} - \mathsf{E}\left[X_{k,n}^2 \mathbb{I}_{[|X_{k,n}|<\varepsilon]} \;\middle|\; \mathcal{F}_{k-1,n}\right]\right)^2\right]} + 2L_n(\varepsilon) = \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^{k_n}\left(\mathsf{E}\left[\left(X_{k,n}^2 \mathbb{I}_{[|X_{k,n}|<\varepsilon]}\right)^2\right] - \mathsf{E}\left[\left(\mathsf{E}\left[X_{k,n}^2 \mathbb{I}_{[|X_{k,n}|<\varepsilon]} \;\middle|\; \mathcal{F}_{k-1,n}\right]\right)^2\right]\right)} + 2L_n(\varepsilon) \leq \\
&\leq \varepsilon\sqrt{\sum_{k=1}^{k_n} \mathsf{E}\left[X_{k,n}^2 \mathbb{I}_{[|X_{k,n}|<\varepsilon]}\right]} + 2L_n(\varepsilon) \leq \varepsilon\sqrt{v_n} + 2L_n(\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Z platnosti (FL) pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$
\limsup_{n\to+\infty} \mathsf{E}\left[\left|\sum_{k=1}^{k_n} X_{k,n}^2 - V_n\right|\right] \leq \varepsilon\sqrt{\sup\{v_j \,:\, j \in \mathbb{N}\}}.
$$

Odtud již plyne tvrzení lemmatu.

Q.E.D

Věta 5.7. (CLV Brown 1971) *Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je dáno $k_n \in \mathbb{N}$, reálné n.v. $X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{k_n,n} \in \mathbb{L}_1$ a σ-algebry $\mathcal{F}_{0,n} \subset \mathcal{F}_{1,n} \subset \mathcal{F}_{2,n} \subset \ldots \subset \mathcal{F}_{k_n,n} \subset \mathcal{A}_n$.*

(i) $(X_{k,n}, k = 1, 2, \ldots, k_n)$ *jsou* $(\mathcal{F}_{k,n}, k = 1, 2, \ldots, k_n)$*-martingalové diference pro každé* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) *Je splněna podmínka (PFL).*

(iii) $V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathsf{P}} 1$.

Potom $\sum_{k=1}^{k_n} X_{k,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} X$ *a* $\mathcal{L}(X) = \mathrm{N}(0,1)$.

Důkaz: Zavedeme nové n.v. $Y_{k,n} = X_{k,n}\mathbb{I}_{\left[\sum_{j=1}^{k} \mathsf{E}\left[X_{j,n}^2 \mid \mathcal{F}_{j-1,n}\right] \leq 2\right]}$ pro $k = 1, 2, \ldots, k_n$.
Uvědomme si jaké vlastnosti tyto nové n.v. mají

1. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots, k_n$ platí

$$
\mathsf{E}\left[Y_{k,n} \mid \mathcal{F}_{k-1,n}\right] = \mathsf{E}\left[X_{k,n} \mid \mathcal{F}_{k-1,n}\right]\mathbb{I}_{\left[\sum_{j=1}^{k} \mathsf{E}\left[X_{j,n}^2 \mid \mathcal{F}_{j-1,n}\right] \leq 2\right]} = 0 \quad \text{s.j.}
$$

2. Evidentně $|Y_{k,n}| \leq |X_{k,n}|$ a tudíž je splněno (PFL).

3. Nyní se podívejme na $\tilde{V}_n = \sum_{j=1}^{k_n} \mathsf{E}\left[Y_{j,n}^2 \mid \mathcal{F}_{j-1,n}\right]$.

$$
\begin{aligned}
\tilde{V}_n &= \sum_{k=1}^{k_n} \mathsf{E}\left[X_{k,n}^2 \mid \mathcal{F}_{k-1,n}\right]\mathbb{I}_{\left[\sum_{j=1}^{k} \mathsf{E}\left[X_{j,n}^2 \mid \mathcal{F}_{j-1,n}\right] \leq 2\right]} = \\
&= \left(\sum_{s=1}^{k_n} \mathsf{E}\left[X_{s,n}^2 \mid \mathcal{F}_{s-1,n}\right]\right)\mathbb{I}_{\left[\sum_{j=1}^{k_n} \mathsf{E}\left[X_{j,n}^2 \mid \mathcal{F}_{j-1,n}\right] \leq 2\right]} + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{k_n-1}\left(\sum_{s=1}^{k} \mathsf{E}\left[X_{s,n}^2 \mid \mathcal{F}_{s-1,n}\right]\right)\mathbb{I}_{\left[\sum_{j=1}^{k} \mathsf{E}\left[X_{j,n}^2 \mid \mathcal{F}_{j-1,n}\right] \leq 2 < \sum_{j=1}^{k+1} \mathsf{E}\left[X_{j,n}^2 \mid \mathcal{F}_{j-1,n}\right]\right]} \leq 2 \quad \text{s.j.}
\end{aligned}
$$

a také $\tilde{V}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathsf{P}} 1$, protože $V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathsf{P}} 1$.

4. Víme, že je splněno (PFL) a $\tilde{V}_n \leq 2$ s.j. a tak podle lemmatu 0.5 je splněno (FL). Z lemmatu 0.4 platí $\mathsf{E}\left[\max\{|Y_{k,n}| \,:\, k = 1, 2, \ldots, k_n\}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Víme, že $\tilde{V}_n \leq 2$ s.j. a tak i $\tilde{v}_n = \mathsf{E}\left[\tilde{V}_n\right] \leq 2$. Dále již víme, že platí (FL) a tak použitím lemmatu 0.6 dostáváme $\sum_{k=1}^{k_n} Y_{k,n}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathsf{P}} 1$.

Jsou tedy splněny předpoklady věty 0.1 a tak platí $\sum\limits_{k=1}^{k_n} Y_{k,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} X$ a $\mathcal{L}(X) = \mathrm{N}(0,1)$. Konvergenci pro původní n.v. dostaneme z toho, že

$$\mathsf{P}\left(\sum_{k=1}^{k_n} X_{k,n} \neq \sum_{k=1}^{k_n} Y_{k,n}\right) \leq \mathsf{P}\left(\sum_{k=1}^{k_n} \mathsf{E}\left[X_{k,n}^2 \mid \mathcal{F}_{k-1,n}\right] > 2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Q.E.D

Uvědomme si, že Feller-Lindebergova CLV je speciálním případem Brownovy CLV. Z nezávislosti totiž dostáváme (PFL)=(FL) a $V_n = v_n = \sum\limits_{k=1}^{k_n} \mathsf{Var}\,(X_{k,n})$.

Kapitola 6

Konvergence U-statistik

Tuto kapitolu lze také nalézt v [5], kap. VI.6, str. 399-404. Pěkným příkladem využívajícím teorii martingalů jsou symetrické posloupnosti reálných n.v. Pro jejich použití potřebujeme upřesnit značení a formulace kolem permutovatelnosti posloupnosti reálných čísel.

Definice 6.1. *Budeme označovat*

$$\begin{aligned}
\Pi &= \{\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ bijekce}\}, \\
\Pi_n &= \{\pi \in \Pi : \forall i \in \mathbb{N} \text{ je } \pi(n+i) = n+i\}, \\
\mathcal{D}_{n,k} &= \{(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(k)) : \pi \in \Pi_n\}, \\
\mathcal{R}_n &= \left\{\rho : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \text{existuje } \pi \in \Pi_n \text{ tak, že } \forall i \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ je } (\rho(x))_i = x_{\pi(i)}\right\}.
\end{aligned}$$

Definice 6.2. *Když X_n, $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost reálných n.v., pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ zavádíme σ-algebru $\mathcal{F}^n = \sigma(X_{n+i}, i \in \mathbb{N})$. Pro celou posloupnost definujeme* ***zbytkovou σ-algebru*** $\mathcal{F}^\infty = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathcal{F}^n$.

Definice 6.3. *Nechť $g : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že funkce g je* ***n-symetrická****, jestliže její hodnota nezávisí na pořadí prvních n souřadnic. Rigorózně to zapíšeme $g(x) = g(\rho(x))$ pro každé $\rho \in \mathcal{R}_n$.*

Množinu všech n-symetrických funkcí označíme SymF_n.

Definice 6.4. *Řekneme, že posloupnost reálných n.v. $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ je* ***symetrická****, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každé $\rho \in \mathcal{R}_n$ platí $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(\rho(X))$.*

Definice 6.5. *Když $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ je posloupnost reálných n.v., pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ zavádíme σ-algebru $\mathcal{S}^n = \sigma(g(X), g \in \mathsf{SymF}_n)$. Pro celou posloupnost zavádíme* ***symetrickou σ-algebru*** $\mathcal{S}^\infty = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathcal{S}^n$.

Lemma 6.6. *Vždy $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{S}^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a také $\mathcal{F}^\infty \subset \mathcal{S}^\infty$.*

Důkaz: Vezměme $A \in \mathcal{F}^n$. Pak existuje $B \in \mathbb{B}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$ tak, že

$$A = [(X_k, k \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}^n \times B] = [\mathbb{I}_{\mathbb{R}^n \times B}(X_k, k \in \mathbb{N}) = 1].$$

Funkce $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^n \times B}$ je n-symetrická. Tudíž $A \in \mathcal{S}^n$ a důkaz je hotov.

Q.E.D

σ-algebry $\mathcal{F}^\infty$ a $\mathcal{S}^\infty$ jsou obecně různé. Jejich rozdílnost ukazuje následující příklad.

Příklad 6.1. Množina $\left[\sum_{n=1}^{+\infty} X_n \text{ existuje}\right] \in \mathcal{F}^\infty$ a množina $\left[\sum_{n=1}^{+\infty} X_n = 1\right] \in \mathcal{S}^\infty$, ale obecně nemusí být prvkem $\mathcal{F}^\infty$.

△

Věta 6.7. (SZVČ pro U-statistiky) *Nechť posloupnost reálných n.v.* $X = (X_n,\, n \in \mathbb{N})$ *je symetrická a* $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *je měřitelná funkce, která splňuje* $f(X_1, X_2, \dots, X_k) \in \mathbb{L}_1$. *Potom*

$$\frac{(n-k)!}{n!} \sum_{i \in \mathcal{D}_{n,k}} f(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}) \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} \mathsf{E}\left[f(X_1, X_2, \dots, X_k) \mid \mathcal{S}^\infty \right].$$

Důkaz: Ze symetrie posloupnosti a ze symetrie σ-algebry $\mathcal{S}^n$ dostáváme

$$\mathsf{E}\left[f(X_1, X_2, \dots, X_k) \mid \mathcal{S}^n \right] = \mathsf{E}\left[f\left(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \dots, X_{\pi(k)}\right) \,\middle|\, \mathcal{S}^n \right] \text{ s.j. pro každé } \pi \in \Pi_n.$$

Funkce $\sum_{\pi \in \Pi_n} f\left(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(k)}\right)$ je n-symetrická a tudíž

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[f(X_1, X_2, \dots, X_k) \mid \mathcal{S}^n \right] &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi_n} \mathsf{E}\left[f\left(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \dots, X_{\pi(k)}\right) \,\middle|\, \mathcal{S}^n \right] = \\
&= \frac{1}{n!} \mathsf{E}\left[\sum_{\pi \in \Pi_n} f\left(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \dots, X_{\pi(k)}\right) \,\middle|\, \mathcal{S}^n \right] = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi_n} f\left(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \dots, X_{\pi(k)}\right) = \\
&= \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{i \in \mathcal{D}_{n,k}} f(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}) \quad \text{s.j.}
\end{aligned}$$

Víme, že $\mathcal{S}^1 \supset \mathcal{S}^2 \supset \mathcal{S}^3 \supset \dots$. a $\mathcal{S}^\infty = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathcal{S}^n$. Proto

$$\mathsf{E}\left[f(X_1, X_2, \dots, X_k) \mid \mathcal{S}^n \right] \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} \mathsf{E}\left[f(X_1, X_2, \dots, X_k) \mid \mathcal{S}^\infty \right].$$

Odtud již plyne požadovaná konvergence U-statistiky

$$\frac{(n-k)!}{n!} \sum_{i \in \mathcal{D}_{n,k}} f(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}) \xrightarrow[n\to+\infty]{s.j.} \mathsf{E}\left[f(X_1, X_2, \dots, X_k) \mid \mathcal{S}^\infty \right].$$

Q.E.D

Poznamenejme, že symetrické statistice $\frac{(n-k)!}{n!} \sum_{i \in \mathcal{D}_{n,k}} f(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k})$ se v matematické statistice říká U-statistika. Používá se k odhadování parametrů modelu. Známe-li její rozdělení, případně její asymptotické rozdělení, pak s její pomocí můžeme testovat statistické hypotézy týkající se odhadovaných parametrů.

Připomeňme, že o náhodných veličinách říkáme, že jsou podmíněně nezávislé, pokud jejich sdružené podmíněné rozdělení existuje a je součinové. Říkáme, že jsou podmíněně stejně rozdělené, pokud jejich podmíněná rozdělení existují a rovnají se. Viz například kapitola 9 v [4] nebo kapitola VI.1 v [5]. Tyto vlastnosti můžeme ověřovat následovně.

Lemma 6.8. *Mějme dvě náhodných veličin* X, Y *s hodnotami v měřitelném prostoru* $\mathcal{X}$ *a* σ*-algebru* $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$. *Pak* X, Y *mají podmíněně stejné rozdělení vzhledem k* $\mathcal{G}$ *tehdy a jen tehdy, když pro každou omezenou měřitelnou funkci* $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *platí*

$$\mathsf{E}\left[g(X) \mid \mathcal{G} \right] = \mathsf{E}\left[g(Y) \mid \mathcal{G} \right] \quad s.j.$$

Lemma 6.9. *Mějme kolekci náhodných veličin* $(X_i, i \in I)$, *kde pro každé* $i \in I$ *má* X_i *hodnoty v měřitelném prostoru* $\mathcal{X}_i$, *a* σ*-algebru* $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$. *Pak* $X_i, i \in I$ *jsou podmíněně nezávislé vzhledem k* $\mathcal{G}$ *tehdy a jen tehdy, když pro každou konečnou množinu* $J \subset I$ *a omezené měřitelné funkce* $g_j : \mathcal{X}_j \to \mathbb{R}$, $j \in I$ *platí*

$$\mathsf{E}\left[\prod_{j \in J} g_j(X_j) \,\middle|\, \mathcal{G} \right] = \prod_{j \in J} \mathsf{E}\left[g_j(X_j) \mid \mathcal{G} \right] \quad s.j.$$

Věta 6.10. (De Finetti) *Když je posloupnost reálných n.v.* X_n, $n \in \mathbb{N}$ *symetrická, pak* X_n, $n \in \mathbb{N}$ *jsou podmíněně nezávislé a podmíněně stejně rozdělené vzhledem k* $\mathcal{S}^\infty$.

Důkaz: Ověříme kritéria z lemmat 0.8 a 0.9.

1. Nechť $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je omezená měřitelná funkce, pak podle věty 0.7 pro každé $q \in \mathbb{N}$ platí

$$\mathsf{E}\left[g\left(X_1\right) \mid \mathcal{S}^\infty\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g\left(X_i\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-q+1} \sum_{i=q}^{n} g\left(X_i\right) = \mathsf{E}\left[g\left(X_q\right) \mid \mathcal{S}^\infty\right] \quad \text{s.j.}$$

2. Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $g_1, g_2, \ldots, g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou omezené měřitelné funkce. Pak podle věty 0.7 platí

$$\mathsf{E}\left[g_1\left(X_1\right) g_2\left(X_2\right) \ldots g_k\left(X_k\right) \mid \mathcal{S}^\infty\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{i \in \mathcal{D}_{n,k}} g_1\left(X_{i_1}\right) g_2\left(X_{i_2}\right) \ldots g_k\left(X_{i_k}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{(n-k)!}{n!} \prod_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} g_i\left(X_j\right) - \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{i \in \{1,2,\ldots,n\}^k - \mathcal{D}_{n,k}} g_1\left(X_{i_1}\right) g_2\left(X_{i_2}\right) \ldots g_k\left(X_{i_k}\right)\right] =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} g_i\left(X_j\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathsf{E}\left[g_i\left(X_1\right) \mid \mathcal{S}^\infty\right] = \prod_{i=1}^{k} \mathsf{E}\left[g_i\left(X_i\right) \mid \mathcal{S}^\infty\right] \quad \text{s.j.,}$$

protože $\mathsf{card}\left(\{1,2,\ldots,n\}^k - \mathcal{D}_{n,k}\right) = n^k - \frac{n!}{(n-k)!} = \mathcal{O}\left(n^{k-1}\right)$ a funkce $g_1, g_2, \ldots, g_k$ jsou omezené měřitelné. Též využíváme předchozího bodu důkazu.

Tím jsou požadovaná podmíněná nezávislost a shodnost podmíněných rozdělení dokázány.

Q.E.D

Uvědomme si jaké bezprostřední důsledky má de Finettiho věta. Pokud má symetrická posloupnost navíc konečný rozptyl, dokážeme popsat její kovarianční strukturu.

Tvrzení 6.11. *Nechť posloupnost reálných n.v. $X_n, n \in \mathbb{N}$ je symetrická a má konečný rozptyl. Označme $Y = \mathsf{E}\left[X_1 \mid \mathcal{S}^\infty\right]$. Pak pro každé $k, r \in \mathbb{N}$, $k \neq r$ platí*

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[X_k\right] &= \mathsf{E}\left[Y\right], &(6.1)\\
\mathsf{E}\left[\left(X_k\right)^2\right] &= \mathsf{E}\left[\left(X_1\right)^2\right] \geq \mathsf{E}\left[\left(Y\right)^2\right], &(6.2)\\
\mathsf{E}\left[X_k X_r\right] &= \mathsf{E}\left[\left(Y\right)^2\right], &(6.3)\\
\mathsf{Var}\left(X_k\right) &= \mathsf{Var}\left(X_1\right) \geq \mathsf{Var}\left(Y\right), &(6.4)\\
\mathsf{cov}\left(X_k, X_r\right) &= \mathsf{Var}\left(Y\right). &(6.5)
\end{aligned}$$

Důkaz: Vypočítejme první a druhé momenty dané symetrické posloupnosti. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[X_k\right] &= \mathsf{E}\left[X_1\right] = \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left[X_1 \mid \mathcal{S}^\infty\right]\right] = \mathsf{E}\left[Y\right],\\
\mathsf{E}\left[\left(X_k\right)^2\right] &= \mathsf{E}\left[\left(X_1\right)^2\right] \geq \mathsf{E}\left[\left(\mathsf{E}\left[X_1 \mid \mathcal{S}^\infty\right]\right)^2\right] = \mathsf{E}\left[\left(Y\right)^2\right],\\
\mathsf{Var}\left(X_k\right) &= \mathsf{Var}\left(X_1\right) = \mathsf{E}\left[\left(X_1\right)^2\right] - \left(\mathsf{E}\left[X_1\right]\right)^2 \geq \mathsf{E}\left[\left(Y\right)^2\right] - \left(\mathsf{E}\left[Y\right]\right)^2 = \mathsf{Var}\left(Y\right).
\end{aligned}$$

S využitím věty 0.10 pro každé $k, r \in \mathbb{N}$, $k \neq r$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[X_k X_r\right] &= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left[X_k X_r \mid \mathcal{S}^\infty\right]\right] = \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left[X_k \mid \mathcal{S}^\infty\right] \mathsf{E}\left[X_r \mid \mathcal{S}^\infty\right]\right]\\
&= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left[X_1 \mid \mathcal{S}^\infty\right] \mathsf{E}\left[X_1 \mid \mathcal{S}^\infty\right]\right] = \mathsf{E}\left[\left(Y\right)^2\right],\\
\mathsf{cov}\left(X_k, X_r\right) &= \mathsf{E}\left[X_k X_r\right] - \mathsf{E}\left[X_k\right] \mathsf{E}\left[X_r\right] = \mathsf{E}\left[\left(Y\right)^2\right] - \left(\mathsf{E}\left[Y\right]\right)^2 = \mathsf{Var}\left(Y\right).
\end{aligned}$$

Q.E.D

Povšimněme si, že kovariance v symetrické posloupnosti nemůže být záporná! Posloupnost je nekorelovaná pouze tehdy, když Y je skoro jistě rovna nějaké konstantě.

Když je symetrická posloupnost navíc po dvou nezávislá, pak je i.i.d. Při důkazu opět vystačíme se znalostí de Finettiho věty.

Lemma 6.12. *Nechť posloupnost reálných n.v. $X_n, n \in \mathbb{N}$ je symetrická a po dvou nezávislá. Pak pro každou A borelovskou podmnožinu $\mathbb{R}$ platí*

$$\mathsf{P}(X_1 \in A \mid \mathcal{S}^\infty) = \mathsf{P}(X_2 \in A \mid \mathcal{S}^\infty) = \mathsf{P}(X_3 \in A \mid \mathcal{S}^\infty) = \ldots = \mathsf{P}(X_1 \in A) \quad s.j.$$

Důkaz: Podle věty 0.10 již víme, že uvedené podmíněné pravděpodobnosti jsou skoro jistě stejné náhodné veličiny. Posloupnost je navíc po dvou nezávislá. To umožňuje ukázat, že sledované podmíněné pravděpodobnosti jsou skoro jistě rovny své střední hodnotě.

Podle věty 0.10 jsou náhodné veličiny $\mathbb{I}_{[X_n \in A]}, n \in \mathbb{N}$ podmíněně nezávislé za podmínky $\mathcal{S}^\infty$.
Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left[\mathsf{P}(X_1 \in A \mid \mathcal{S}^\infty)^2\right] &= \mathsf{E}\left[\mathsf{P}(X_1 \in A \mid \mathcal{S}^\infty)\,\mathsf{P}(X_2 \in A \mid \mathcal{S}^\infty)\right] = \mathsf{E}\left[\mathsf{P}(X_1 \in A,\ X_2 \in A \mid \mathcal{S}^\infty)\right] \\ &= \mathsf{P}(X_1 \in A,\ X_2 \in A) = \mathsf{P}(X_1 \in A) \cdot \mathsf{P}(X_2 \in A) = \mathsf{P}(X_1 \in A)^2 .\end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$\mathsf{Var}\left(\mathsf{P}(X_1 \in A \mid \mathcal{S}^\infty)\right) = \mathsf{E}\left[\mathsf{P}(X_1 \in A \mid \mathcal{S}^\infty)^2\right] - \mathsf{P}(X_1 \in A)^2 = 0 .$$

Tudíž náhodná veličina $\mathsf{P}(X_1 \in A \mid \mathcal{S}^\infty)$ je skoro jistě rovna $\mathsf{P}(X_1 \in A)$.
Tím je tvrzení dokázáno.

Q.E.D

Tvrzení 6.13. *Nechť posloupnost reálných n.v. $X_n, n \in \mathbb{N}$ je symetrická a po dvou nezávislá, pak je i.i.d.*

Důkaz: Podle předchozího lemmatu 0.12 a podle věty 0.10, pro každé $A_1, \cdots, A_k,\ k \in \mathbb{N}$ borelovské podmnožiny $\mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X_j \in A_j,\ 1 \le j \le k) &= \mathsf{E}\left[\mathsf{P}(X_j \in A_j,\ 1 \le j \le k \mid \mathcal{S}^\infty)\right] \\ &= \mathsf{E}\left[\prod_{j=1}^{k} \mathsf{P}(X_j \in A_j \mid \mathcal{S}^\infty)\right] = \mathsf{E}\left[\prod_{j=1}^{k} \mathsf{P}(X_j \in A_j)\right] = \prod_{j=1}^{k} \mathsf{P}(X_j \in A_j) .\end{aligned}$$

Tím jsme ukázali nezávislost a posloupnost je i.i.d.

Q.E.D

Když symetrická posloupnost obsahuje náhodné veličiny, které mají alternativní rozdělení, pak můžeme kovarianční strukturu posloupnosti upřesnit.

Tvrzení 6.14. *Nechť posloupnost reálných n.v. $X_n, n \in \mathbb{N}$ je symetrická a X_1 nabývá pouze hodnot 0 nebo 1. Označme $Y = \mathsf{E}[X_1 \mid \mathcal{S}^\infty] = \mathsf{P}(X_1 = 1 \mid \mathcal{S}^\infty)$. Pak pro každé $k, r \in \mathbb{N},\ k \neq r$ platí*

$$\mathsf{E}[X_k] = \mathsf{E}[Y], \tag{6.6}$$

$$\mathsf{E}\left[(X_k)^2\right] = \mathsf{E}[Y], \tag{6.7}$$

$$\mathsf{E}[X_k X_r] = \mathsf{E}\left[(Y)^2\right], \tag{6.8}$$

$$\mathsf{Var}(X_k) = \mathsf{E}[Y](1 - \mathsf{E}[Y]), \tag{6.9}$$

$$\mathsf{cov}(X_k, X_r) = \mathsf{Var}(Y) . \tag{6.10}$$

Důkaz: Větší část tvrzení je již obsažena v lemmatu 11. Zbývá vypočítat pouze rozptyl posloupnosti. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left[(X_k)^2\right] &= \mathsf{E}\left[(X_1)^2\right] = \mathsf{E}[X_1] = \mathsf{E}[Y], \\ \mathsf{Var}(X_k) &= \mathsf{Var}(X_1) = \mathsf{E}\left[(X_1)^2\right] - (\mathsf{E}[X_1])^2 = \mathsf{E}[Y] - (\mathsf{E}[Y])^2 = \mathsf{E}[Y](1 - \mathsf{E}[Y]).\end{aligned}$$

Q.E.D

Opět zjišťujeme, že kovariance je vždy nezáporná. Dále posloupnost je nekorelovaná, když Y je skoro jistě rovna nějaké konstantě. Dvě alternativní náhodné veličiny jsou nezávislé tehdy a pouze tehdy, když jsou nekorelované. Proto víme, že daná posloupnost je po dvou nezávislá, když Y je skoro jistě rovna nějaké konstantě. Podle věty 13 již víme, že symetrická posloupnost alternativních náhodných veličin je i.i.d. pouze tehdy, když Y je skoro jistě rovna nějaké konstantě.

Dokážeme však více. Lze přesně popsat podmíněná konečněrozměrná rozdělení posloupnosti.

Tvrzení 6.15. *Nechť posloupnost reálných n.v. $X_n, n \in \mathbb{N}$ je symetrická a X_1 nabývá pouze hodnot 0 nebo 1. Označme $Y = \mathsf{E}[X_1 \mid \mathcal{S}^\infty] = \mathsf{P}(X_1 = 1 \mid \mathcal{S}^\infty)$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $i \in \{0,1\}^k$ platí*

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_k = i_k \mid Y) = \\ = \mathsf{P}(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_k = i_k \mid \mathcal{S}^\infty) \\ = Y^{\mathsf{card}(j:i_j=1)}(1-Y)^{\mathsf{card}(j:i_j=0)} \quad s.j.\end{aligned}$$

Důkaz: Když $k \in \mathbb{N}$ a $i \in \{0,1\}^k$, pak podle věty 0.10 platí

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_k = i_k \mid \mathcal{S}^\infty) = \\ = \mathsf{P}(X_1 = i_1 \mid \mathcal{S}^\infty) \cdot \mathsf{P}(X_2 = i_2 \mid \mathcal{S}^\infty) \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}(X_k = i_k \mid \mathcal{S}^\infty) \\ = \prod_{j=1}^{k} Y^{i_j}(1-Y)^{1-i_j} = Y^{\mathsf{card}(j:i_j=1)}(1-Y)^{\mathsf{card}(j:i_j=0)} \quad \text{s.j.}\end{aligned}$$

Náhodná veličina Y je $\mathcal{S}^\infty$-měřitelná. Proto platí

$$\mathsf{P}(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_k = i_k \mid Y) = \mathsf{P}(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_k = i_k \mid \mathcal{S}^\infty) \quad \text{s.j.}$$

Q.E.D

Speciálně pro součet n členů symetrické posloupnosti alternativně rozdělených náhodných veličin známe jeho podmíněné rozdělení. Pro $k = 0, 1, \dots, n$ totiž dostáváme

$$\mathsf{P}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j = k \,\middle|\, Y\right) = \mathsf{P}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j = k \,\middle|\, \mathcal{S}^\infty\right) = \binom{n}{k} Y^k (1-Y)^{n-k} \quad \text{s.j.}$$

Tudíž

$$\mathsf{P}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j = k\right) = \binom{n}{k} \; \mathsf{E}\left[Y^k (1-Y)^{n-k}\right] .$$

Můžeme říkat, že součet n členů symetrické posloupnosti alternativně rozdělených náhodných veličin má „smíchané binomické rozdělení s parametry n a Y“.

Literatura

[1] Hoffmann-Jørgensen, J.: *Probability with a View Towards to Statistics I.* Chapman and Hall, New York 1994.

[2] Kallenberg, O.: *Foundation of Modern Probability.* Springer, Berlin 1997.

[3] Karatzas, I.; Shreve, S.E.: *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer, New York, 1998.

[4] Lachout, P.: *Teorie pravděpodobnosti.* skripta MFF UK, Praha 1998.

[5] Štěpán, J.: *Teorie pravděpodobnosti.* Academia, Praha 1987.

Index