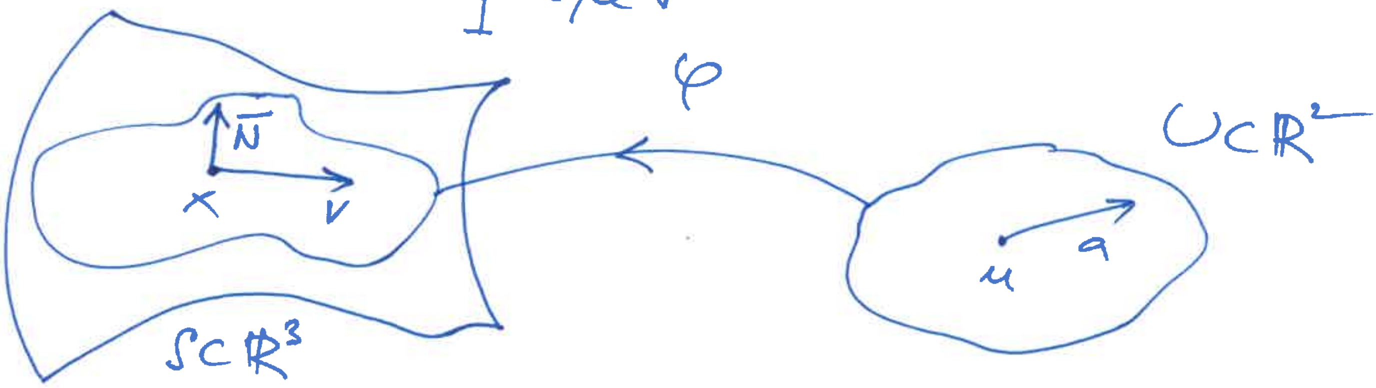
Plochy v $\mathbb{R}^3$

Nechť $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je kladně orient. mapa orient. plochy S a $x = \varphi(u)$. Potom $\forall v \in T_x S$

$$I_x(v) = a^T g(u)\, a \quad \text{a} \quad II_x(v) = a^T h(u)\, a,$$

kde $v = D\varphi(u)\, a$, $a \in \mathbb{R}^2$, $g := D\varphi^T D\varphi$ a $h = (h^{ij})$, $h^{ij} = \langle \vec{N}, \varphi_{u_i u_j} \rangle$

$\vec{N}$ … normálové pole na S



Př1 Najděte 1. a 2. fundamentální formu ploch

1. hyperbolický paraboloid $z = xy$ v $\mathbb{R}^3$
2. šroubová plocha (helikoid)
3. rotační plocha v $\mathbb{R}^3$ — sféra, torus …

L. Boček: Příklady z diferenciální geometrie, skripta MFF UK, 1974

PL02

<u>Hlavní křivosti</u> x_1, x_2 a souřadnice <u>hlavních směrů</u> $a^1, a^2 \in \mathbb{R}^2$ plochy S v bodě $x = \varphi(u)$ hledáme pomocí rovnic

(E1) $(h(u) - \lambda g(u))a = 0,$

(E2) $\det(h(u) - \lambda g(u)) = 0.$

<u>Hlavní směr</u> příslušný x_j je pak $v_j := D\varphi(u)a^j$. Na procvičce bude, že

- $K(x) := x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\det h(u)}{\det g(u)}$ <u>Gaussova křivost</u>,
- $H(x) := \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{h^{11}(u)\, g^{22}(u) + h^{22}(u)\, g^{11}(u) - 2h^{12}(u)\, g^{12}(u)}{2 \det g(u)}$
  <u>střední křivost</u>,
- $x_{1/2} := H \pm \sqrt{H^2 - K}$ v bodě x

<u>Pozn</u>: Je-li $\tilde{\varphi}$ opačně orientovaná mapa S, potom $\tilde{I} = I$, $\tilde{II} = -II$, tedy $\tilde{x}_4 = -x_4$, $\tilde{K} = K$, $\tilde{H} = -H$

Př. Šroubová plocha (helikoid): Nechť $k>0$ a

$$\varphi(u,v) := (u\cdot\cos v,\ u\cdot\sin v,\ k\cdot v),\quad (u,v)\in\mathbb{R}^2.$$

(točité schodiště)

— x —

(i) $\varphi_u = (\cos v, \sin v, 0)$

$\varphi_v = (-u\cdot\sin v, u\cdot\cos v, k)$

$\varphi_u\times\varphi_v = (k\cdot\sin v, -k\cdot\cos v, u)$

$\|\varphi_u\times\varphi_v\|^2 = k^2+u^2>0$

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{k^2+u^2}}(k\cdot\sin v, -k\cdot\cos v, u)$$

(ii) φ je mapa, protože $(u,v)=\varphi^{-1}(x,y,z)$ je spojitá

$v=\frac{z}{k}$

$u=\frac{x}{\cos v}$, je-li $\frac{z}{k}\neq\frac{\pi}{2}+l\pi$ pro $l\in\mathbb{Z}$,

$=\frac{y}{\sin v}$, —11— $\frac{z}{k}\neq l\pi$ —11—

(iii) $$g=\begin{pmatrix}1&0\\0&k^2+u^2\end{pmatrix}$$

$\varphi_{uu}=0$

$\varphi_{uv}=(-\sin v, \cos v, 0)$

$\varphi_{vv}=(-u\cos v, -u\cdot\sin v, 0)$

$$h=\frac{1}{\sqrt{k^2+u^2}}\begin{pmatrix}0&-k\\-k&0\end{pmatrix}$$

$\det g = k^2+u^2$

$\det h = -\frac{k^2}{k^2+u^2}$

$$K=-\frac{k^2}{(k^2+u^2)^2},\quad H=0,\quad \varkappa_{1,2}=\pm\frac{k}{k^2+u^2}$$

HEL1

(iv) Hlavní směry – rovnice (E1) pro $\lambda = \kappa_{1/2}$:

$$\begin{pmatrix} \pm k(k^2+u^2)^{-1} & -k(k^2+u^2)^{-1/2} \\ -k(k^2+u^2)^{-1/2} & \pm k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \end{pmatrix} = 0$$

- $a^{1/2} = \begin{pmatrix} \pm (k^2+u^2)^{1/2} \\ 1 \end{pmatrix}$ souřadnice hlavních směrů

$$w = D\varphi(u,v)\, a = a_1 \varphi_u + a_2 \varphi_v, \quad a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$$

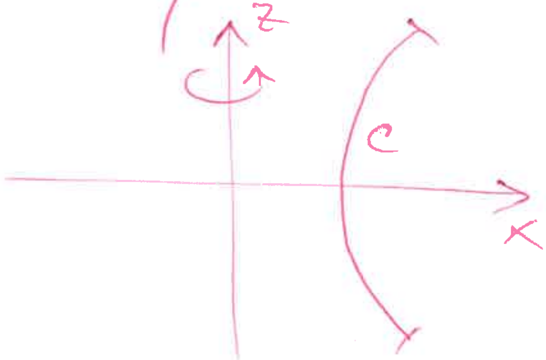
- $w^{1/2} = \big(\pm (k^2+u^2)^{1/2} \cdot \cos v - u \cdot \sin v,\ \pm (k^2+u^2)^{1/2} \cdot \sin v + u \cdot \cos v,\ k\big)$

jsou hlavní směry pro hlavní křivosti $\kappa_{1/2}$

HEL2

Př. Nechť $S \subset \mathbb{R}^3$ vznikne rotací křivky c v rovině xz kolem osy z.

RP1,5



Nechť $c(u) = (p(u), 0, q(u))$, $u \in I$ otevř. interval.

a) Je-li $\langle c \rangle \subset H^+ := \{(x,z) \mid x > 0\}$ a c je regulární (tzn. $c' \neq 0$ na I), potom parametrizace S

$$\varphi(u,v) := (p(u) \cdot \cos v,\ p(u) \cdot \sin v,\ q(u)),\quad u \in I,\ v \in \mathbb{R},$$

je regulární (tzn. $\operatorname{rank} D\varphi = 2$ všude).

b) Je-li c dokonce 1-mapa, potom je $\varphi|_{I \times (-\pi + v_0, v_0 + \pi)}$ 2-mapa pro libovolné $v_0 \in \mathbb{R}$ a S je 2-plocha.

c) Najdi p, q pro (i) sféru

(ii) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

d) Je-li c 1-mapa, najdi A_S. ←

RP2

a) $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \left(p'(u)\cos v,\ p'(u)\sin v,\ q'(u)\right)$

$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left(-p(u)\sin v,\ p(u)\cos v,\ 0\right)$

$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left(-p(u)\,q'(u)\cos v,\ -p(u)\,q'(u)\sin v,\ p'(u)\cdot p(u)\right),$

$\left\|\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right\|^2 = (p(u))^2\left((q'(u))^2 + (p'(u))^2\right) > 0$

b) $\boxed{v_0 := 0}$

$x = p(u)\cdot\cos v$ $\qquad p(u) = \sqrt{x^2+y^2}$

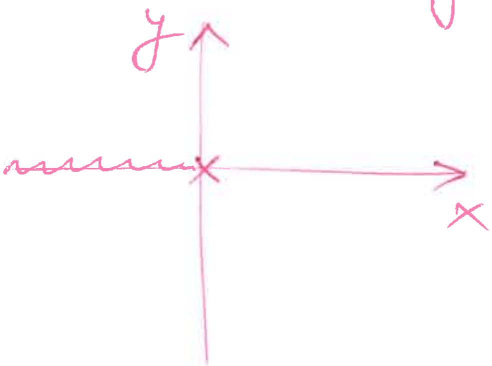
$y = p(u)\cdot\sin v$

$z = q(u)$

$u := c^{-1}\left(\sqrt{x^2+y^2},\ 0,\ z\right)$

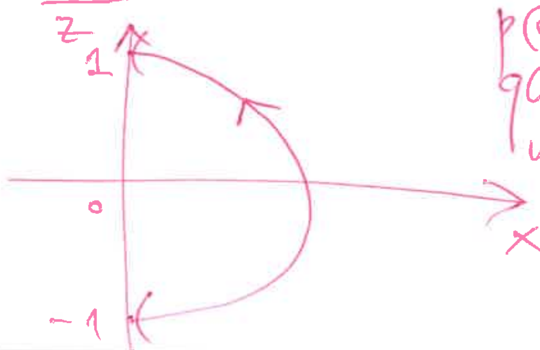
$v := \arg(x,y)$, kde $\arg : \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to (-\pi,\pi]$ je hlavní hodnota argumentu z UKA, která je spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus (-\infty,0]\times\{0\}$.

[Pro jiné v_0 musíme mít jinou spojitou větev argumentu.]



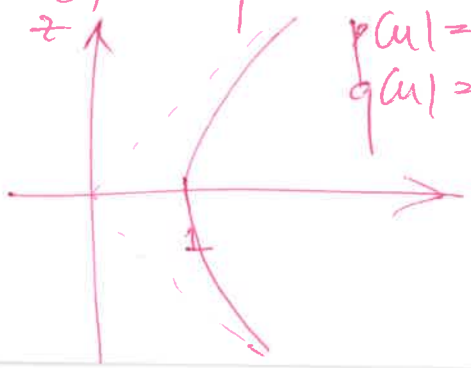
c) (i) sféra: $x^2+y^2+z^2=1$

$p(u) = \cos u,$
$q(u) = \sin u,$
$u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



(ii) $x^2+y^2-z^2=1$

$p(u) = \cosh u,$
$q(u) = \sinh u,$
$u \in \mathbb{R}$



RP3

g) $J\varphi = p\cdot\|c'\|$, $p>0$

Je-li $\psi := \varphi|_{I\times(0,2\pi)}$ $(-\pi,\pi)$, potom

$$\lambda_S(B) = \int_{\psi^{-1}(B)} p(u)\,\|c'(u)\|\,du\,dv,\quad B\subset S \text{ borel.}$$

Speciálně, $\underbrace{\lambda_S(S)}_{\text{obsah } S} = 2\pi\int_I p(u)\,\|c'(u)\|\,du =$

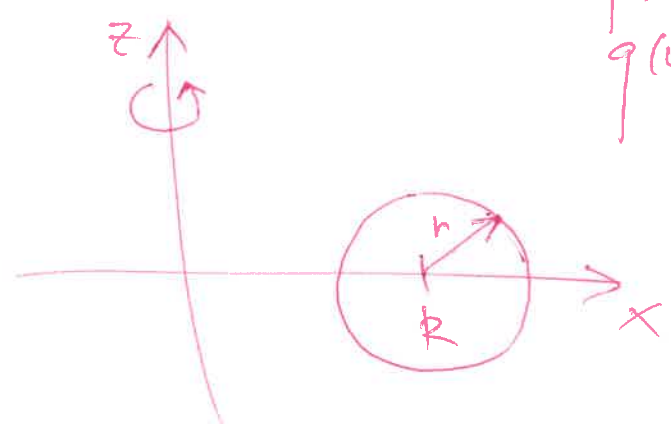
$$= 2\pi\cdot\underbrace{\lambda_c(C)}_{\text{délka } c}\cdot x_T,\ \text{kde}$$

$x_T := \dfrac{1}{\lambda_c(C)}\displaystyle\int_C x\,ds$ je x-ová souřadnice těžiště c. [<u>2. GULDINOVA VĚTA</u> o obsahu rotační plochy v $\mathbb{R}^3$]

Př. <u>Obsah torus</u>: Nechť $R>r>0$,

$p(u) = R + r\cdot\cos u$, $u\in\mathbb{R}$

$q(u) = r\cdot\sin u$



Potom zřejmě $x_T = R$ a obsah T^2 je $2\pi\cdot2\pi\cdot r\cdot R$ $= \underline{4\pi^2 r\cdot R}$

c) hlavní křivosti

RP6

$\bar{N} = \frac{1}{A}(-q'\cos v, -q'\sin v, p')$, kde

$A = \|c'\| = ((p')^2 + (q')^2)^{1/2}$

$$g = \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}, \quad h = \frac{1}{A}\begin{pmatrix} -q'p'' + p'q'' & 0 \\ 0 & pq' \end{pmatrix}$$

$\varphi_{uu} = (p''\cos v, p''\sin v, q'')$

$\varphi_{uv} = (-p'\sin v, p'\cos v, 0)$

$\varphi_{vv} = (-p\cos v, -p\sin v, 0)$

Pro $\lambda = \frac{\tilde{\lambda}}{A}$

(E2)
$$\begin{vmatrix} (p'q'' - p''q') - \tilde{\lambda}A^2 & 0 \\ 0 & pq' - \tilde{\lambda}p^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\tilde{\lambda})^2 p^2 A^2 - \tilde{\lambda}\left(A^2 pq' + p^2(p'q'' - p''q')\right) + p^2(p'q'' - p''q') = 0$$

- $\varkappa_1 := \frac{1}{A}\cdot\frac{q'}{p}$, $a^1 := (0,1)$, $w^1 := \varphi_v$ hlavní směr
- $\varkappa_2 := \frac{p'q'' - p''q'}{A^3}$, $a^2 := (1,0)$, $w^2 := \varphi_u$
- $K = \frac{(p'q'' - p''q')}{A^4}\cdot\frac{q'}{p}$

RP7

Pozn.: (i) Je-li $\kappa_1 = \kappa_2$, potom každý tečný vektor je hlavní.

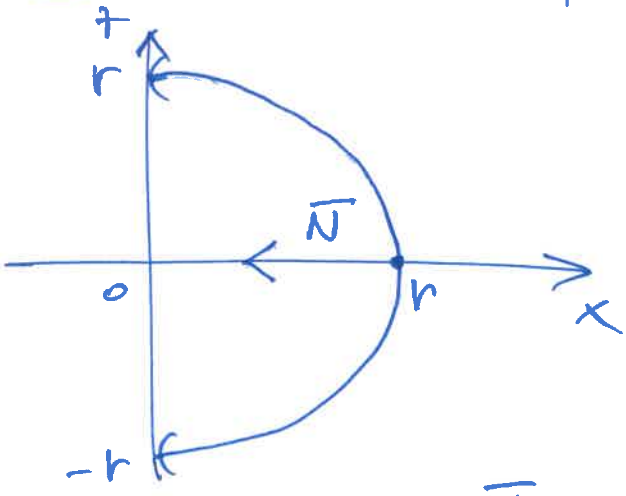
(ii) Nechť c má konstantní rychlost, tzn. $\|c'\| = r > 0$ na I. Potom $A = r$ a $(p')^2 + (q')^2 = r^2$, tudíž $2p'p'' + 2q'q'' = 0$ a

$$(p'q'' - p''q')\,q' = -(p')^2 p'' - p''\left(r^2 - (p')^2\right) = -p'' r^2.$$

Dostaneme

$$\boxed{K = -\frac{p''}{p \cdot r^2}}$$

Pr) Sféra: $x^2+y^2+z^2=r^2 \quad (r>0)$ RPG



$p(u) := r \cdot \cos u$
$q(u) := r \cdot \sin u$, $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\times$

$p' = -r \cdot \sin u = q''$
$q' = r \cdot \cos u = -p''$
$A = r$

- $\bar{N} = (-\cos u \cos v, -\cos u \cdot \sin v, -\sin u)$
$\bar{N}(0,0) = (-1,0,0) \rightsquigarrow \bar{N}$ je vnitřní normálové pole

Pozn: Vnější normálové pole indukuje nepř. parametrizace $\psi(v,u) := \varphi(u,v)$

$\times$

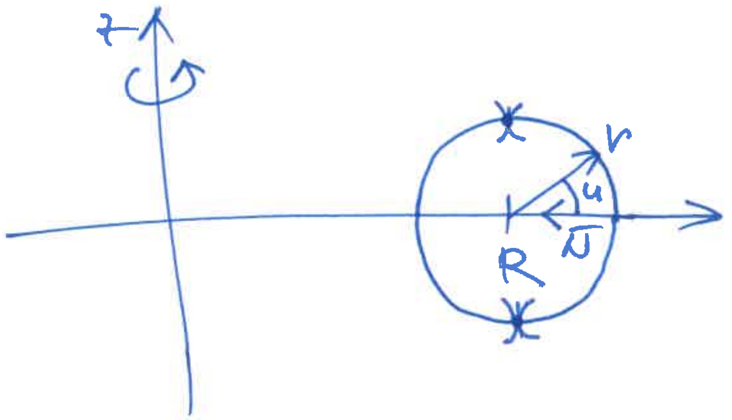
$\varkappa_1 = \frac{1}{r} = \varkappa_2, \quad K = \frac{1}{r^2}$

RPG

Př. **torus**: Nechť $R > r > 0$,

$p(u) := R + r \cdot \cos u$, $u \in \mathbb{R}$

$q(u) := r \cdot \sin u$ $\in (-\pi, \pi)$ lépe

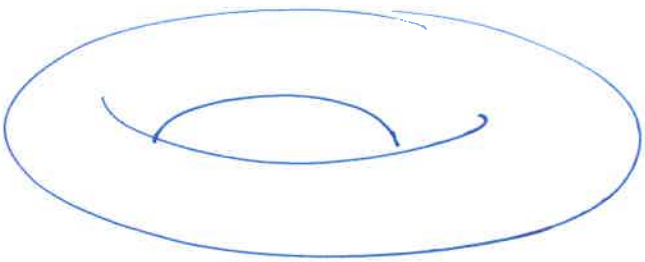


$p' = -r \sin u = q''$

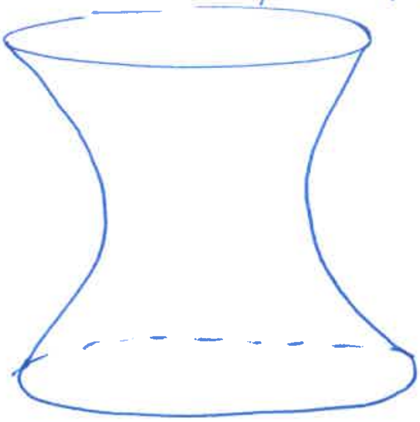
$q' = r \cdot \cos u = -p''$

$A = r$, $\bar{n}$ vnitřní normálové pole

- $\varkappa_1 = \dfrac{\cos u}{p}$, $\varkappa_2 = \dfrac{1}{r}$, $K = \dfrac{\cos u}{r \cdot p}$
- $K > 0$ pro $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, body eliptické
- $K = 0$ $\quad u = \pm \frac{\pi}{2}$ parabolické
- $K < 0$ $\quad u \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ hyperbolické



Jednodílný hyperboloid: $x^2+y^2-z^2=1$



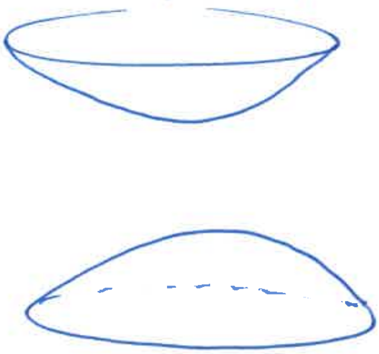
$p(u)=\cosh u$, $q(u)=\sinh u$, $u\in\mathbb{R}$

$$p'=q=q'',\quad q'=p=p'',\quad A=\sqrt{\cosh(2u)}$$

- $\varkappa_1=\frac{1}{A}$, $\varkappa_2=\frac{q^2-p^2}{A^3}=-\frac{1}{A}$, $K=-\frac{1}{\cosh(2u)}$

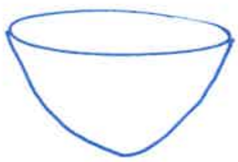
Dvoudílný hyperboloid: $x^2+y^2-z^2=-1$

$p(u)=\sinh u$
$q(u)=\pm\cosh u$, $u>0$



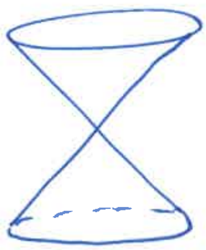
Eliptický paraboloid: $z=x^2+y^2$

$p(u)=u$
$q(u)=u^2$



Kužel: $x^2+y^2=z^2$

$p(u)=u$, $q(u)=\pm u$



Válec: $x^2+y^2=1$

$p(u)=1$, $q(u)=u$