Příklad: Hyperbolický paraboloid $z = xy$ v $\mathbb{R}^3$, HP1

tm. $P := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy\}$.
graf funkce

(i) $\varphi(x,y) := (x,y,xy)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ je mapa, $P = \langle \varphi \rangle$

$\varphi_x = (1,0,y)$ $\qquad \varphi_x \times \varphi_y = (-y,-x,1)$

$\varphi_y = (0,1,x)$ $\qquad N := \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}(-y,-x,1) = N(X)$,

$X = \varphi(x,y)$

$$g = \begin{pmatrix} 1+y^2 & xy \\ xy & 1+x^2 \end{pmatrix}, \quad h = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A

$\varphi_{xx} = 0 = \varphi_{yy}$, $\qquad \det g = (1+y^2)(1+x^2) - x^2y^2 =$

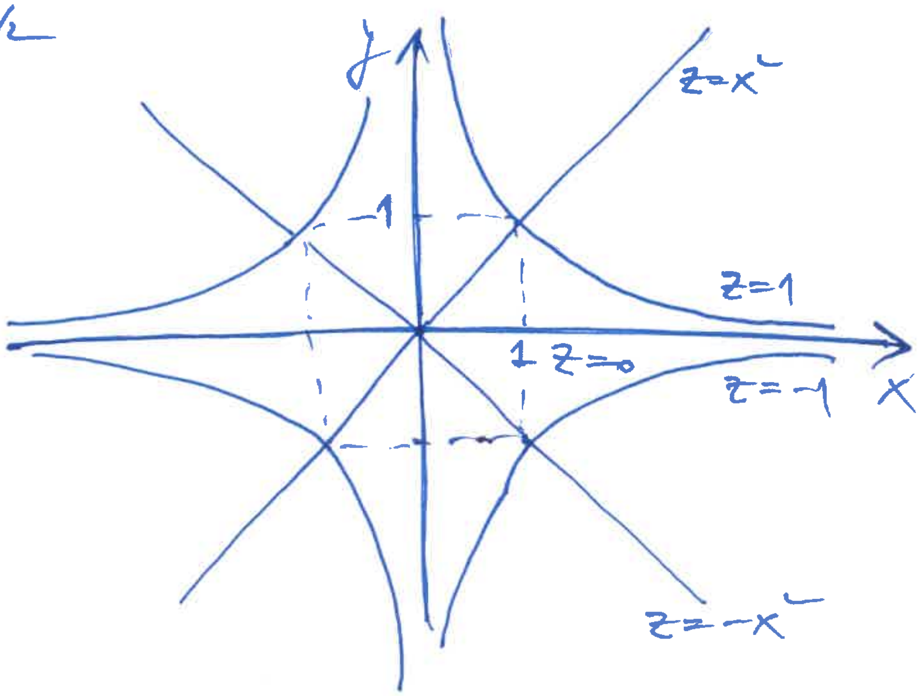
$\varphi_{xy} = (0,0,1)$ $\qquad = 1+x^2+y^2$

$\det h = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

(ii) $K = -\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$

$H = -\frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$

(sedlo)



(iii) Regulární křivka $c(t) = \varphi(x(t), y(t))$, $t \in I$ $\boxed{HP2}$
je hlavní na $P$ (tzn. $c'(t)$ je hlavní směr $P$ pro každé $t$), právě když

$$(\mathrm{Hl}) \quad \det\begin{pmatrix} (y')^2 & -x'y' & (x')^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} = 0,$$

tzn.

$$\begin{vmatrix} (y')^2 & -x'y' & (x')^2 \\ 1+y^2 & xy & 1+x^2 \\ 0 & A^{-1} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(y')^2(1+x^2) - (x')^2(1+y^2) = 0$$

$$\frac{(y')^2}{1+y^2} = \frac{(x')^2}{(1+x^2)}$$

Pozn: $x' \neq 0$, $y' \neq 0$ na $I$, tudíž $x', y'$ nemění na $I$ znaménko

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y^2}} = \pm \frac{x'}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\operatorname{arcsinh}(y) = \pm \operatorname{arcsinh}(x) + c$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$
Např. pro $c = 0$ je $y = \pm x$, tudíž
$c(t) = (x(t), \pm x(t), \pm (x(t))^2)$, $t \in I$; spec.
$c(t) = (t, \pm t, \pm t^2)$, $t \in \mathbb{R}$ jsou hlavní křivky procházející $(0,0,0) \in P$.

(iv) křivka c jako v (iii) je asymptotická ve $P$ (tj. $\varkappa_n(c'(t)) = 0 \ \forall t \in I$), právě když

(As) $h^{11}(x')^2 + 2h^{12}x'\cdot y' + h^{22}(y')^2 = 0$, tj.

$$\frac{2}{A}x'\cdot y' = 0,$$

tudíž $x' = 0$ nebo $y' = 0$ a asymptotickými křivkami ve $P$ jsou právě přímky

- $x = x_0 = \text{konst.}$, $z = x_0 \cdot y$
- $y = y_0 = \text{konst.}$, $z = x \cdot y_0$

Pozn.: $x'\cdot y' = 0$ ve $I$, právě když $x' = 0$ ve $I$ nebo $y' = 0$ ve $I$

$\boxed{\Leftarrow}$ jasné; $\boxed{\Rightarrow}$ Nechť $t_0 \in I$ a $x'(t_0) \neq 0$. Položme $J := \{t \in I \mid y'(t) = 0\}$. Potom $t_0 \in J$, $J$ je uzavřená v $I$ a otevřená v $I$. Skutečně, nechť $t_1 \in J$. Potom $x'(t_1) \neq 0$ z regularity a ze spojitosti $x' \neq 0$ ve okolí $V$ bodu $t_1$. Potom ale $y' = 0$ ve $V$. Ze souvislosti $J = I$. ▨

# Geodetiky

**DEF.** Regulární křivka $c: I \to S$ na ploše $S$ je <u>geodetika</u>, pokud $c''(t) \in \left(T_{c(t)} S\right)^{\perp}$ $\forall t \in I$.

**Pozn:** Každá geodetika $c$ má konstantní rychlost $\|c'\|$.

Př. 1 "Rovnoměrně probíhané přímky na ploše jsou geodetiky." Nechť $a, b \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$ a $c(t) = at + b$, $t \in \mathbb{R}$. Leží-li část přímky $c$ na ploše $S$, potom to je geodetika na $S$.

⌜Zřejmě $c'' = 0$.⌟

Př. 2 "Rovnoměrně probíhané velké kružnice na sféře jsou geodetiky." Velká kružnice je průnik sféry s rovinou procházející středem sféry. Nechť $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $v, w \in \mathbb{R}^3$ jsou ortonormální, tzn. $\|v\| = 1 = \|w\|$ a $\langle v, w \rangle = 0$. Položme

$$c(t) := \cos(\omega t)\, v + \sin(\omega t)\, w, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Potom $c$ je geodetika na $S^2$.

⌜Zřejmě $\|c\| = 1$. Dále $c'' = -\omega^2 c = -\omega^2 (N \circ c)$ kde $N(X) := X$, $X \in S^2$ je vnější normálové pole na $S^2$.⌟

# Rovnice pro geodetiky

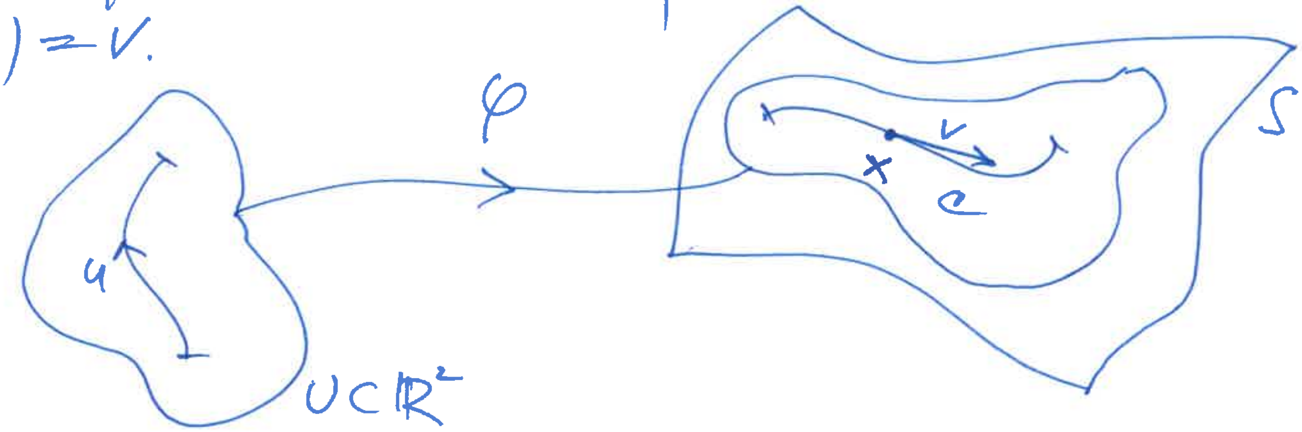


Nechť $\varphi: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je mapa $S$ a $c = \varphi \circ u$, kde $u: I \to U$ je regulární křivka. Potom $c$ je na $S$ geodetika, právě když $u = (u_1, u_2)$ řeší (EG)

$$\frac{d}{dt}\left(g^{k1}u_1' + g^{k2}u_2'\right) = \frac{1}{2}\left(g^{11}_{u_k}(u_1')^2 + 2g^{12}_{u_k}u_1' \cdot u_2' + g^{22}_{u_k}(u_2')^2\right)$$

pro $k = 1, 2$.

**DŮSLEDEK:** Pro každý $x \in S$ a $0 \neq v \in T_xS$ existuje $\varepsilon > 0$ a právě jedna geodetika $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ taková, že $c(0) = x$ a $c'(0) = v$.




**DŮKAZ DŮSL.:** (EG) mají tvar

$$g^{11} \cdot u_1'' + g^{12} \cdot u_2'' = F_1(u, u')$$
$$g^{21} \cdot u_1'' + g^{22} \cdot u_2'' = F_2(u, u'),$$ tm.

$$\underset{\text{regulární}}{g(u)} \cdot u'' = F(u, u')$$

Tudíž $(*)$ $U'' = g(u)^{-1} \cdot F(u,u') =: \tilde{F}(u,u')$.

$\underset{\text{hladké}}{\uparrow}$ hladké

Důsledek plyne z vět o lokální existenci a jednoznačnosti řešení nelineární dif. rovnice $(*)$. $\boxed{}$

GE3

**Př.** Rovina v $\mathbb{R}^3$: Nechť $\varphi(u,v) := (u,v,0)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Potom $\varphi_u = e_1$, $\varphi_v = e_2$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a

(EG) $u'' = 0 = v''$.

Tudíž geodetiky v rovině jsou přímky

$$(\times) \quad \begin{array}{l} u = \alpha t + \beta \\ v = \gamma t + \delta \end{array}, \quad t \in \mathbb{R}, \text{ kde } (\alpha,\gamma) \neq (0,0)$$

**Př.** Válcová plocha $V: x^2 + y^2 = 1$ v $\mathbb{R}^3$

$$\varphi: \begin{array}{l} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = v \end{array}, \quad u \in \underset{\substack{(-\pi,\pi) \\ \text{mapa}}}{\mathbb{R}}, \quad v \in \mathbb{R}$$

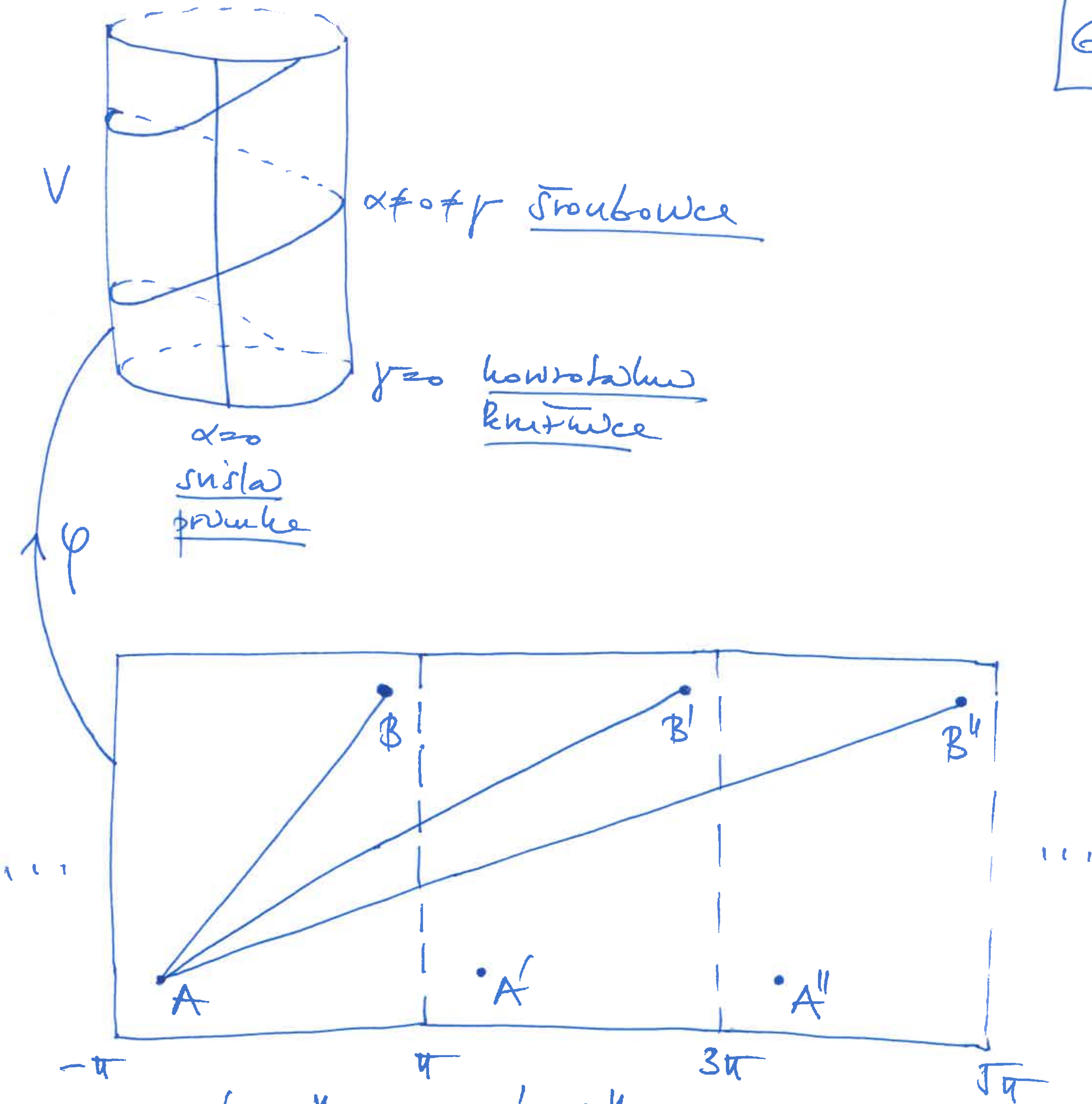
$\varphi_u = (-\sin u, \cos u, 0)$, $\varphi_v = (0,0,1)$

$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ řešení (EG) jsou $(\times)$,

tudíž geodetiky na $V$ jsou křivky

$c(t) = (\cos(\alpha t + \beta), \sin(\alpha t + \beta), \gamma t + \delta)$, $t \in \mathbb{R}$,

kde $(\alpha,\gamma) \neq (0,0)$.

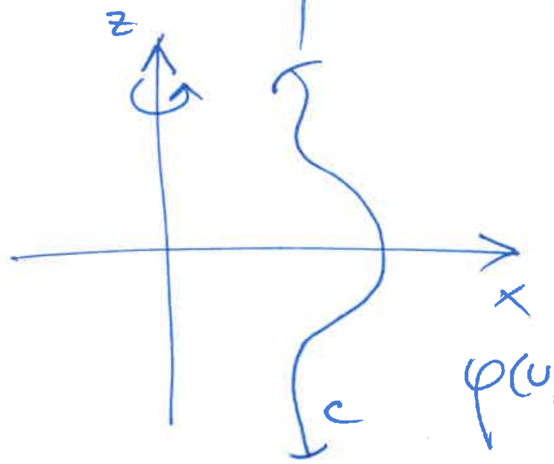



$A \simeq A' \simeq A''$, $B \simeq B' \simeq B''$

ztotožníme

# Geodetiky na rotační ploše

Nechť plocha $S \subset \mathbb{R}^3$ vznikne rotací křivky $c(u) = (p(u), 0, q(u))$, $u \in I$ kolem osy $z$, viz $\boxed{\text{RP 1.}\Gamma}$. Navíc předpokládejme, že $c$ má jednotk. rychlost, tzn. $\|c'\| = 1$.




Pro parametrizaci

$$\varphi(u,v) := (p(u)\cdot\cos v,\ p(u)\cdot\sin v,\ q(u)),$$

$u \in I$, $v \in \mathbb{R}$

máme $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}$, viz $\boxed{\text{RP6}}$. Potom

$g^{22}_u = 2pp'$, tudíž

(EG) $u'' = p \cdot p'(v')^2$, $(p^2 v')' = 0$

Pozn: (i) Druhá rovnice je ekvivalentní tomu, že $v' = \frac{a}{p^2}$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Všechny „poledníky" $S$ jsou geodetiky. Nechť $v_0 \in \mathbb{R}$. Pro $v = v_0$ je (EG) $u'' = 0$, tudíž $d(t) := \varphi(\alpha t + \beta, v_0)$, $\alpha t + \beta \in I$ je geodetika, kde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

RP13

(iii) (Rovnoběžka) $u=u_0$ je geodetika $S$, platí když $p'(u_0)=0$ a $v''=0$ (tzn. $v(t)=\alpha t+\beta$)

(iv) $\boxed{\text{CLAIRAUT}}$ Nechť $d(t)=\varphi(u(t),v(t))$, $t\in I$ je geodetika na $S$. Označme $\alpha(t)$ úhel mezi $d'(t)$ a rovnoběžkou na $S$ procházející bodem $d(t)$. Potom

$p(u(t))\cdot\cos(\alpha(t))$ je konstantní

pro $t\in I$.

---

Skutečně, $\|d'\|=r>0$ a platí

$$\cos\alpha = \frac{\langle d', \varphi_v\rangle}{\|d'\|\cdot\|\varphi_v\|} = \frac{\bar{p}^2\cdot v'}{r\cdot p} = \frac{\bar{p}\cdot v'}{r}$$

protože $d'=\varphi_u\cdot u'+\varphi_v\cdot v'$. Tudíž

$$\frac{d}{dt}(\bar{p}\cdot\cos\alpha) = \frac{(\bar{p}^2\cdot v')'}{r} = 0 \text{ z (EG)},$$

kde $\bar{p}=p\circ u$.