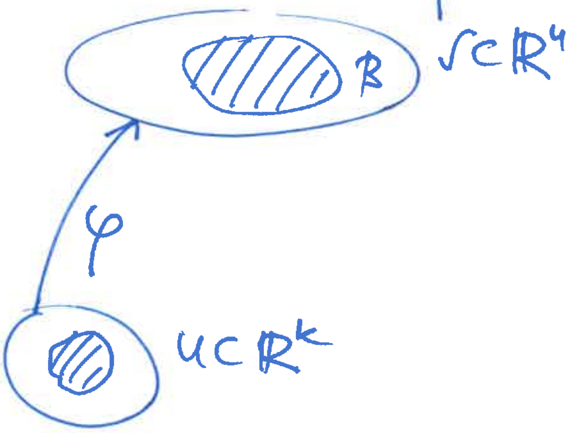
Míra na k-ploše $S \subset \mathbb{R}^n$

M1

(1) Je-li $S = \varphi(U)$ jednoduchá, potom



$$\lambda_S(B) := \int_{\varphi^{-1}(B)} J\varphi \, d\lambda^k, \quad B \subset S \text{ borel.},$$

kde $J\varphi = \sqrt{\det(D\varphi^T D\varphi)}$.

(2) Nechť $\{\varphi_i \mid i = 1, 2, 3, \dots\}$ je spočetný atlas S. Potom máme rozklad $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots$, kde $S_i = \langle \varphi_i \rangle \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \langle \varphi_j \rangle$. Položme

$$\lambda_S := \sum_{i=1}^{\dots} \lambda_{\langle \varphi_i \rangle}\Big|_{S_i},$$

kde $\lambda_{\langle \varphi_i \rangle}\Big|_{S_i}(B) := \lambda_{\langle \varphi_i \rangle}(B \cap S_i)$, $B \subset S$ borel.

Př. Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je k-plocha a $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je afinní transformace. Potom $L(S) \subset \mathbb{R}^n$ je k-plocha.

(i) Je-li L shodnost, potom $\lambda_{L(S)} = \lambda_S L^{-1}$.

(ii) Nechť $r > 0$ a $Lx = rx$, $x \in \mathbb{R}^n$ (stejnolehlost). Potom

$$\lambda_{L(S)} = r^k \lambda_S L^{-1}$$

Skutečně, je-li φ mapa S, potom je $L\circ\varphi$ mapa $L(S)$. Nechť $Lx = Rx + v$, $x \in \mathbb{R}^n$, kde R je regulární matice $n\times n$ a $v \in \mathbb{R}^n$.

(i) Potom $D(L\circ\varphi) = R\,D\varphi$ a $J^2(L\circ\varphi) =$
$= \det(D\varphi^T R^T R\, D\varphi) = J^2\varphi$, je-li $R^T R = I_n$, tj. R je ortogonální.

(ii) Nechť $Rx = rx$, $x \in \mathbb{R}^n$. Potom $R^T R = r^2 I_n$ a
$J(L\circ\varphi) = r^k J\varphi$. $\blacksquare$

———— x ————

Pozn: Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ n-plocha, potom $\lambda_S = \lambda^n|_S$. Skutečně, $S \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená s atlasem $\{Id_S\}$.

Př 7 $\quad I = \int_{S_r} (x^2+y^2+z^2)\,dS$, kde $S_r := \{x^2+y^2+z^2=r^2\}$ sféra, $r>0$

Sférické souřadnice:

$$\varphi: \begin{array}{l} x = \cos u \cdot \cos v \\ y = \sin u \cdot \cos v, \\ z = \sin v \end{array} \quad (u,v) \in (-\pi,\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) =: U$$

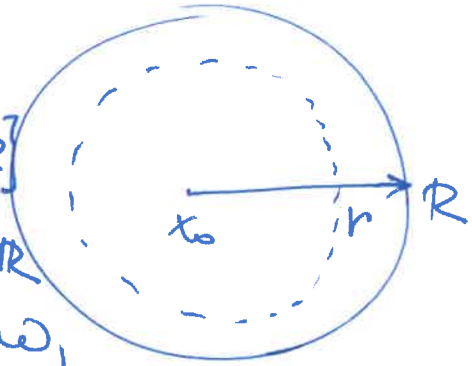
Víme: φ je mapa S^2, $J\varphi = \cos v$, $S^2 \setminus \varphi(U) =$
$\{(x,0,z) \mid x<0,\ x^2+z^2=1\} \cup \{(0,0,\pm 1)\}$
otevřená polokružnice 1-plocha v S^2 — póly 0-plocha

Proto $\lambda_{S^2} = \lambda_{\varphi(U)}$.
Protože $S_r = r \cdot S^2$, platí $\lambda_{S_r}(B) = \int_{\varphi_r^{-1}(B)} r^2 \cos v \, du\,dv$,

kde $\varphi_r = r \cdot \varphi$.
Tudíž $I = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} r^4 \cos v \, du\,dv = 2\pi \cdot r^4 \cdot 2 =$
$= \underline{\underline{4 \cdot \pi \cdot r^4}}$,

speciálně $\lambda_{S_r}(S_r) = \underline{\underline{4\pi r^2}}$.

Sférická Fubiniho věta



Nechť $B(x_0,R) := \{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-x_0\|<R\}$ kde $R\in(0,+\infty]$. Je-li $f : B(x_0,R)\to\mathbb{R}$ borelovská a Lebesg. integrovatelná, potom

$$I := \int_{B(x_0,R)} f(x)\,d\lambda^3(x) = \int_0^R \left(\int_{S(x_0,r)} f(y)\,dS(y)\right) dr,$$

kde $S(x_0,r) := \{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-x_0\| = r\}$.

Důkaz: BÚNO: $x_0 = 0$. Označ $B(R) = B(0,R)$ a $S(r) = S(0,r)$. Pro $\boxed{n=3}$: Uvažme

$$\Phi(r,u,v) := r\cdot\varphi(u,v),\quad (r,u,v)\in\Omega := (0,+\infty)\times(-\pi,\pi)\times\left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right),$$

kde φ jsou sférické souřadnice S^2. Z minulé, že $J_\Phi = |\det(D\Phi)| = r^2\cos v$ a

$$I \underset{\text{Fubini}}{\overset{\text{subst.}}{=}} \int_0^R dr\, \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} du \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dv\; r^2\cos v\cdot f(\Phi(r,u,v))}_{\|}$$

$$= \int_0^R \left(\int_{S(r)} f(y)\,dS(y)\right) dr. \qquad \blacksquare$$

Pozn: Pro obecné n potřebné sférické souřadnice pro S^{n-1}.

Př: Nechť $S = \{x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ je jednodílný hyperboloid v $\mathbb{R}^3$. Spočtěte (vyjádřete) $\lambda_S(\underbrace{S \cap \{|z| \le 1\}}_{B :=})$.

Víme:

$$\varphi: \begin{array}{l} x = \cosh u \cdot \cos v \\ y = \cosh u \cdot \sin v, \quad u \in \mathbb{R} \text{ a } v \in (-\pi, \pi) \\ z = \sinh u \end{array}$$

(i) φ je mapa S, $J\varphi = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| = \cosh u \cdot (\cosh(2u))^{1/2}$,

$S \setminus \varphi(U) = \{x^2 - z^2 = 1, \overset{y=0}{x < 0}\}$
větev hyperboly
v rovině xz,
1-plocha, λ_S-nulová

Proto $\lambda_S = \lambda_{\varphi(U)}$.

(ii) $\lambda_S(B) = 2\pi \int_{u_-}^{u_+} \cosh u \cdot (1 + 2\sinh^2 u)^{1/2} \, du =$ $\begin{array}{l} t = \sinh u \\ dt = \cosh u \, du \end{array}$

$\sinh u_\pm = \pm 1$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 2t^2} \, dt = \ldots = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2} \operatorname{arcsinh}(\sqrt{2})}{2}$$

Pozn: $\operatorname{arcsinh} x := \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$

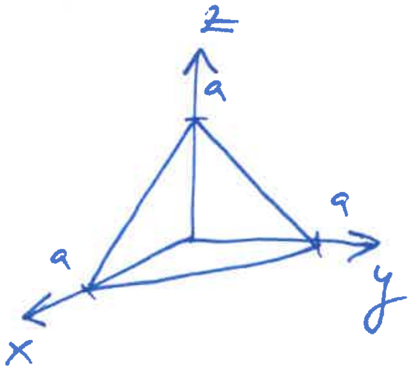
$\operatorname{arccosh} x := (\cosh|_{[0,+\infty)})^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $x \in [1, +\infty)$

Platí $\operatorname{arcsinh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $\operatorname{arccosh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, $x > 1$

Inverzní hyperbolické funkce

Př. Ukažte, že osmistěn $S := \{ |x|+|y|+|z| = a \}$ $(a>0)$ je zobecněná plocha a spočtěte

$$I := \int_S (x^2+y^2+z^2)\, dS$$



Zřejmě (i) $S_{+++} := S \cap \{x>0, y>0, z>0\}$ 1. kvadrant

$2^3 = 8$ $\qquad = \{ t(a,0,0) + r(0,a,0) + s(0,0,a) \mid t,r,s>0,\ t+r+s=1 \}$

ot. trojúhelník v rovině $x+y+z=a$

S_{++-} atd.

(ii) $S_{++0} := S \cap \{x>0, y>0, z=0\}$ ot. hrana

$3 \times 2^2 = 12$ atd.

(iii) $S_{+00} = S \cap \{x>0, y=0=z\} = \{(a,0,0)\}$ vrchol

$3 \times 2 = 6$ atd.

Potom $I = 8 \cdot \int_{S_{+++}} (x^2+y^2+z^2)\, dS$

- Parametrizace roviny $x+y+z=a$:

$$\varphi: \begin{cases} x = ta \\ y = ra \\ z = (1-t-r)a \end{cases}, \quad t,r \in \mathbb{R}; \quad J\varphi = \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial t} \times \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right\| = \sqrt{3}\, a^2$$

$$(a,0,-a) \times (0,a,-a) = (a^2,a^2,a^2)$$

Potom $I = 8 \cdot \sqrt{3}\, a^2 \int_0^1 \left(\int_0^{1-t} t^2a^2 + r^2a^2 + (1-t-r)^2 a^2\, dr \right) dt$

$$= 8\sqrt{3}\, a^4 \int_0^1 t^2(1-t) + \tfrac{1}{3}(1-t)^3 + \tfrac{1}{3}(1-t)^3\, dt = \ldots$$