Plošný integrál 2. druhu

Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je (zobecněná) k-plocha a τ je orientace S. Potom

$$\int_S \omega := \int_S \langle \omega, \tau \rangle \, dS,$$

kde $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$, $S \subset \underset{\text{ot.}}{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ a $\langle \omega, \tau \rangle := \sum_I{}' \omega_I \tau_I$.

Př. Nechť $K := \{x^2+y^2=z^2,\ z \in (0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ a τ je orientace K taková, že souřadnice $\tau_{12} < 0$ na K. Spočti

$$I = \int_K \omega,$$

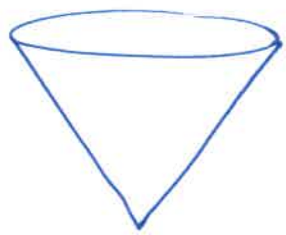
kde $\omega := x^2\,dy\,dz + z^2\,dx\,dy$

$dx \wedge dy$

---

1. Z definice

$$\varphi: \begin{aligned} x &= u \cdot \cos v \\ y &= u \cdot \sin v \\ z &= u \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} &u \in (0,1) \\ &v \in \mathbb{R} \\ &(-\pi,\pi) \text{ mapa} \end{aligned}$$



DŘÍVE: $J\varphi = \sqrt{2}\,u$

$$\tau_\varphi(X) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_{12} + e_{13}\sin v + e_{32}\cos v\right), \text{ tzn.}$$

$\tau = -\tau_\varphi$ a ~~[illegible]~~

Potom $$I = -\int_0^1 du \int_{-\pi}^{\pi} dv\, \sqrt{2}\,u \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(u^2 - u^2 \cos^3 v\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$

2. Pomocí $\varphi^*\omega$:

$$dy = d\varphi_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\,du + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}\,dv$$
$$= \sin v\,du + u\cdot\cos v\,dv$$

$$dz = du$$

$$dx = \cos v\,du + (-1)\,u\cdot\sin v\,dv$$

$$dy\wedge dz = u\cdot\cos v\;dv\wedge du$$
$$dx\wedge dy = du\wedge dv\,(u\cdot\cos^2 v + u\cdot\sin^2 v) = u\cdot du\wedge dv$$
$$\varphi^*\omega = (-u^3\cdot\cos^3 v + u^3)\,du\wedge dv$$

Potom $I = -\int_U \varphi^*\omega$, kde $U := (0,1)\times(-\pi,\pi)$

3. klasicky:

$$*\omega = x^2\,dx + z^2\,dz$$

$\nu(X) := *\tau(X) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos v, \sin v, -1)$, $X = \varphi(u,v)$

jednot. normál. pole na K indukující orientaci τ na K

Je-li $F := (x^2, 0, z^2)$, potom $\langle F,\nu\rangle = \langle *\omega, *\tau\rangle$
$= \langle \omega, \tau\rangle$, a proto

$$I = \int_K \langle F,\nu\rangle\,dS$$

Ploš. int. 2. druhu na nadplochách

Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je $(n-1)$-plocha a $\nu: S \to S^{n-1}$ je spojité normálové pole. Na S uvažujeme orientaci $\tau = \tau_\nu$ indukovanou ν, tzn.

$\tau := * \nu$.

Nechť $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(\Omega)$, kde $S \subset \underset{\text{ot.}}{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, a

$$(\Delta) \quad \omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} F_i \, d\hat{x}_i, \quad \text{kde } F_i \in \mathcal{E}^\infty(\Omega) \text{ a}$$

$$d\hat{x}_i := dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Potom
$$\int_S \omega = \int_S \langle \omega | \tau \rangle \, dS = \int_S \langle F | \nu \rangle \, dS,$$

má-li aspoň jeden integrál smysl a

$$F := (F_1, \dots, F_n) \in \mathcal{E}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

[Skutečně, nechť $\nu = \sum_{i=1}^{n} \nu_i e_i$. Potom $\tau = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \nu_i \hat{e}_i$. Je-li $F^* := F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n$, potom $\omega = * F^*$ a

$$\langle \omega | \tau \rangle = \sum_{i=1}^{n} F_i \nu_i = \langle F | \nu \rangle.$$]

__Pozn:__ Stejně i pro zobecněnou $(n-1)$-plochu $S \subset \mathbb{R}^n$. Jen ν je spojité normálové pole na S_*, množině regulárních bodů S.

Gaussova věta a divergence pro dif. formy

VĚTA: Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je těleso se (skoro) hladkou hranicí. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní a ∂M má konečnou plošnou míru*). Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $M \subset \Omega$ a $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(\Omega)$. Potom

$$\int_{\operatorname{int} M} d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

je-li ∂M orientována vnějším normálovým polem.

Pozn.: *) splněno, je-li ∂M plocha. Totiž ∂M je kompaktní.

Důkaz: Nechť $\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} F_i \, d\hat{x}_i$, kde $d\hat{x}_i := dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n$. Potom $\omega = *F$, kde $F = \sum_{i=1}^n F_i dx_i$.
Nechť $\nu = \sum_{j=1}^n \nu_j e_j$ je vnější jednotk. normál. pole na $\partial_* M$. Potom $\tau := *\nu = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \hat{e}_j \nu_j$ je orientace ∂M. Potom $d\omega = \operatorname{div} F \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ a

$$\int_{\operatorname{int} M} d\omega = \int_{\operatorname{int} M} \operatorname{div} F \, d\lambda^n \underset{\text{Gaussova věta}}{=} \int_{\partial M} \langle F, \nu \rangle \, dS = \int_{\partial M} \omega,$$

protože $\langle F, \nu \rangle = \langle \omega, \tau \rangle$. $\blacksquare$

Př. Nechť $M := \{x_1^2+x_2^2 = 1 = x_3^2+x_4^2\} \subset \mathbb{R}^4$.
Potom M je souvislá 2-plocha a má jedinou orientaci τ takovou, že $\tau_{24}(1,0,1,0) > 0$.
Spočtěte $I = \int_M \omega$, je-li $\omega = dx_3 \wedge dx_4 + x_1 x_3\, dx_2 \wedge dx_4$

$$\varphi: \quad \begin{aligned} x_1 &= \cos u \\ x_2 &= \sin u \\ x_3 &= \cos v \\ x_4 &= \sin v \end{aligned} \qquad u, v \in \mathbb{R} \quad \underset{\text{míra}}{(-\pi,\pi)} \qquad M = S^1 \times S^1$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = -\sin(u)\, e_1 + \cos(u) \cdot e_2$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\sin(v)\, e_3 + \cos(v)\, e_4$$

$$\tau := \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} = e_{13} \sin u \sin v - e_{14} \sin u \cos v + e_{23}(-1) \cdot \sin v \cos u + e_{24} \cos u \cos v$$

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|^2 = \sin^2 u + \cos^2 u = 1, \quad J\varphi = 1$$

Potom $I = \int_{-\pi}^{\pi} du \int_{-\pi}^{\pi} dv \, \cos^2 u \cos^2 v = \underline{\underline{\pi^2}}$,

protože $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 u \, du = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2u}{2} \, du = \pi$.