GAU:

III. Základy diferenc. geometrie ploch v $\mathbb{R}^3$

V této části $S \subset \mathbb{R}^3$ je 2-plocha.

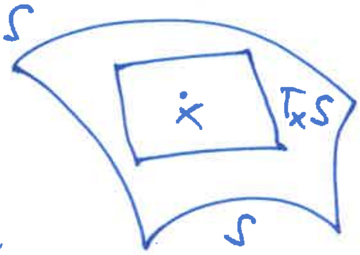
× 1. fundamentální forma S

DEF 1. fundamentální forma plochy S je ⊛ definovaná jako

$$I_x(v,w) := \langle v,w\rangle, \quad x \in S \text{ a } v,w \in T_xS.$$

Zde $\langle \cdot , \cdot \rangle$ je Euklid. skalární součin v $\mathbb{R}^3$.

Pozn: (i) Zřejmě je pro každé $x \in S$

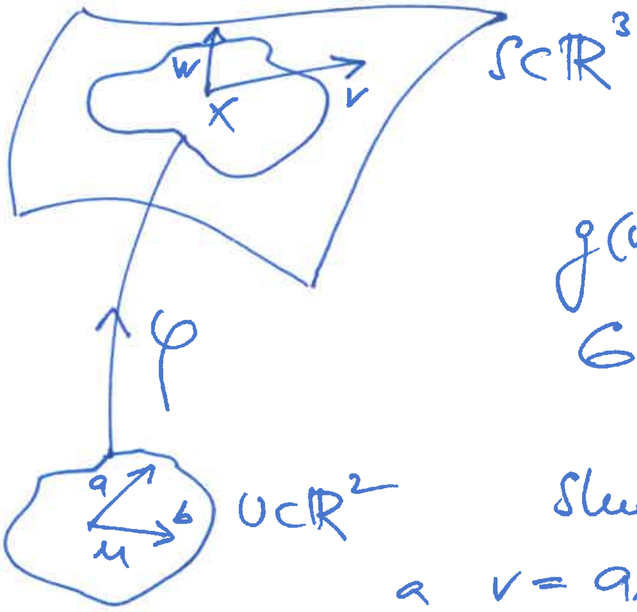


$I_x : T_xS \times T_xS \to \mathbb{R}$ skalární součin na T_xS (tzn. poz. definit. symetric. bilineární forma). Stejně značíme i příslušnou kvadratickou formu, tzn.

$$I_x(v) := I_x(v,v), \quad v \in T_xS.$$

(ii) Nechť $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je mapa S, $x \in \langle \varphi \rangle$ a $x = \varphi(u)$. Potom T_xS má bázi $\varphi_{u_1}(u), \varphi_{u_2}(u)$. Budeme psát zkráceně $\varphi_{u_i} := \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}$, $\varphi_{u_i u_j} := \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}$ apod.

⊛ systém forem I_x, $x \in S$



Potom matice I_x vůči této bázi je

$g(u) := D\varphi(u)^T D\varphi(u)$, tzn.

Gramova matice pro $D\varphi(u)$.

——— x ———

Skutečně, vezměte $v, w \in T_x S$ a $v = a_1 \varphi_{u_1}(u) + a_2 \varphi_{u_2}(u)$,*) $w = b_1 \varphi_{u_1}(u) + b_2 \varphi_{u_2}(u)$

Potom $I_x(v,w) = \sum_{i,j=1}^{2} a_i b_j \underbrace{\langle \varphi_{u_i}(u), \varphi_{u_j}(u) \rangle}_{g^{ij}(u) \dots \text{ složka matice } g(u)}$ (0)

$= a^T g(u)\, b \overset{\text{ozn.}}{=:} g(u)(a,b)$, kde $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $b = (b_1, b_2)$

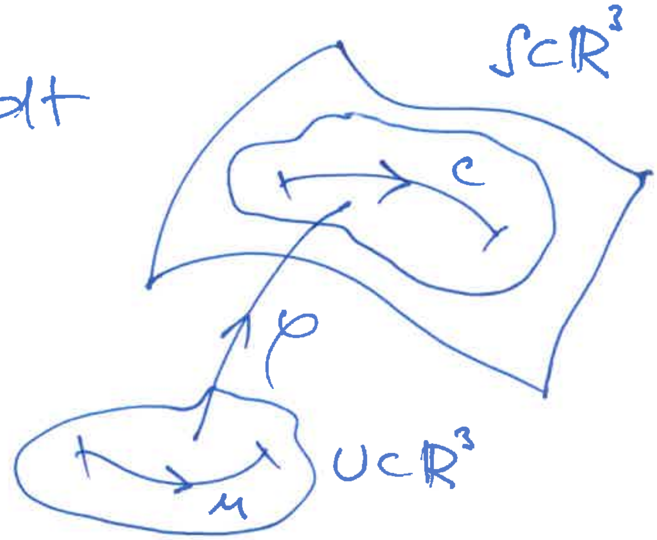
Tedy $g(u)$ je poz. definitní symetrická matice 2×2, resp. skalární součin na $\mathbb{R}^2$; g je tzv. Riemannova metrika na U.

Měření délek a obsahů na S

(i) Nechť $c : [a,b] \to S$ je křivka tř. C^1.

Potom délka c je

$$\ell(c) = \int_a^b \underbrace{\sqrt{I_{c(t)}(c'(t))}}_{= \|c'(t)\|}\, dt$$



——— x ———

*) $v = D\varphi(u)\, a$

GAU3

(ii) Nechť $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ je mapa S.

Je-li $\langle c \rangle \subset \langle \varphi \rangle$, potom $c = \varphi \circ u$ pro nějakou $u : [a,b] \longrightarrow U$ tř. $\mathcal{C}^1$, viz Lemma o podmapách. Potom $c' = \varphi_{u_1} \cdot u_1' + \varphi_{u_2} u_2'$ a

$$\ell(c) \overset{(0)}{=} \int_a^b \|u'(t)\|_{u(t)}\, dt,$$ kde

$$\|a\|_u := \sqrt{g(u)(a,a)},$$ $u \in U$ a $a \in \mathbb{R}^2$, viz Pozn (ii) výše.

Nechť $B \in \mathcal{B}(S)$ a $B \subset \langle \varphi \rangle$. Potom

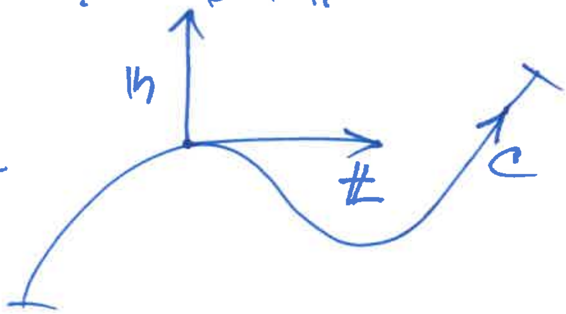
$$A_S(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} \underbrace{\sqrt{\det g(u)}}_{=\, J\varphi(u)}\, d\lambda^2(u).$$

2. Fundamentální formy – křivost S

GAU4

$\boxed{\text{Připomínka}}$ Nechť $c: \underset{\text{interval}}{I} \to \mathbb{R}^3$ je hladká regulární křivka. Nechť je c parametrizována obloukem, tzn. $\|c'\| = 1$ na I (to lze vždy). Potom $\mathbf{t} := c'$ je jednotkový tečný vektor a $\kappa := \|c''\|$ je křivost c. Je-li $\kappa(t) \neq 0$, potom $\mathbf{n}(t) := c''(t)/\|c''(t)\|$ je jednotkový normálový vektor. Neboli

$$c'' = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{velikost a směr} \\ \text{změny } \mathbf{t}}}{\kappa} \cdot \mathbf{n}$$



oskulační rovina: $c(t) + \underset{\text{lineární obal}}{\mathrm{Lo}}\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t)\}$

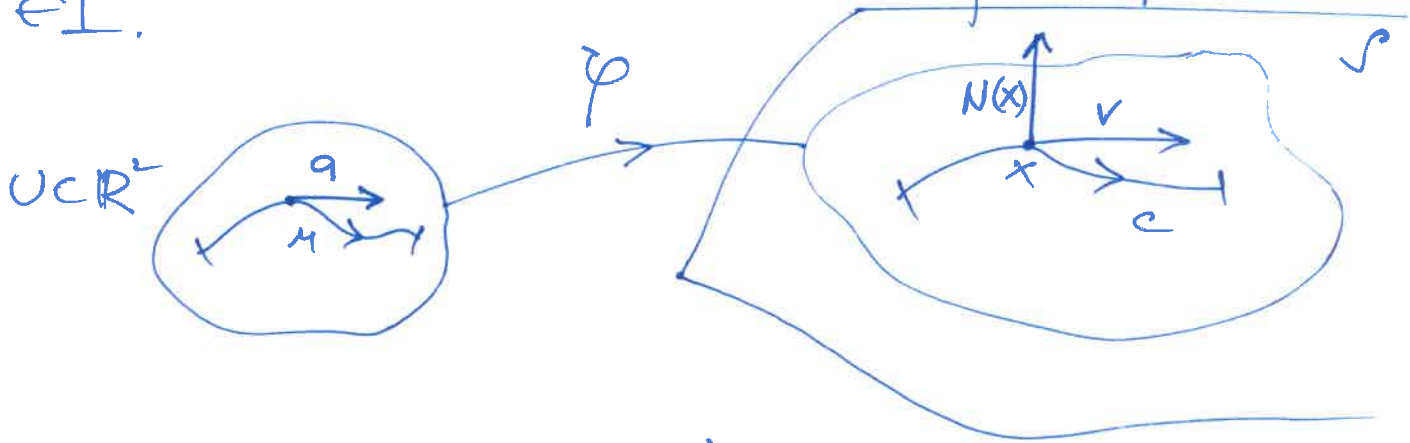
GAUS

Nechť 2-plocha $S \subset \mathbb{R}^3$ je orientovaná spojitým normálovým polem $N : S \to S^2$, tzv. <u>Gaussovo zobrazení</u> na S.

Nechť $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je kladně orientovaná mapa S. Potom

(1) $\bar{N} := N \circ \varphi = \dfrac{\varphi_{u_1} \times \varphi_{u_2}}{\|\varphi_{u_1} \times \varphi_{u_2}\|}$ na U.

Nechť $x \in \langle \varphi \rangle$, $x = \varphi(u)$ a $v \in T_x S$.
Nechť $c : I \to S \subset \mathbb{R}^3$ je hladká regulární křivka, $c(t_0) = x$ a $c'(t_0) = v$ pro nějaké $t_0 \in I$.



Pozn: Křivost křivky c ležící na ploše S je patrně způsobena 1) zakřivením plochy S (tj. změnou # v normálovém směru k ploše S) a 2) zakřivením c vůči S (tzv. změnou # v tečném směru k ploše S)
prostorem

Společně

(2) $\quad II_x(v) := \langle N(x), c''(t_0) \rangle$

<u>BÚNO</u>: $\langle c \rangle \subset \langle \varphi \rangle$. Potom $c = \varphi \circ u$ pro hladkou $u: I \to U$ a

$$c' = \varphi_{u_1} \cdot u_1' + \varphi_{u_2} \cdot u_2',$$

speciálně $v = D\varphi(u)a$ s $a = u'(t_0) \in \mathbb{R}^2$.

Dále $\quad c'' = \varphi_{u_1} \cdot u_1'' + \varphi_{u_2} \cdot u_2'' +$

$$\varphi_{u_1u_1}(u_1')^2 + 2\varphi_{u_1u_2} u_1' \cdot u_2' + \varphi_{u_2u_2}(u_2')^2. \quad (3)$$

Protože $N(x) = \bar{N}(u)$, z (1)–(3) plyne

(4) $$II_x(v) = h^{11}(u)a_1^2 + 2h^{12}(u)a_1a_2 + h^{22}(u)a_2^2$$
$$= a^T h(u) a,$$

kde $a \in \mathbb{R}^2$, $v = D\varphi(u)a \in T_x S$ a

$h(u) := \left(h^{ij}(u)\right)_{ij=1}^{2}$ je symetrická matice

s $h^{ij} := \langle \bar{N}, \varphi_{u_iu_j} \rangle$

<u>Pozn</u>: (i) Zřejmě je II_x kvadratická forma na $T_x S$ a nezávisí na křivce c, viz (4). Navíc II_x nezávisí ani na kladně orientované parametrizaci φ a pro opačnou orientaci dostaneme

GAU 7

$-\mathrm{II}_x$, viz (2).

(ii) Stejné matice i příslušnou symetrickou bilineární formu, tzn. $h(u)(a,b)$ ozn.

$$(5)\quad \mathrm{II}_x(v,w) := a^T h(u)\, b = \sum_{i,j=1}^{2} h^{ij}(u)\, a_i b_j,$$

$a, b \in \mathbb{R}^2$ a $v = D\varphi(u)a$, $w = D\varphi(u)b \in T_x S$.

(iii) Platí rovnost $h^{ij} = -\langle N_{u_i}, \varphi_{u_j}\rangle$, protože $\langle N, \varphi_{u_j}\rangle = 0$ a

$$0 = \frac{\partial}{\partial u_i}\langle N, \varphi_{u_j}\rangle = \langle N_{u_i}, \varphi_{u_j}\rangle + \langle N, \varphi_{u_i u_j}\rangle.$$

DEF. Systém forem II_x, $x \in S$ definovaných v (4) nebo (5) nazýváme 2. fundamentální formu plochy S.