Křivost křivek na ploše

Nechť 2-plocha $S \subset \mathbb{R}^3$ je orientována spojitým normálovým polem $N : S \to S^2$ (tzv. Gaussovo zobrazení). Nechť $c : I \to S$ je regulární křivka na S.

BÚNO: Předpokládejme, že c je parametrizována obloukem, tzn. $\|c'\| = 1$.

Potom $0 = \frac{d}{dt}\langle c', c'\rangle = 2\langle c', c''\rangle$, tudíž c' a c'' jsou kolmé. Proto c'' leží v rovině generované N a $N \times c'$. Pro každé $t \in I$ máme

$$(*) \quad c''(t) = \varkappa_g(t)\cdot N(c(t)) \times c'(t) + \varkappa_n(c'(t))\cdot N(c(t))$$

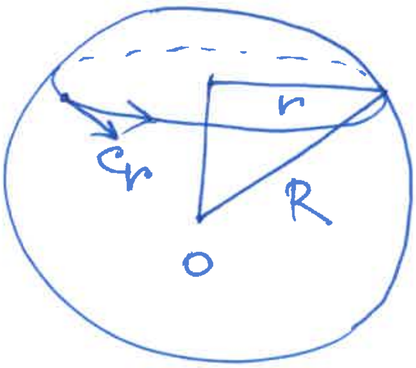
kde $\varkappa_g(t) \in \mathbb{R}$ je tzv. geodetická křivost křivky c na ploše S, zde $\varkappa_n(c'(t)) = \langle N(c(t)), c''(t)\rangle = \mathrm{II}_{c(t)}(c'(t))$ je normálová křivost S v bodě $c(t)$ a ve směru $c'(t)$.

Pozn: Protože $\varkappa = \|c''\|$ je křivost c, Pythagorova věta pro $(*)$ dává

$$(\times) \quad \varkappa^2 = \varkappa_g^2 + (\varkappa_n \circ c')^2$$

GK2

Př. Spočtěte velikost geodetické křivosti kružnice o poloměru r ležící na sféře S^2_R o poloměru R.



Položme

$c_r(t) := \left(r\cdot\cos(t/r),\ r\cdot\sin(t/r),\ \sqrt{R^2-r^2}\right)$, $t\in[0,2\pi r]$.

Potom $\varkappa = \frac{1}{r}$ pro c_r a

$\varkappa_n = \pm\frac{1}{R}$ na $T_X(S^2_R)$, pokud S^2_R je orientována vnitřním/vnějším normálovým polem (viz (Cv.)). Z $(\varkappa)$ dostaneme, že

$$|\varkappa_g| = \left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{R^2}\right)^{1/2},\quad 0<r\le R.$$

- Rovník má $\varkappa_g = 0$.
- Ostatní rovnoběžky $|\varkappa_g|>0$; u pólů $|\varkappa_g| \gg 0$.

—— x ——

V neinflexních bodech (*) dává

(Δ) $\varkappa \cdot \mathbb{n} = \varkappa_g \cdot N \times \mathbb{t} + \varkappa_n(\mathbb{t}) \cdot N$,

kde $\mathbb{t} := c'$ je jednotk. tečný vektor a $\mathbb{n} := c''/\|c''\|$ je jednotk. normálový vektor pro c. Potom z (Δ) máme

(□) $\varkappa_g = \varkappa \cdot \langle N \times \mathbb{t}, \mathbb{n} \rangle = \varkappa \cdot \det(N, \mathbb{t}, \mathbb{n})$
$= \varkappa \cdot \langle N, \mathbb{b} \rangle$,

kde $\mathbb{b} := \mathbb{t} \times \mathbb{n}$ je jednotkový binormálový vektor pro c.

<u>Pozn</u>: Z (□) plyne, že $|\varkappa_g|$ nezávisí na (lokální) parametrizaci c a S a že při změně orientace c nebo S se mění znaménko $\varkappa_g$. V inflexních bodech (kde $\varkappa = 0$) je $\varkappa_g = 0$, viz (*).

<u>VĚTA</u> (o křivosti křivek na ploše)

Nechť 2-plocha $S \subset \mathbb{R}^3$ je orientována spojitým normálovým polem $N: S \to S^2$ a $c: I \to S$ je regulární křivka na S (ne nutně parametrizována obloukem). Nechť $t \in I$. Potom

i) $\varkappa_g(t) = \frac{1}{\|c'(t)\|^3} \det(c'(t), c''(t), N(c(t)))$.

(ii) Platí rovnost $(\times)$,

$$|\varkappa_g(t)| = \varkappa(t)\cdot \sin(\theta(t)) \quad \text{a}$$

$$|\varkappa_n(c'(t))| = \varkappa(t)\cdot \cos(\theta(t)), \quad [\underline{\text{Meusnier}}]$$

kde $\theta(t) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ je úhel mezi normálou $N(c(t))$ k ploše a oskulační rovinou křivky c v $\underbrace{\text{bodě } t}_{\text{neinflexním}}$.

__Pozn:__ V inflexních bodech c jsou všechny hodnoty ve (ii) nulové, proto v tomto smyslu rovnost výše platí.

__DŮKAZ:__ (i) V neinflexních bodech z $(\square)$ je

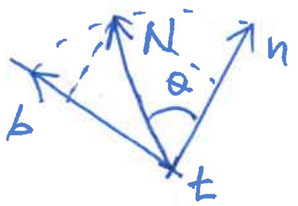
$$\varkappa_g = \varkappa\cdot\langle N, b\rangle, \quad \varkappa = \frac{\|c'\times c''\|}{\|c'\|^3} \quad \text{a}$$

$$b = \frac{c'\times c''}{\|c'\times c''\|},$$

což dává (i).

V inflexních bodech je $\varkappa_g = 0$ a $c'\times c'' = 0$, tzn. c' a c'' jsou lineárně závislé.

(ii) Máme $\varkappa_n\circ c' = \varkappa_n\circ \# = \varkappa\cdot\langle N, n\rangle$, viz $(\triangle)$. Z $(\square)$ je $\varkappa_g = \varkappa\cdot\langle N, b\rangle$. Konečně máme



$$|\langle N, n\rangle| = \cos\theta \quad \text{a}$$

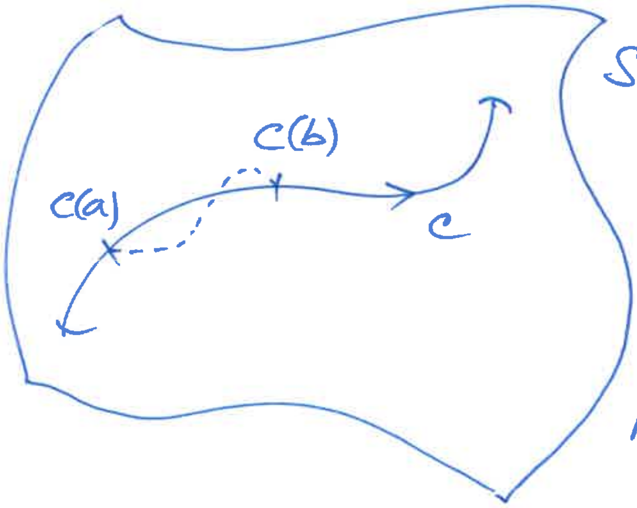
$$|\langle N, b\rangle| = \sin\theta. \qquad \blacksquare$$

<u>VĚTA</u>: Regulární křivka $c: I \to S$ na ploše S je geodetika, právě když c má nulovou κ_g a c má konstantní rychlost $\|c'\|$.

<u>DŮKAZ</u>: $\boxed{\Rightarrow}$ jasné; $\boxed{\Leftarrow}$ Protože má c konstantní rychlost, je $0 = \frac{d}{dt}\langle c', c'\rangle = 2\langle c', c''\rangle$, tudíž c' a c'' jsou kolmé.
Z $\kappa_g = 0$ plyne, že c', c'', N jsou lineárně závislé. Protože $0 \neq c'$ je kolmý na N, je c'' násobek N, tudíž geodetika. ∎

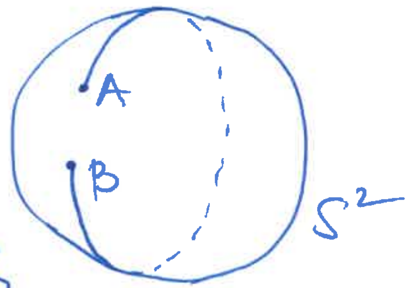
Pozn: Lze ukázat, že křivka c na ploše S je geodetika, právě když c má konstantní rychlost a je lokálně nejkratší spojnicí svých bodů na ploše S.

má nejmenší délku $\ell(c|_{[a,b]}) = \int_a^b \|c'(t)\|\,dt$

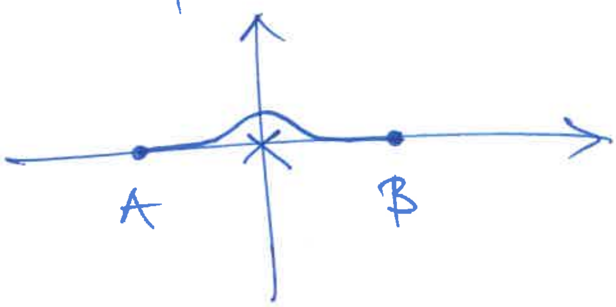


POZOR: (i) Ne každá geodetika spojující dva body je nejkratší spojnicí. Např. delší oblouk velké kružnice na S^2.

(ii) Na ploše může existovat nekonečně mnoho různých nejkratších spojnic dvou bodů. Např. poledníky spojující póly.



(iii) Na souvislé ploše nemusí existovat žádná geodetika spojující dva dané body. Např. $(\pm 1, 0)$ v $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

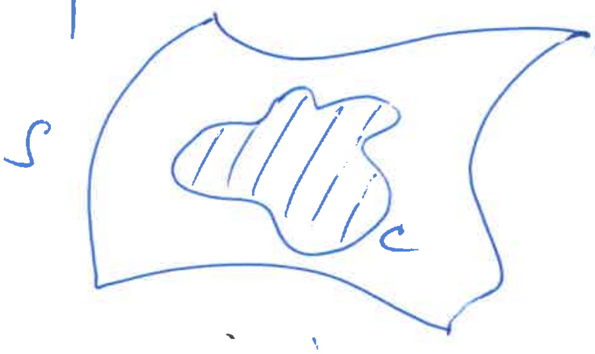


Variační počet: Hledání extrému daného funkcionálu na ∞-dim. prostoru funkcí. Např.

(1.) Hledání křivek c na ploše S s nejmenší délkou $l(c)$ ⇝ geodetiky

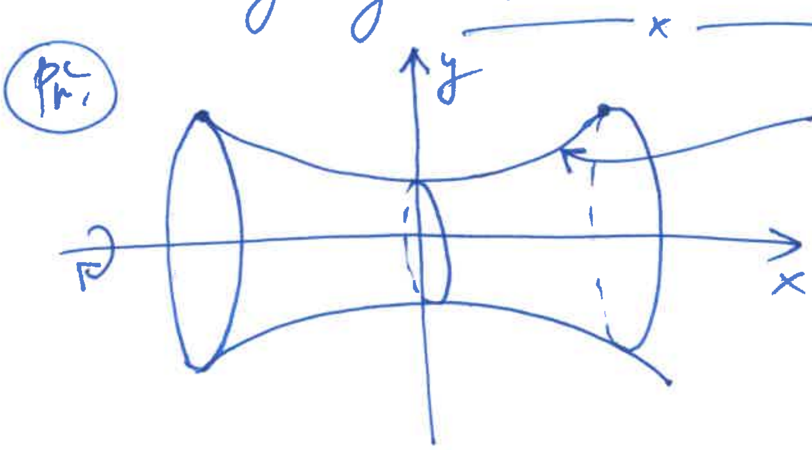
(2.) Hledání ploch v $\mathbb{R}^3$ majících lokálně nejmenší obsah, tzn. minimální plochy ($\Leftrightarrow H \equiv 0$);

Plateauův problém: „Pro danou uzavřenou křivku c v $\mathbb{R}^3$ najděte minimální plochu v $\mathbb{R}^3$, hranicí c.“ Drátěné oko ponořené do mýdlové vody.



(3.) princip nejmenší akce ve fyzice ⇝ Lagrangeova mechanika

Př.:



řetězovka: $y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, kde $a > 0$

katenoid: minimální rotační plocha