Stokesova věta v $\mathbb{R}^n$

Cíl

$$\int_C \underbrace{d\omega}_{k\text{-forma}} = \int_{\partial C} \underbrace{\omega}_{(k-1)\text{-forma}}$$

C … k-dim. plocha v $\mathbb{R}^n$; ∂C … $(k-1)$-dim.

Speciální případy: Greenova věta v $\mathbb{R}^2$, Gauss. věta o divergenci v $\mathbb{R}^n$

<u>Značení</u>: Nechť $E \subset \mathbb{R}^k$ je libovolná. Potom $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ nazveme <u>hladké</u> (<u>tř. $\mathcal{C}^\infty$</u>), pokud ex. otevřená $O \subset \mathbb{R}^k$ a $\phi : O \to \mathbb{R}^n$ tř. $\mathcal{C}^\infty$ tak, že $E \subset O$ a $\varphi = \phi|_E$. Zobrazení ϕ nazveme <u>hladkým</u> <u>rozšířením</u> φ.

<u>DEF.</u> Nechť $I := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^k$ *) je uzavřený interval. Potom <u>k-element</u>. <u>singulární</u> <u>krychlí</u> v $\mathbb{R}^n$ rozumíme hladké zobrazení $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$. Píšeme opět $\langle \varphi \rangle := \varphi(I)$. *) Předp., že $a_j < b_j$.

<u>Pozn</u>: (i) $\langle \varphi \rangle$ je hladká deformace I, může být singulární, např. bod pro konstantní φ

(ii) <u>BÚNO</u>: Budeme předpokládat, že $I = I_k := [0,1]^k$. Jinak učiníme transformaci $L: I_k \xrightarrow{u} I$, $Lu := (a_1 + u_1(b_1 - a_1), \dots, a_k + u_k \cdot (b_k - a_k))$ a parametrizaci $\varphi \circ L$.

<u>DEF.</u> Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$. Nechť φ je k-dim. singul. krychle v Ω, tzn. $\langle \varphi \rangle \subset \Omega$. Položme

k-forma v $O \subset \mathbb{R}^k$

$$(1) \quad \int_\varphi \omega := \int_{I_k} \phi^*(\omega),$$

je-li $\phi: \underset{I_k}{\overset{\cup}{O}} \to \Omega$ hladké rozšíření φ.

<u>Pozn</u>: Integrál (1) je dobře definován a nezávisí na volbě rozšíření ϕ (tj. takové ϕ vždy existuje, jinak vezmeme $\phi|_{O \cap \phi^{-1}(\Omega)}$. Nechť Ψ je jiné takové rozšíření φ, potom

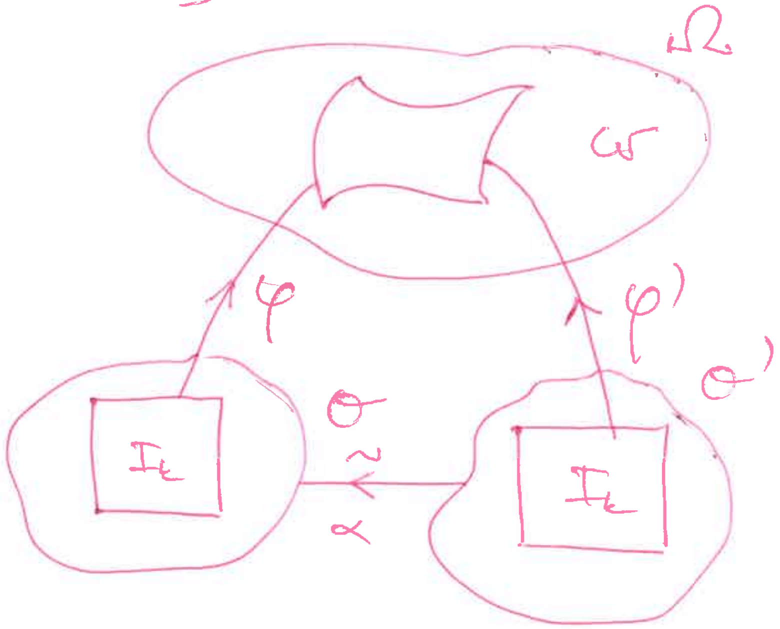
$$\phi = \varphi = \Psi \quad \text{na } \operatorname{int} I_k,$$
$$\phi^*(\omega) = \Psi^*(\omega) \quad \text{---}\|\text{---},$$
$$\text{---}\|\text{---} \quad \text{na } I_k \text{ ze spojitosti } \phi, \Psi$$

kompakt a jejich parc. derivací

<u>Úmluva</u>: Budeme ztotožňovat φ s ϕ.

VĚTA (integrál nezávisí na parametrizaci, jen na její orientaci)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$. Nechť $I_k \subset \Theta, \Theta' \subset \mathbb{R}^k$ jsou otevřené a $\alpha : \Theta' \xrightarrow{\text{na}} \Theta$ je hladký difeomorfismus, $\alpha(I_k) = I_k$. Nechť $\varphi : \Theta \to \Omega$ je hladká a $\varphi' := \varphi \circ \alpha$.



Potom

$$\int_{\varphi'} \omega = \theta \cdot \int_{\varphi} \omega, \qquad (X)$$

kde $\theta := +1$, je-li $\mathrm{Jac}(\alpha) := \det(D\alpha) > 0$ na I_k,
jakobián α

$\quad := -1$, je-li $\mathrm{Jac}(\alpha) < 0$ na I_k.

DŮKAZ: Protože $\mathrm{Jac}(\alpha) \neq 0$ na Θ', $\mathrm{Jac}(\alpha)$ nemění znaménko na I_k (spojitě) (souvislá). Potom

$$\int_{\varphi'} \omega = \int_{I_k} (\varphi \circ \alpha)^* \omega = \int_{I_k} \alpha^*(\varphi^*(\omega)) =$$

$$= \int_{I_k} f(\alpha(v))\, \mathrm{Jac}(\alpha)(v)\, d\lambda^k(v), \qquad (2)$$

kde $\underbrace{\varphi^*(\omega)}_{\text{k-forma v } \Theta \subset \mathbb{R}^k} = \underbrace{f(u)}_{\in\, \mathcal{C}^\infty(\Theta)}\, du_1 \wedge \dots \wedge du_k$.

Dále $\displaystyle\int_\varphi \omega = \int_{I_k} \varphi^*(\omega) = \int_{I_k} f(u)\, d\lambda^k(u) \underset{\substack{\text{o subst.} \\ u=\alpha(v)}}{\overset{\text{Věta}}{=}}$

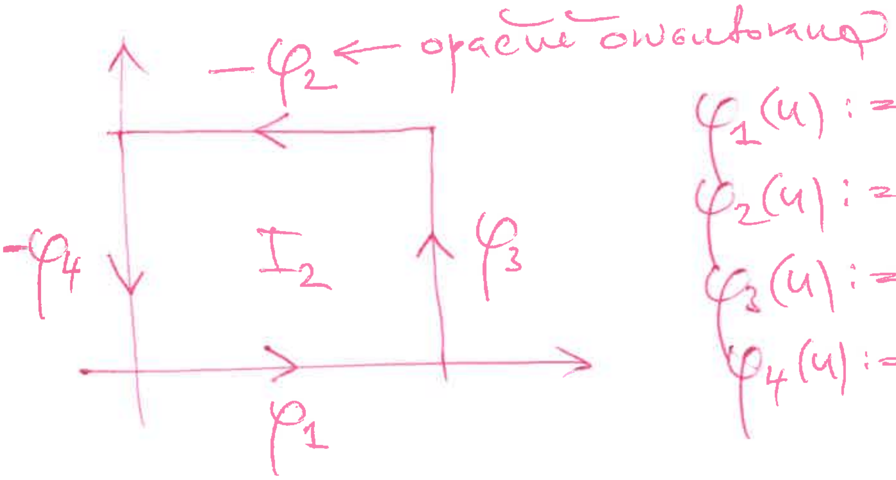
$$= \int_{I_k} f(\alpha(v)) \cdot \underbrace{|\mathrm{Jac}(\alpha)(v)|}_{= \theta \cdot \mathrm{Jac}(\alpha)(v)}\, d\lambda^k(v) \qquad (3).$$

Z (2) a (3) plyne (*). ▨

<u>OTÁZKA</u>: Jak definovat $\partial\varphi$?

<u>Pozn</u>: I_k chápeme jako k-dim. sing. krychli $\varphi := \mathrm{id} : I_k \longrightarrow \mathbb{R}^k$.

Př. ∂I_2 se skládá ze stran čtverce I_2 orientovaných (proti směru hodinových ručiček)



$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(u) &:= (u,0),\ u \in [0,1] \\ \varphi_2(u) &:= (u,1) \\ \varphi_3(u) &:= (1,u) \\ \varphi_4(u) &:= (0,u) \end{aligned}\right.$$

1-dim. sing. krychle

$\partial I_2 = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4$ (formální součet)

STO√

DEF. k-dimenzionální řetězce v $\mathbb{R}^n$

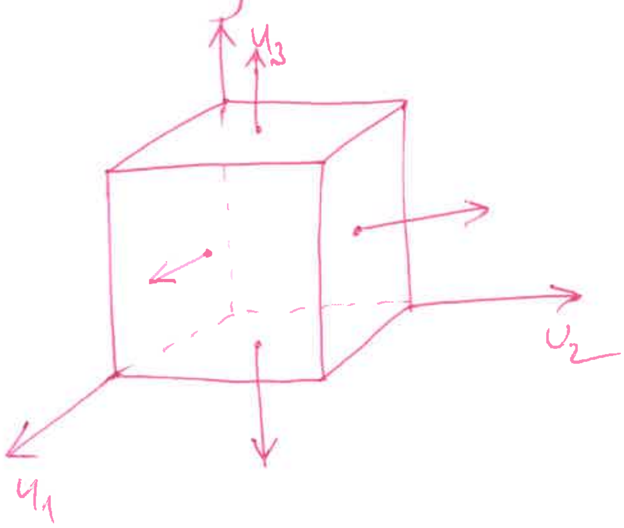
je formální řada tvaru

$$c = \sum_{i \in I} n_i \varphi_i ,$$

kde I je konečná množina, $n_i \in \mathbb{Z}$ a φ_i jsou k-dim. singul. krychle v $\mathbb{R}^n$.

Označme $\langle c \rangle := \bigcup_{i \in I} \langle \varphi_i \rangle$. a $C_k(\Omega)$ je množina všech k-dim. řetězců v otevřené $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, tzn. $\langle c \rangle \subset \Omega$.

Pozn: $C_k(\Omega)$ je volná abelovská grupa generovaná všemi k-dim. sing. krychlemi v Ω, řetězce můžeme sčítat a odčítat



STO 6

DEF (i) Stěny I_k jsou $(k-1)$-dim. sing. krychle

$$I^k_{(j,\alpha)} : I_{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

$$(u_1, \dots, u_{k-1}) \longrightarrow (u_1, \dots, u_{j-1}, \alpha, u_{j}, \dots, u_{k-1}),$$

kde $j = 1, \dots, k$ a $\alpha = 0, 1$. Potom položíme

$$\partial I_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \left(I^k_{(j,0)} - I^k_{(j,1)} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{j+\alpha} I^k_{(j,\alpha)}$$

(ii) Je-li $\varphi : I_k \to \mathbb{R}^n$ k-dim. sing. krychle, definujeme $(k-1)$-dim. řetězec v $\mathbb{R}^n$

$$\partial \varphi := \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{j+\alpha} \varphi \circ I^k_{(j,\alpha)}$$

(iii) Je-li $c = \sum_{i \in I} n_i \varphi_i$ k-dim. řetězec v $\mathbb{R}^n$, definujeme $(k-1)$-dim. řetězec v $\mathbb{R}^n$ jako

$$\partial c := \sum_{i \in I} n_i \, \partial \varphi_i$$

Pozn: ∂I_k je „orientovaná" vnější normálou. Skutečný parametrizace $I^k_{(j,\alpha)}$ indukuje normálový vektor

$$\varphi_1 \times \dots \times \varphi_{j-1} \times \varphi_{j+1} \times \dots \times \varphi_k = (-1)^{j-1} \varphi_j$$

k příslušné stěně I_k. Ale vnější vektor (normálový) je zřejmě $(-1)^{\alpha+1} \varphi_j$.

DEF. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$, $c \in C_k(\Omega)$ a $c = \sum_{i \in I} n_i \varphi_i$. Položme

$$\int_c \omega := \sum_{i \in I} n_i \int_{\varphi_i} \omega .$$

VĚTA (Stokes) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $k = 1, \dots, n$, $\omega \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$ a $c \in C_k(\Omega)$.

Potom
$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega$$

Důkaz: | Stop

(1) Nechť $k=n$ a $C = I_n$. Potom $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(\Omega)$ má tvar $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$, kde
$\omega_i = (-1)^{i+1} f_i \, d\hat{x}_i$, $d\hat{x}_i := dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$ a $f_i \in \mathcal{E}^\infty(\Omega)$. Potom

$$d\omega_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$ a

$$\int_{I_n} d\omega_i = \int_{[0,1]^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \ldots dx_n =$$ FUBINI + Newtonův vzorec pro x_i

$$= \int_{[0,1]^{n-1}} \left(f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)\right)$$
$$dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n =$$
$$= (-1)^{i+1} \left(\int_{I^n_{(i,1)}} \omega_i - \int_{I^n_{(i,0)}} \omega_i \right) = \int_{\partial I_n} \omega_i ,$$

protože $\int_{I^n_{(j,\alpha)}} \omega_i = 0$ pro $j \neq i$.

Tedy máme $\int_{I_n} d\omega = \int_{\partial I_n} \omega$.

Pozn: Dokázali jsme znovu Gaussovu větu o divergenci pro tělesa I_n se skoro hladkou hranicí.

2, Nechť $c = \sum_{i\in I} n_i \varphi_i \in C_k(\Omega)$. Potom

$$\int_c d\omega \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i\in I} n_i \int_{\varphi_i} d\omega \overset{?}{=} \sum_{i\in I} n_i \int_{\partial\varphi_i} \omega \overset{\text{def.}}{=} \int_{\partial c} \omega,$$

protože

$$\int_{\varphi_i} d\omega = \int_{I_k} \varphi_i^*(d\omega) = \int_{I_k} d(\underbrace{\varphi_i^*\omega}_{(k-1)\text{-forma}}) \overset{1,}{=}$$

$$= \int_{\partial I_k} \varphi_i^*(\omega) = \int_{\partial\varphi_i} \omega. \quad \blacksquare$$

Pozn: Nechť S je lib. množina (i nekonečná).

1) Potom volnou Abelovu grupu $\mathbb{Z}(S)$ generovanou S

rozumíme grupu

$$\mathbb{Z}(S) := \{ f : S \to \mathbb{Z} \mid f(s) \neq 0 \text{ pro koneč. } s \in S \}$$

s operací $(f+g)(s) := f(s) + g(s)$, $s \in S$.

Zřejmě každ. $f \in \mathbb{Z}(S)$ lze jednoznačně psát jako

$$f = \sum_{s \in S} n_s z_s,$$

kde $n_s \in \mathbb{Z}$, $n_s \neq 0$ pro koneč. $s \in S$ a $z_s(t) := 1$, $t = s$, $:= 0$, $t \neq s$.

Píšeme často s místo z_s.

---

2) Položme $\mathbb{R}(S) := \{ f : S \to \mathbb{R} \mid f(s) \neq 0 \text{ pro konečné } s \in S \}$.

Potom $\mathbb{R}(S)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ s operacemi

$$\begin{aligned} (f+g)(s) &:= f(s) + g(s) \\ (rf)(s) &:= r f(s) \end{aligned} \quad , \; f, g \in \mathbb{R}(S), \; s \in S \text{ a } r \in \mathbb{R}.$$

Dále $\mathbb{R}(S)$ má bázi $\{ z_s \mid s \in S \}$, kde $z_s(t) := 1$, $t = s$; $:= 0$, $t \neq s$.

Tedy každé $f \in \mathbb{R}(S)$ lze jednoznačně psát jako

$$f = \sum_{s \in S} r_s z_s, \quad \text{kde } r_s = f(s) \in \mathbb{R}.$$

Píšeme často s místo z_s.

Potom $\mathbb{R}(S)$ je vektorový prostor s „bází S“.