

• OBSAH:

- ① Plochy v $\mathbb{R}^n$, točny prostor, miera na ploche, Gaussova veta o flitogenec
- ② Diferenciálne formy, jejich integrace, Stokesova veta v $\mathbb{R}^n$
- ③ Zahledy diferenciálne geometrie ploch v $\mathbb{R}^3$: krivost, geodetiky

Задание:

61,5

- (i) Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое. Пусть про
топическое дифференциальное отображение $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$
в точке $u \in U$ будем понимать матрицу
 $Df(u): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, каждое линейное отображение
 $Df(u)$ отождествляем с якоби (т.е. Jacobian)
матрицей, т.е.

$$Df(u) = \left(\frac{\partial f_i(u)}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, k}}$$

матрица $n \times k$

- (ii) Окрестность точки x в метрическом пространстве X
будем понимать любую открытую
 $U \subset X$ содержащую x .

Plochy v $\mathbb{R}^n$



62

V Geometrii 1 jítu studujeme regulární
parametrisované kurvy $\varphi: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n=3$),
tzn. $\varphi \in \mathcal{C}^2(a,b)$ a $\varphi' \neq 0$ na (a,b) .

DEF, (i) Parametrisovanou k -plochu v $\mathbb{R}^n$
(tzn. $\mathcal{E}^m$, $m \geq 1$) rozumíme zobrazení
 $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ třídy $\mathcal{E}^m$ na otevřené $U \subset \mathbb{R}^k$
takové, že rank $D\varphi(u) = k$, $u \in U$.
hodnost

Úvaha: Upravíme-li třídu hledlostí
 $\mathcal{E}^m$, myslíme $\mathcal{E}_1^m$.

(ii) Parametrisovanou k -plochu $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$
máme k -množinu, jistěže φ je
homeomorfismus U na $\varphi(U)$.

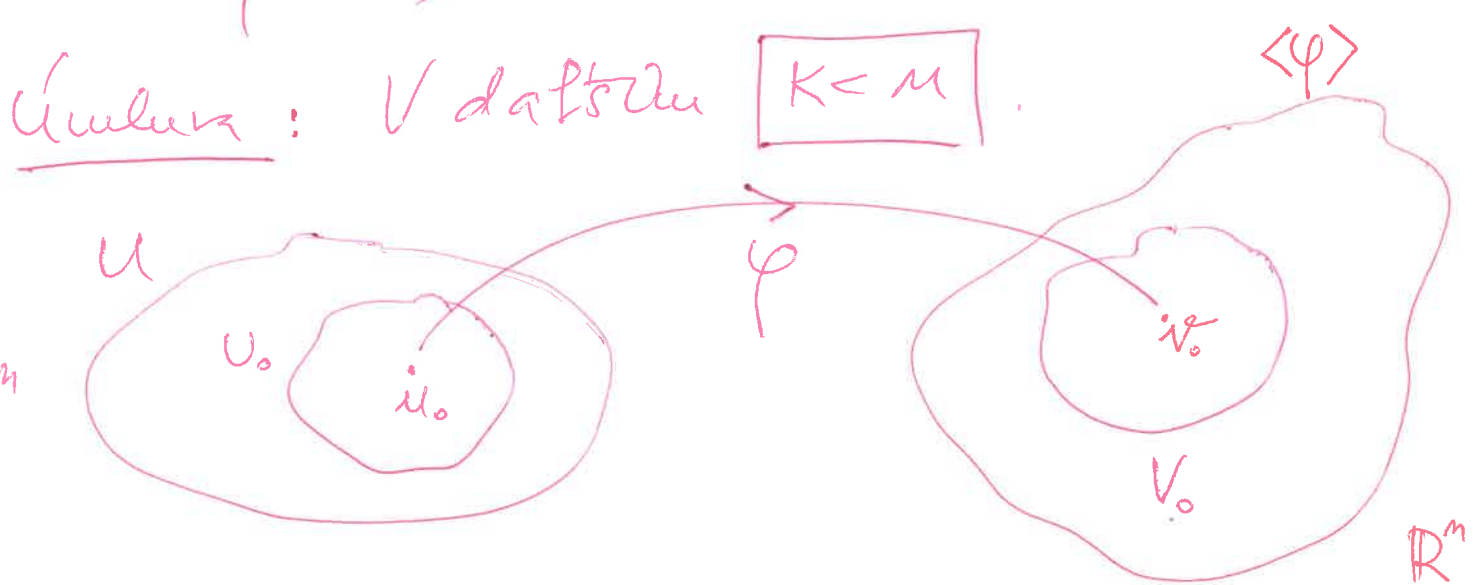
Pom: Obrat $\langle \varphi \rangle := \varphi(U)$ chápeme
jako určitý podprostor Euklidovského
prostoru $\mathbb{R}^n$, stojí i libovolnou $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$.

* Pom: Neboli $D\varphi(u): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ je prostor, spec. $k \leq n$.

$\Phi_{\mathbb{R}^n}$ 1.) $v \in \mathbb{R}^n$: regulárny parametr. krivka = parametr. 1-plocha | 63

2.) Nechť φ je parametr. k -plocha v $\mathbb{R}^n$.
 Potom musí $k \leq n$. Je-li $k = n$, pak
 $\langle \varphi \rangle$ je otvorené podmnožina $\mathbb{R}^n$, jak
 plyne z věty o invertovatelnosti (viz MA):

VĚTA: Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřené,
 $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ je frédy $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, a matice
 $D\varphi(u_0)$ je regulární v $u_0 \in U$. Potom
 ex. okolí $U_0 \subset U$ bodu u_0 takové, že
 $V_0 := \varphi(U_0)$ je otevřené a $\varphi|_{U_0}: U_0 \rightarrow V_0$
 je diffeomorfismus frédy $\mathcal{C}^k$ (tm. $\varphi|_{U_0}$
 je bijekce, $\varphi|_{U_0}$ ~~je~~ a $(\varphi|_{U_0})^{-1}$ je
 frédy $\mathcal{C}^k$).



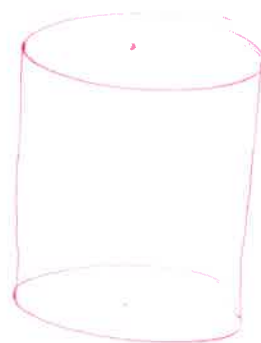
3.) Unitární válcovou plochu

64

$$S := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \},$$

Potom $\varphi(u, v) := (\cos v, \sin v, u)$

na $\mathbb{R}^2$ je parametrizované 2-plochu,
ale není to mapa (protože není
prostě). Ale S je 'pohybo' mapou
 $\varphi|_{\mathbb{R} \times (-\pi, \pi)} \neq \varphi|_{\mathbb{R} \times (0, 2\pi)}$

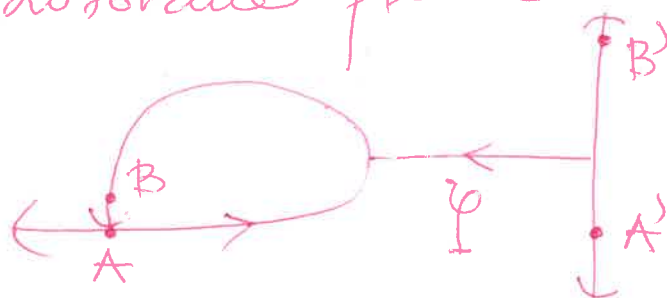


$$\nabla [3, 5]$$

4.) Aniž prostě parametrizované plochy
nemohou být mapou.

x Ale parametrizované
plochy je možné
mapou.

$\mathbb{R}^2$



DEF. Nápřímou $S \subset \mathbb{R}^n$ nazýváme k -plochu

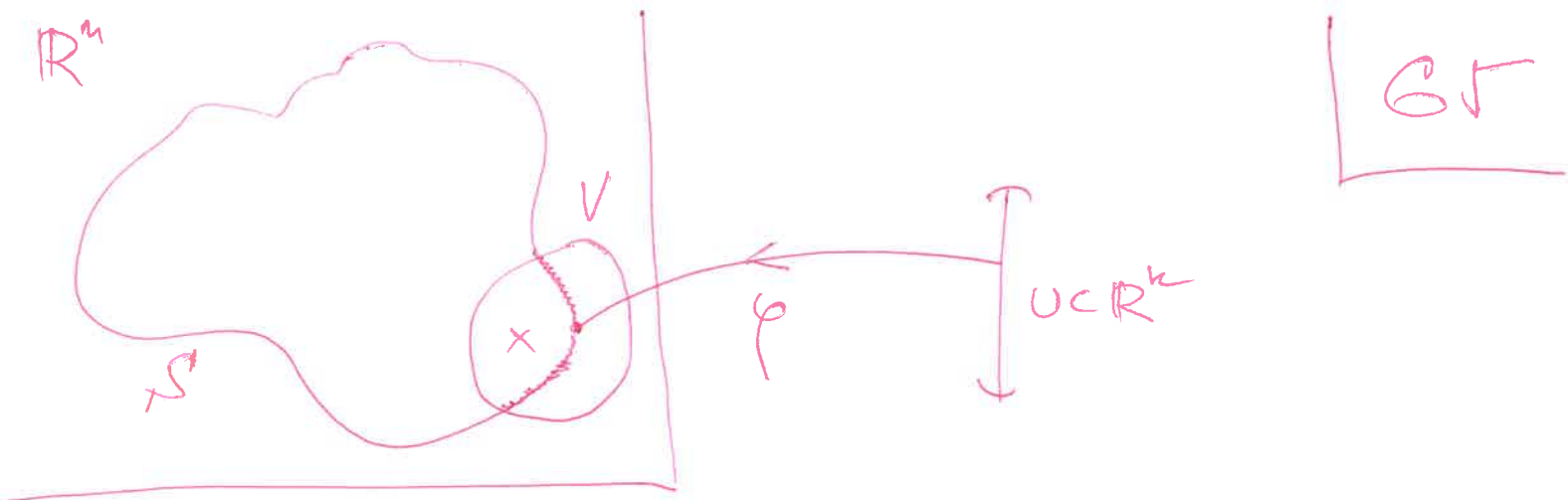
(tridy $\mathcal{C}^m$), jestliže ke každému $x \in S$
existuje $V \subset \mathbb{R}^n$ okolí x a k -mapa $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$
(trí $\mathcal{C}^m$) takový že $\varphi(U) = V \cap S$. Každou
takovou mapu φ nazýváme mapou plochy S .

Speciálně obrát $\langle \varphi \rangle := \varphi(U)$ jmenujeme k -me-
ny φ nazýváme jednodušou k -plochu.

3.5 Názýváme 2-mapu φ takový že

$$\langle \varphi \rangle = S^2 := \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1 \}. \quad [\text{Proc. ?}]$$

Základní kompaktní plochy není jednodušé.



65

DEF. Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k -plocha, pak libovolný
soubor $\mathcal{A}$ map plochy S takový, že

$$S = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} \langle \varphi \rangle,$$

nazýváme atlasem plochy S .

Pom: (i) Každá plocha v $\mathbb{R}^n$ má nejířší
specifický atlas. To plyne z toho, že $\mathbb{R}^n$
a libovolný jeho podprostor je Lindelöfův
(tm. každé jeho otevřené pokrytí má
nejířší specifické podpokrytí). Slibujeme,
 $\mathbb{R}^n$ má specifické bázi otevřených množin,
neprů.

$$\beta := \{ \underset{\substack{\text{ot. koule} \\ \text{v } \mathbb{R}^n}}{B(x, r)} \mid x \in \mathbb{Q}^n, r > 0, r \in \mathbb{Q} \}.$$

(i) Každá kompaktní plocha S v $\mathbb{R}^n$ má konečný
atlas.

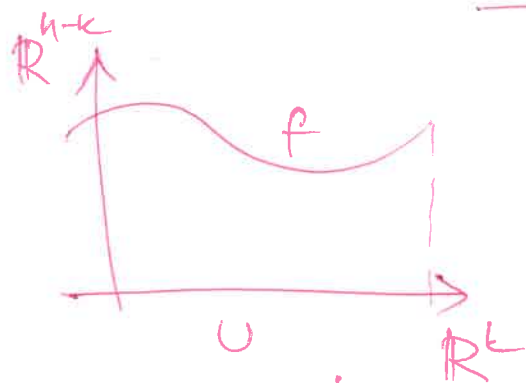
(Pr.) Necht $U \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená a

66

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ je třídy $\mathcal{C}^u$, $u \geq 1$. Potom

je graf $\text{graf}(f) := \{(u, f(u)) \mid u \in U\}$

je jednoduchá k -plocha v $\mathbb{R}^n$ (tr. $\mathcal{C}^u$).



Stejně, $\varphi(u) := (u, f(u))$, $u \in U$, je prostě, třídy $\mathcal{C}^u$ a $\text{rank}(D\varphi) = k$.

Naníc φ^{-1} je rovinná projekce z $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^k$, tudíž φ^{-1} je spojitá a φ je map.

$$D\varphi = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{ccc} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Průpomení: Věta o implicitním zobrazení

67

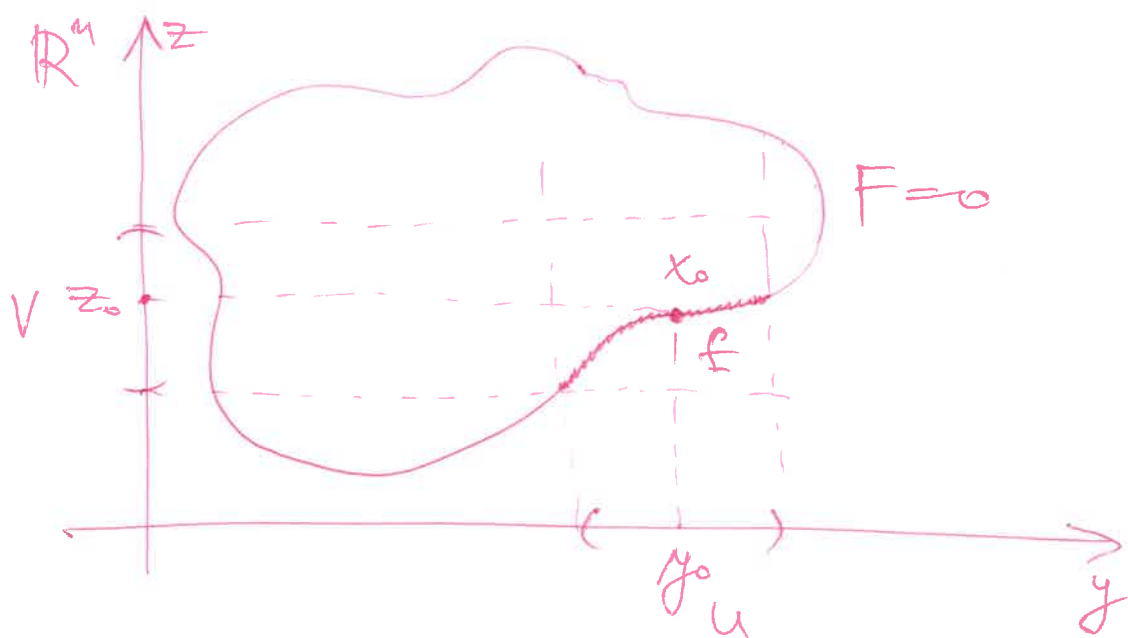
Pro $x \in \mathbb{R}^n$ píšeme $x = (y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$,
pokud $y = (x_1, \dots, x_k)$ a $z = (x_{k+1}, \dots, x_n)$.

VĚTA: Necht' $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřený, $F: G \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$
je třídy C^u ($u \geq 1$), $x_0 \in G$ a $F(x_0) = 0$.
Předpokládáme, že pro $x_0 = (y_0, z_0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$
platí

$$\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial z_j}(y_0, z_0) \right)_{i,j=1}^{n-k} \neq 0.$$

Pak existují okolí $U \subset \mathbb{R}^k$ bodu y_0 a okolí
 $V \subset \mathbb{R}^{n-k}$ bodu z_0 taková, že $U \times V \subset G$
a existuje $f: U \rightarrow V$ třídy C^u taková,
že

$$\text{graf } f = F^{-1}(x_0) \cap (U \times V).$$



VERA (Implicitní sada) ploche) $\mathbb{R}^n$
 Necht' $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $F: G \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$
 je hladký $\mathcal{C}^1$. Necht' platí rank $DF(x) = n-k$
 v každém bodě $x \in F^{-1}(x_0 y)$. Potom je
 $S := F^{-1}(x_0 y)$ k -ploche v $\mathbb{R}^n$ hladký $\mathcal{C}^1$ je-li
 $S \neq \emptyset$.

DŮKAZ: Necht' $x_0 \in F^{-1}(x_0 y)$. Protože
 rank $DF(x_0) = n-k$, existuje regulární
 čtvercová submatice $DF(x_0)$ o $(n-k)$ řádcích
 (a Gaussovy eliminace). BŮHO: Předpoklá-
 dáme, že

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0) \end{pmatrix}_{\substack{i=1, \dots, n-k \\ j=k+1, \dots, n}}$$

je regulární (jinak přirovnání proměnných).
 Píšu opět $x_0 = (y_0, z_0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, potom
 podle věty o implicitních funkcích existuje
 okolí U bodu y_0 , okolí V bodu z_0 a
 $\mathcal{C}^1$ zobrazení $f: U \rightarrow V$ takové, že

$$\text{graf } f = F^{-1}(x_0 y) \cap (U \times V).$$

Víme ale, že graf f je jednoduše
 k -ploche. $\square$

Pr.

1.) Jednotkový sféra v $\mathbb{R}^n$

69

$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ je $(n-1)$ -plocha.

2.) $S := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\| = 1, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$
je 2-plocha v $\mathbb{R}^4$.

Zde $\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, x, y \in \mathbb{R}^n$ a

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

je standardní Eukleidovský skalární součin
(norma) ve $\mathbb{R}^n$.