

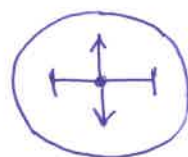
Gaussova věta o divergenci

- jedná se integrační větu v $\mathbb{R}^n$; Gaussova věta v $\mathbb{R}^2$ a G6om 1

DEF. $M \subset \mathbb{R}^n$ je těleso se skoro hladkou hranou, pokud M je omezená, $M = \overline{\text{int} M}$ a ∂M je zobecněná $(n-1)$ -plocha

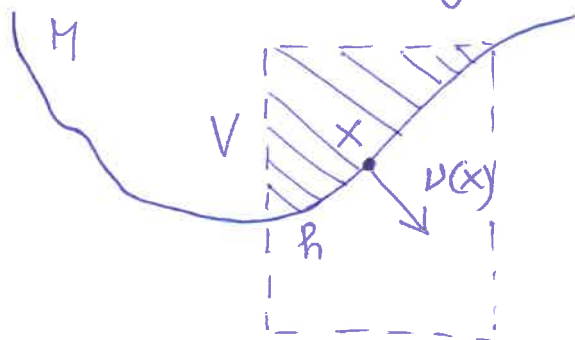
(Pr) $M = [0, 1]^n$ nebo $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$

NE:



Vnější normálový vektor

Označme $\partial_* M$ regulární část ∂M . Necht $x \in \partial_* M$.



Potom existuje jediný vnější jednotkový normálový vektor

$v(x) \in \mathbb{R}^n$. Navíc platí

$v: \partial_* M \rightarrow S^{n-1}$ je spojitá.

* Tedy $v(x) \in S^{n-1}$ je normálový vektor k ∂M v x a směřuje ven z M , tj. $\exists \delta > 0$ takové, že

$$x + t \cdot v(x) \notin M \quad \forall t \in (0, \delta).$$

Skutečně, uvažme okolí $V \subset \mathbb{R}^n$ bodu x takové, že $\partial M \cap V = \text{graf}(h)$ a $M \cap V$ leží v pod/madgrafu h .
Potom

$$(N) \quad v(x) = \pm \frac{(-\nabla h(u), 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla h(u)\|^2}}, \quad x = (u, h(u)),$$

viz cvičení a [ZAJÍČEK: Průřez integrál].

Věta (Gaussova o divergenci)

SV2

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je těleso se skoro hladkou hranicí a ∂M má konečnou porovnatelnou míru, $\mathcal{H}^n$.
 $\lambda_{\partial M}(\partial M) < +\infty$.

① Nechť $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce $\mathcal{C}^1$ $\mathcal{H}^n$. F je funkce $\mathcal{C}^1$ na nějaké otevřené nadmnožině M .
Potom pro každé $i=1, \dots, n$

$$(d_i) \quad \int_M \frac{\partial F}{\partial x_i} d\mathcal{H}^n = \int_{\partial M} F \cdot \nu_i d\mathcal{H}^{n-1}$$

Kde $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ je jednotkový vnější normálový vektor k M v $x \in \partial_* M$.

② Nechť $P: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ je vektorové pole funkce $\mathcal{C}^1$.

Potom

$$(d) \quad \int_M \operatorname{div} P d\mathcal{H}^n = \int_{\partial M} \langle P, \nu \rangle d\mathcal{H}^{n-1}$$

Kde $\operatorname{div} P := \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial x_i}$ je divergence pole P .

Pozn: Všechny integrály zřejmě konvergují, protože M a ∂M jsou kompaktní. Zřejmě $\lambda^n(\partial M) = 0$.

DŮKAZ: ① $\Rightarrow$ ②: Sečteme-li (d_i) pro $F = P_i$, dostaneme (d).

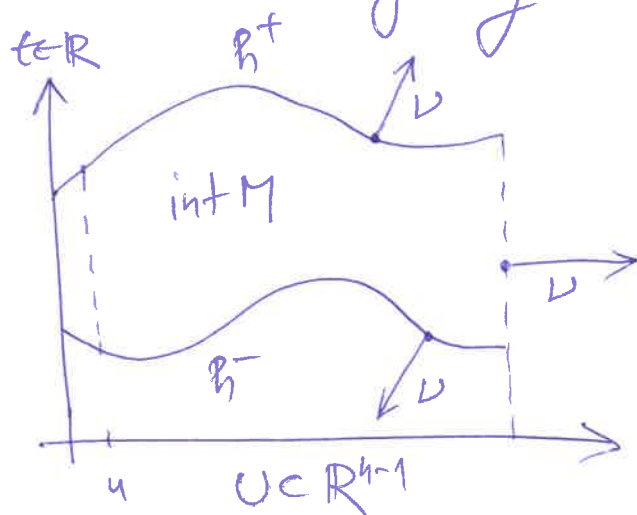
① Vit [ZAJÍČEK] nebo [ČERNÝ, POKORNÝ: Základy MA pro studenty fyziky 3, skript, kap. 17]. $\square$

Pozn: Cauchyova věta je analogie pro
 funkce více proměnných Newtonova věta,
 který říká, že $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$

uvaž pro $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dle $\mathcal{C}^1$.

Ukažeme (1) pro $i = n$ a speciálně M .
 Necht $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ je otevřená množina a $h^\pm$ jsou
 dvě reálné funkce třídy $\mathcal{C}^1$ na U takové, že
 $h^- < h^+$ na U . Předpokládáme, že

$\text{int } M = \{(u, t) \in \mathbb{R}^n \mid u \in U, h^-(u) < t < h^+(u)\}$
 je množina mezi grafy $h^\pm$. *)



Z Newtonova věty pro každé $u \in U$ platí

$$(1) \int_{h^-(u)}^{h^+(u)} \frac{\partial F}{\partial x_n}(u, t) dt = F(u, h^+(u)) - F(u, h^-(u)),$$

tudíž

Pozn: *) Taková M se nazývá n -speciální (tj. ve směru n)

$$(2) \int_U \int_{h^-(u)}^{h^+(u)} \frac{\partial F}{\partial x_n}(u, t) dt du = \int_U F(u, h^+(u)) - F(u, h^-(u)) du \quad \boxed{\text{GV4}}$$

Z Fubiniho vzť je rovnosť (2) rovná

$$(3) \int_{\text{int } M} \frac{\partial F}{\partial x_n} dA^n$$

Z (1) na str. GV1 vieme, že na grafu $h^\pm$ je

$$U_n(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla h^\pm(u)\|^2}}$$

a $J\varphi(u) = \sqrt{1 + \|\nabla h^\pm(u)\|^2}^*$ tudíž pravá strana

(2) je rovná

$$(4) \int_{\text{graf } h^+ \cup \text{graf } h^-} F \cdot U_n dS = \int_{\partial M} F \cdot U_n dS,$$

je-li upeř ∂M zobrazená $(n-2)$ -plocha.

Potom lze ukázat, že $U_n(x) = 0$ v regulárních bodech $x \in \partial M \setminus (\text{graf } h^+ \cup \text{graf } h^-)$.

Pozn: Některé kolečky $M \subset \mathbb{R}^n$ jsou i-speciální pro každé $i=1, \dots, n$, upeř $M = [0,1]^n$. Každé kolečko $M \subset \mathbb{R}^n$ lze v každém smyslu rozložit na speciální množiny. Pro obecné $M \subset \mathbb{R}^n$ je důkaz velmi

* viz cvičení

technicky, postupujeme als podobne, | CV5
tj. "rozloženie" M na spektrálne množiny
spektrálnych množín...