Písemka - NMAG212 Geometrie 2 (vzorová)

Početní část (90 minut)

1. příklad: Ukažte, že

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ |x| + |y| + |z| = 1\}$$

je zobecněná 2-plocha a spočtěte integrál

$$\int_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$$

2. příklad: (i) Ukažte, že

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 = z^2,\ z \in (0, 1)\}$$

je 2-plocha. Dokažte, že K má jedinou orientaci τ takovou, že její souřadnice $\tau_{12} := \langle \tau, e_{12} \rangle < 0$.
(ii) Spočtěte integrál

$$\int_K x^2 dy\, dz + z^2 dx\, dy,$$

kde na K máme orientaci τ.

3. příklad: Uvažujte množinu v $\mathbb{R}^3$

$$M := \{(u \cos v, u \sin v, v) |\ u \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Ukažte, že M je 2-plocha, a zvolte její orientaci.

(b) Spočtěte první a druhou fundamentální formu plochy M.

(c) Najděte hlavní křivosti a hlavní směry v obecném bodě plochy M.

Hodnocení: maximálně 10 bodů za každý příklad, požadované minimum je 15 bodů celkem

Teoretická část (60 minut)

1. příklad: (a) Definujte k-mapu a k-plochu v $\mathbb{R}^n$.

(b) Zformulujte a dokažte větu o implicitně zadané ploše.

2. příklad: Nechť V je reálný vektorový prostor s bází $e_1, \ldots, e_n$. Nechť $1 \leq k \leq n$ a $v_1, \ldots, v_k \in V$. Napište a dokažte, jak vypadají souřadnice k-vektoru $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k$ vůči bázi e_J, $J \subset \{1, \ldots, n\}$, vnější algebry $\bigwedge^*(V)$.

3. příklad: (a) Definujte orientaci k-plochy v $\mathbb{R}^n$. Kolik různých orientací může souvislá plocha mít? Zformulujte a dokažte příslušné tvrzení.

(b) Definujte orientaci jednoduché plochy indukovanou její parametrizací.

Hodnocení: maximálně 10 bodů za každý příklad, požadováno minimálně 15 bodů celkem

Výsledná známka: **1** za 51-60 bodů, **2** za 41-50 bodů, **3** za 30-40 bodů