Cliffordova analýza

Diracův operátor v $\mathbb{R}^{p|q}$:

Obecný vlnový operátor v $\mathbb{R}^{p|q}$ má tvar

$$\Box_{p|q} := -\partial_{x_1}^2 - \dots - \partial_{x_p}^2 + \partial_{x_{p+1}}^2 + \dots + \partial_{x_{p+q}}^2 .$$

Potom $-\Box_{p|q} = D_{p|q}^2$, kde

$$D_{p|q} = e_1 \partial_{x_1} + \dots + e_{p+q} \partial_{x_{p+q}}$$

je Diracův operátor v $\mathbb{R}^{p|q}$. Zde $e_1, \dots, e_{p+q}$ jsou generátory $\mathbb{R}_{p|q}$ splňující

$$e_1^2 = \dots = e_p^2 = 1, \; e_{p+1}^2 = \dots = e_{p+q}^2 = -1 .$$

Speciálně v $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{0|n}$ je $-\Delta = D^2$, kde $\Delta := \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_n}^2$ je Laplaceův operátor a $D := e_1 \partial_{x_1} + \dots + e_n \partial_{x_n}$.

Cliffordova analýza studuje vlastnosti řešení Diracovy rovnice v $\mathbb{R}^n$, tzn. řešení rovnice

(DR) $\qquad Df = 0.$

pro funkce $f : G \to V$ třídy $\mathcal{C}^1$, kde $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a V je reprezentace $\mathrm{Pin}(n)$ (např. $\mathbb{R}_n, \mathbb{C}_n$, základ. spinor. repr. apod.)

<u>DEF.</u> Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, V je reprezentace $Pin(n)$ a $f: G \to V$ je třídy $\mathcal{C}^1$, tzn. $f \in \mathcal{C}^1(G,V)$. Potom se f nazývá <u>monogenní</u>, pokud $Df = 0$ na G.

<u>Pozn:</u> (i) Pro $f: G \to V$ definujeme derivování a integrování po složkách. Nechť $v_1, \dots, v_r$ je báze V. Potom $f = \sum_{k=1}^{r} f_k v_k$, kde $f_k: G \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) jsou složky f, a např.

$$\partial_{x_j} f := \sum_{k=1}^{r} \left(\partial_{x_j} f_k\right) v_k,$$

má-li pravá strana smysl. Zřejmě to nezávisí na volbě báze V.

(ii) $V = \mathbb{R}_n, \mathbb{C}$ a jejich reprezentace, např. spinorové prostory;

fundamentální repr. $Pin(n)$;

pro obecnou repr. $Pin(n)$ je známo velmi málo.

(iii) Pro $V = \mathbb{R}_n$ nebo $\mathbb{C}_n$ má smysl i rovnice

$$fD = 0,$$

kde $fD := \sum_{j=1}^{n} (\partial_{x_j} f) e_j$. Potom $f \in \mathcal{C}^1(G,V)$ nazýváme <u>monogenní</u> <u>zleva</u> (resp. <u>zprava</u>), pokud $Df=0$ (resp. $fD=0$) na G.

Díky nekomutativitě obecně $Df \neq fD$.
Dostáváme dvě analogické (zrcadlové) teorie. Některé funkce jsou monogenní zleva i zprava.

Př. Cauchyho jádro

$$E_n(x)=\frac{1}{\omega_n}\frac{\bar{x}}{|x|^n}, \quad x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$$

je monogenní zleva i zprava. Zde ω_n je plocha jednotkové sféry v $\mathbb{R}^n$.

———×———

Skutečně, $E_n \overset{?}{=} -D\Gamma_n = -\Gamma_n D$, kde Γ_n je fundamentální řešení pro Δ v $\mathbb{R}^n$

$$\Gamma_2(x)=\frac{1}{2\pi}\log|x| \quad \text{a} \quad \Gamma_n(x)=\frac{1}{\omega_n(2-n)}|x|^{2-n} \quad (n>2).$$

Speciálně, $\Delta\Gamma_n=0$ na $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Rovnost (?) plyne z $\partial_{x_j}|x|=\frac{x_j}{|x|}$, $x\neq 0$.

———×———

Navíc E_n je fundamentální řešení pro D v $\mathbb{R}^n$.

Pozn: V KA v $\mathbb{C}$ máme Cauchyho jádro $\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$, $z\in\mathbb{C}$, $z\neq 0$

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ Každá monogenní funkce f na G je (po složkách) harmonická, tzn. $\boxed{\text{CA 14}}$

$$\Delta f = 0 \text{ na } G.$$

<u>DŮKAZ:</u> Brzy ukážeme, že monogenní funkce jsou hladké, tj. $f \in \mathcal{E}^\infty(G, V)$. Potom

$$\Delta f = -D^2 f = 0. \quad \blacksquare$$

<u>Pozn:</u> <u>Diracova rovnice</u> je podobná <u>zobecněné Cauchy–Riemannově rovnici</u>, kterou jsme zavedli na začátku semestru. Skutečně, uvažme (DR) v $\mathbb{R}^{n+1}$, tzn.

$$(e_0 \partial_{x_0} + \cdots + e_n \partial_{x_n}) f = 0.$$

Položme $\varepsilon_j := \overline{e_0} e_j$, $j = 1, \ldots, n$. Potom (DR) v $\mathbb{R}^{n+1}$ je ekvivalentní s rovnicí

$$\text{(ZCR)} \qquad \overline{\partial} f = 0,$$

kde $\overline{\partial} := \partial_{x_0} + \varepsilon_1 \partial_{x_1} + \cdots + \varepsilon_n \partial_{x_n} \; (= \overline{e_0} D)$

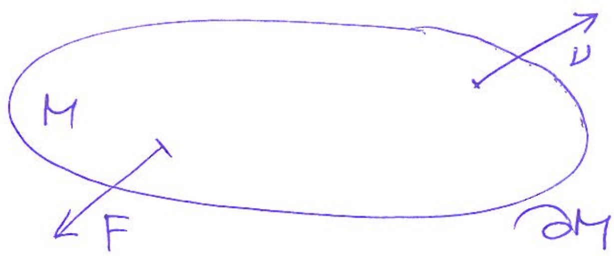
Např. $\Delta = \overline{\partial}\partial = \partial\overline{\partial}$, kde

$$\partial = \partial_{x_0} - \varepsilon_1 \partial_{x_1} - \cdots - \varepsilon_n \partial_{x_n}$$

Integrální vzorce

Gaussova věta o divergenci

VĚTA (GVD) Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $F: G \to \mathbb{R}^n$ je třídy C^1. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s hladkou hranicí ∂M taková, že $\overline{M} \subset G$.



Potom platí

$$\int_M \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{\partial M} \langle F, \nu \rangle \, dS,$$

kde $\operatorname{div} F := \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} F_j$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ je jednotkový vnější normálový vektor k ∂M a dS je plošný element (míra) na ∂M, $\langle F, \nu \rangle := \sum_{j=1}^{n} F_j \nu_j$.

Pozn: (i) Např. $M = B(x_0, r) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < r \}$ je koule o středu $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a poloměru $r > 0$.

(ii) Jde o speciální případ Stokesovy věty:

VĚTA (Stokes) Je-li ω spojitě diferenc. $(n-1)$-forma na G, potom

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

V našem případě je $\nu_j(x)\,dS(x) = (-1)^{j-1}\,d\hat{x}_j$, $\boxed{\text{CAn6}}$

kde $d\hat{x}_j = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_n$,

$\omega(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} F_j(x)\, d\hat{x}_j$ a $d\omega(x) = \cancel{\sum_{j=1}^{n}} \operatorname{div} F(x)\, dx$,

kde $dx = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

<u>VĚTA</u> (GAUSS) Nechť $M \subset G \subset \mathbb{R}^n$ jsou jako v (GVD). Nechť $e_1, \dots, e_n$ jsou generátory $\mathbb{C}_n$. Potom pro $f, g \in C^1(G, \mathbb{C}_n)$ platí

$$\int_{\partial M} f \nu g \, dS = \int_M \left[(fD)g + f(Dg) \right],$$

kde $\nu(x) := \sum_{j=1}^{n} \nu_j(x)\, e_j$ je jednotkový vnější <u>normálový vektor</u> v $x \in \partial M$.

<u>Pozn:</u> Jak je zvykem, budeme psát

$$\int_{\partial M} f\, d\sigma\, g \overset{\text{ozn.}}{:=} \int_{\partial M} \underbrace{f \nu g}\, dS \quad \text{a}$$

násobení v $\mathbb{C}_n$, pořadí faktorů je důležité!

$$d\sigma = \nu\, dS = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} e_j\, d\hat{x}_j.$$

DŮKAZ: Použijeme (GVD) po složkách.

Skutečně máme

$$f v g = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{f q_j g}_{\substack{\| \\ F_j}} \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}}}{v_j} \quad a$$

$$\text{"div } F = \text{"} \sum_{j=1}^{m} \partial_{x_j} F_j = \sum_{j=1}^{m} \left((\partial_{x_j} f) q_j g + f q_j \partial_{x_j} g \right). \quad \blacksquare$$

Pozn: Gaussova věta platí i pro jiné hodnoty.

Např. pro $f: G \to \mathbb{R}_{n}$ ($\mathbb{C}_{n}$) a $g: G \to V$, kde V je $\mathbb{R}_n$ ($\mathbb{C}_n$) - modul.

DŮSLEDEK (Cauchyho věta) Nechť f je navíc monogenní zprava a g je monogenní zleva na G. Potom

$$\int_{\partial M} f \, d\sigma \, g = 0,$$

speciálně

$$\underset{g \equiv 1}{\int_{\partial M} f \, d\sigma} = 0 = \int_{\partial M} d\sigma \, g.$$

CAn8

VĚTA (MORERA) Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, V je $\mathbb{C}_n$ - modul ($\mathbb{R}_n$) a $f \in \mathcal{C}^1(G, V)$.

Potom NTJE:

1. f je monogenní;

2. $\int_{\partial M} d\sigma f = 0$, splňuje-li $M \subset G$ předpoklady (GVD);

3. $\int_{\partial B(x_0,r)} d\sigma f = 0$, je-li $\overline{B(x_0,r)} \subset G$.

DŮKAZ: 1. $\Rightarrow$ 2. : Gaussova věta (viz. Pozn.) dává

(*) $$\int_{\partial M} d\sigma f = \int_M Df .$$ Protože $Df \equiv 0$, dostáváme 2.

2. $\Rightarrow$ 3.; 3. $\Rightarrow$ 1. : Z (*) a 3. máme $\forall x_0 \in G$

$$0 = \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} Df \longrightarrow Df(x_0),$$ protože Df je spojité v x_0.

$|B(x_0,r)|$ … objem koule

▨

VĚTA (BOREL – POMPEIU)

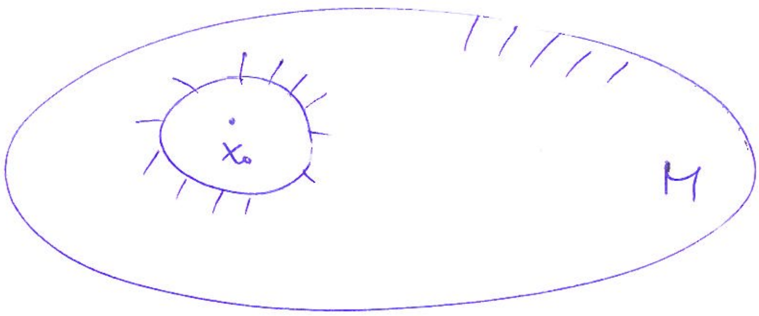
Nechť $M \subset G \subset \mathbb{R}^n$ jsou jako v (GVD). Nechť V je $\mathbb{C}_n$-modul ($\mathbb{R}_n$) a $f \in \mathcal{C}^1(G, V)$.

Potom platí $\forall x_0 \in M$

$$(BP)\quad f(x_0) = \int_{\partial M} E(x-x_0)\, d\sigma(x)\, f(x) - \int_M E(x-x_0)\, D f(x)\, dx,$$

kde $E(x) := \frac{1}{\omega_n} \frac{\overline{x}}{|x|^n}$ je Cauchyho jádro.

DŮKAZ: Nechť $x_0 \in M$. Nechť $\varepsilon > 0$ je takové, že $\overline{B(x_0, \varepsilon)} \subset M$. Položme $M_\varepsilon := M \setminus \overline{B(x_0, \varepsilon)}$.



Z Gaussovy věty dostaneme

$$(1)\quad \int_{\partial M_\varepsilon} E(x-x_0)\, d\sigma(x)\, f(x) = \int_{M_\varepsilon} E(x-x_0)\, D f(x)\, dx, \text{ protože } E(x-x_0) D = 0,\ x \neq x_0.$$

Dále máme, že

$$\int_{\partial M_\varepsilon} E(x-x_0)\, d\sigma(x)\, f(x) = \int_{\partial M} \dots - \int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} \dots \quad \text{a}$$

(2)
$$\int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} E(x-x_0)\, d\sigma(x)\, f(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} \frac{\overline{x-x_0}}{|x-x_0|^n} \cdot \underbrace{\frac{x-x_0}{|x-x_0|}}_{\nu(x)} f(x)\, dS(x) =$$

$$= \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} f(x)\, dS(x) \longrightarrow f(x_0),$$ protože f je spojitá v x_0. $\boxed{\text{CAn10}}$

Pro $\varepsilon \to 0+$ v (1) dostaneme z (2), že

$$\int_{\partial M} E(x-x_0)\, d\sigma(x) f(x) - f(x_0) = \int_M \underbrace{E(x-x_0)}_{\in \mathcal{L}^1(M)} Df(x)\, dx.$$

$\sim \frac{1}{|x-x_0|^{n-1}}$ pro $x \to x_0$

Pozn: (i) Pro $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{M}$ je pravá strana v (BP) rovna 0 (přímo z Gaussovy věty)

(ii) V $\mathbb{C}$ má (BP) tvar

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz - \frac{1}{\pi} \int_M \frac{\overline{\partial} f(z)}{z-z_0}\, d\lambda^2(z),$$

Lebesg. míra v $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$

kde $\overline{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$ a $z = x+iy \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Cauchy-Riemann. operátor

DŮSLEDEK (Cauchyho integrální vzorec) Je-li navíc f na G monogenní, potom

(CV) $$f(x_0) = \int_{\partial M} E(x-x_0)\, d\sigma(x) f(x), \quad x_0 \in M,$$

a f je na G třídy $\mathcal{E}^\infty$, tzn. f je na G hladká.