VĚTA (BOREL – POMPEIU)

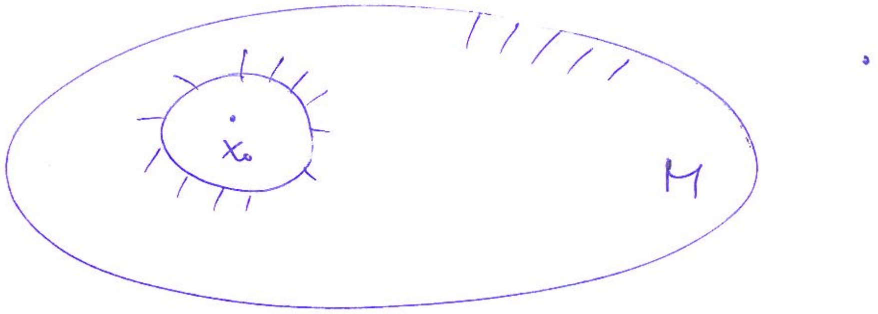
Nechť $M \subset G \subset \mathbb{R}^n$ jsou jako v (GVD). Nechť V je $\mathbb{C}_n$-modul ($\mathbb{R}_n$) a $f \in \mathcal{C}^1(G,V)$.

Potom platí $\forall x_0 \in M$

(BP) $$f(x_0) = \int_{\partial M} E(x-x_0)\, d\sigma(x)\, f(x) - \int_{M} E(x-x_0)\, D f(x)\, dx,$$

kde $E(x) := \frac{1}{\omega_n} \frac{\overline{x}}{|x|^n}$ je <u>Cauchyho jádro</u>.

<u>DŮKAZ:</u> Nechť $x_0 \in M$. Nechť $\varepsilon > 0$ je takové, že $\overline{B(x_0,\varepsilon)} \subset M$. Položme $M_\varepsilon := M \setminus \overline{B(x_0,\varepsilon)}$.



Z Gaussovy věty dostaneme

(1) $$\int_{\partial M_\varepsilon} E(x-x_0)\, d\sigma(x)\, f(x) = \int_{M_\varepsilon} E(x-x_0)\, D f(x)\, dx,$$ protože $E(x-x_0) D = 0$, $x \neq x_0$.

Dále máme, že

$$\int_{\partial M_\varepsilon} E(x-x_0)\, d\sigma(x)\, f(x) = \int_{\partial M} \dots - \int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} \dots$$ a

(2) $$\int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} E(x-x_0)\, d\sigma(x)\, f(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} \frac{\overline{x-x_0}}{|x-x_0|^n} \cdot \underbrace{\frac{x-x_0}{|x-x_0|}}_{\nu(x)} f(x)\, dS(x) =$$

CA 11/10

$$= \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} f(x)\, dS(x) \longrightarrow f(x_0),$$ protože f je spojitá v x_0.

Pro $\varepsilon \to 0+$ v (1) dostaneme z (2), že

$$\int_{\partial M} E(x-x_0)\, d\sigma(x)\, f(x) - f(x_0) = \int_M \underbrace{E(x-x_0)\, D f(x)}_{\in L^1(M)}\, dx .$$

$\sim \frac{1}{|x-x_0|^{n-1}}$ pro $x \to x_0$

■

<u>Pozn:</u> (i) Pro $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{M}$ je pravá strana v (BP) rovna 0 (přímo z Gaussovy věty)

(ii) V $\mathbb{C}$ má (BP) tvar

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz - \frac{1}{\pi} \int_M \frac{\overline{\partial} f(z)}{z-z_0}\, d\lambda^2(z),$$

Lebesg. míra v $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$

kde $\overline{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$ a $z = x+iy \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

<u>Cauchy-Riemann. operátor</u>

<u>DŮSLEDEK</u> (Cauchyho integrální vzorec) Je-li navíc f na G <u>monogenní</u>, potom

(CV) $$f(x_0) = \int_{\partial M} E(x-x_0)\, d\sigma(x)\, f(x), \quad x_0 \in M,$$

a f je na G třídy $\mathcal{C}^\infty$, tzn. f je na G <u>hladká</u>.

DŮKAZ: (CV) plyne zřejmě z (BP). Nechť $\overline{B(x_0,r)} \subset G$. Potom z (CV)

$$(CV_B)\quad f(y) = \int_{\partial B(x_0,r)} E(x-y)\, d\sigma(x)\, f(x), \quad y \in B(x_0,r).$$

Funkce f je na $B(x_0,r)$ hladká, protože integrál vpravo závisí na parametru $y \in B(x_0,r)$ hladce podle vět o derivování integrálu závislého na parametru. ∎

VĚTA (MORERA*) Nechť f je spojitá na G. Potom f je na G monogenní, právě když platí (CV_B) pro každou $\overline{B(x_0,r)} \subset G$.

DŮKAZ: $\boxed{\Rightarrow}$ jasné; $\boxed{\Leftarrow}$ Nechť $\overline{B(x_0,r)} \subset G$. Potom z (CV_B) je f hladká na $B(x_0,r)$ a

$$Df(y) = \int_{\partial B(x_0,r)} \overset{=0}{D_y E(x-y)}\, d\sigma(x)\, f(x) = 0, \quad y \in B(x_0,r).$$

∎

VĚTA (o odstranitelné singularitě)
Je-li f spojitá na G a monogenní na $G \setminus \{x_0\}$, potom je f monogenní na G.

CAn II.5

Invariantní skalární součin na $\mathbb{C}_n$-modulech
$\mathbb{R}_n$

(i) Nechť $V = \mathbb{C}_n$ nebo $\mathbb{R}_n$. Potom skalární součin na V definovaný jako

$$\langle a, b \rangle := [\bar{a} b]_0$$

je *invariantní* v následujícím smyslu

$$\langle av, w \rangle = \langle v, \bar{a} w \rangle, \quad a \in \mathbb{C}_n \ (\mathbb{R}_n), \ v, w \in V$$

(ii) Nechť na $\mathbb{C}_n$-modulech V a W máme invariantní skalární součiny $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ a $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$. Potom na $V \oplus W$ je

$$\langle v_1 + w_1, v_2 + w_2 \rangle := \langle v_1, v_2 \rangle_V + \langle w_1, w_2 \rangle_W, \quad v_i \in V, \ w_i \in W$$

invariantní skalární součin.

(iii) Budeme předpokládat, že na libovolném $\mathbb{C}_n$-modulu ($\mathbb{R}_n$) V máme zadaný *invariantní* skalární součin $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a příslušnou normu

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad v \in V.$$

Na V vždy takový skalár. součin existuje, protože V je direktní součet spinorových prostorů a na spinorových prostorech invariantní skalár. součiny máme.

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ Nechť V je $\mathbb{C}\ell_n$-modul s invariant. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $\|\cdot\|$. Potom

$\boxed{\text{CAn II}}$

① Nechť x je paravektor v $\mathbb{C}\ell_n$, tzn. $x = x_0 + \underline{x}$, kde $x_0 \in \mathbb{R}$ a $\underline{x} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \mathbb{R}^n$ s $x_j \in \mathbb{R}$.

Potom $x\overline{x} = \overline{x}x = |x|^2$ a pro $x \neq 0$ je $x^{-1} = \overline{x}/|x|^2$.

Zde $|x| := \left([\overline{x}x]_0\right)^{1/2}$, $x \in \mathbb{C}\ell_n$ je Cliffordova norma.

② Nechť $x \in \mathbb{C}\ell_n$ splňuje $\overline{x}x = |x|^2$. Pro každé $v \in V$ máme $\|xv\| = |x|\,\|v\|$.

③ Pro každé $x \in \mathbb{C}\ell_n$ a $v \in V$ je

$$\|xv\| \leq 2^{n/2} |x| \cdot \|v\|.$$

Důkaz: ① $x = x_0 + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$\overline{x} = x_0 - x_1 e_1 - \dots - x_n e_n$

$\overline{x}x = x_0^2 + \dots + x_n^2 + e_{12}\underbrace{(-x_1x_2 + x_2x_1)}_{=0} + \dots$

② $\langle xv, xv \rangle = \langle v, \underbrace{\overline{x}x}_{=|x|^2 \in \mathbb{R}} v \rangle = |x|^2 \langle v, v \rangle$

③ $\|xv\| \leq \sum |x_I| \underbrace{\|e_I v\|}_{=\|v\| \text{ (2.)}} \leq \left(\sum |x_I|^2\right)^{1/2} \left(2^n \|v\|^2\right)^{1/2} =$ Schwarz. nerovnost

$x = \sum x_I e_I \in \mathbb{C}\ell_n$, $x_I \in \mathbb{C}$

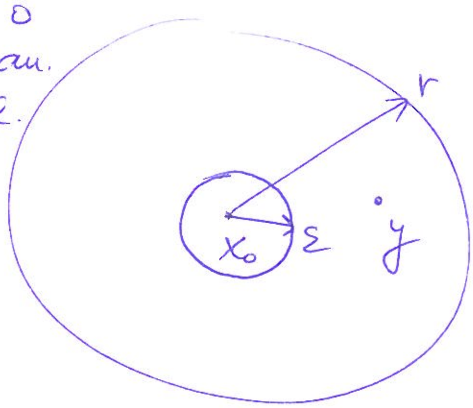
$= |x| \cdot 2^{n/2} \|v\|.$

$\square$

DŮKAZ: Nechť $\overline{B(x_0,r)} \subset G$. Nechť

VĚTY o odstran. singul.

$y \in B(x_0,r) \setminus \{x_0\}$,
zvolme $\varepsilon > 0$, aby $y \notin \overline{B(x_0,\varepsilon)}$.



Potom z (CV) máme

$$f(y) = \int_{\partial B(x_0,r)} E(x-y)\, d\sigma(x)\, f(x) - \underbrace{\int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} E(x-y)\, d\sigma(x)\, f(x)}_{\overset{?}{\longrightarrow}\ 0,\ \varepsilon \to 0+}.$$

Tedy platí (CV_B) pro každé $y \in B(x_0,r)$, $y \neq x_0$.
Ze spojitosti f v x_0 platí (CV_B) i v $y = x_0$.
Tudíž f je monogenní na $B(x_0,r)$. ∎

(?) platí, protože

$$\left\| \int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} E(x-y)\, \nu(x)\, f(x)\, dS(x) \right\| \leq \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \|f(x)\|\, dS(x)$$

$$\leq \varepsilon^{n-1} \underbrace{\max_{\partial B(x_0,\varepsilon)} \|f\|}_{\to\ \|f(x_0)\|} \cdot \underbrace{\operatorname{dist}(y, \partial B(x_0,\varepsilon))^{1-n}}_{\to\ |y-x_0|^{1-n}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0+]{} 0$$

Polynomy

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Označme $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n, V)$ vektorový prostor všech polynomů $P: \mathbb{R}^n \to V$, tzn. (*) $P(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha x^\alpha$, kde

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $a_\alpha \in V$ a $a_\alpha \neq 0$ jen pro konečně mnoho multiindexů $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

(i) Vyjádření (*) polynomu P je jednoznačné, protože $a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha P(0)$. Zde $\alpha! = (\alpha_1!) \cdots (\alpha_n!)$ a $\partial^\alpha P := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} P$.

⌈ Skutečně, máme $\partial^\beta x^\alpha \big|_{x=0} = \alpha!\, \delta_{\alpha\beta}$, kde $\delta_{\alpha\beta} = 1$ pro $\alpha = \beta$ a $\delta_{\alpha\beta} = 0$ pro $\alpha \neq \beta$. ⌋

(ii) Označme $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n, V)$ podprostor všech $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n, V)$, které jsou k-homogenní*), tzn. $\forall x \in \mathbb{R}^n\ \forall t > 0$:

$$P(tx) = t^k P(x)$$

Potom $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n, V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n, V)$ a platí $P \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n, V)$, právě když $a_\alpha = 0$ v (*), je-li $|\alpha| \overset{\text{def.}}{:=} \alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq k$.

⌈ Zřejmě $\mathcal{P} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_k$. Stačí dokázat, že tento součet je direktní.

*) homogenní stupně k

Nechť $k_1 > \dots > k_r \geq 0$, $P_{k_j} \in \mathcal{P}_{k_j}(\mathbb{R}^n, V)$ a Pol 2

$$P_{k_1} + \dots + P_{k_r} = 0.$$

Nechť $x \in \mathbb{R}^n$ a $t > 0$. Potom v bodě tx máme

$$t^{k_1} P_{k_1}(x) + \dots + t^{k_r} P_{k_r}(x) = 0,$$

$$t^{k_1 - k_r} P_{k_1}(x) + \dots + t^{k_{r-1} - k_r} P_{k_{r-1}}(x) + P_{k_r}(x) = 0,$$

pro $t \to 0+$ je $P_{k_r}(x) = 0$. Tedy $P_{k_r} = 0$ a stejně i

$P_{k_{r-1}} = 0 = \dots = P_{k_1}$. ▨

(iii) Zřejmě $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n, V) = \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n) \otimes V$, kde

$\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n) := \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$. Nechť $v_1, \dots, v_r$ je báze V.

Potom x^α, $|\alpha| = k$, je báze $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$ a

$x^\alpha v_j$, $|\alpha| = k$ a $j = 1, \dots, r$, je báze $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n, V)$.

Cv.

$\boxed{\text{LEMMA}}$ Pro $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ označme

$$E_\alpha := (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha E,$$

kde $E(x) := \frac{1}{\omega_n} \frac{\overline{x}}{|x|^n}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ je Cauchyho jádro. Potom existuje homogenní polynom $q_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stupně $|\alpha|+1$ takový, že

$$(\circ) \qquad E_\alpha(x) = \frac{q_\alpha(x)}{|x|^{n+2|\alpha|}}, \quad x \neq 0.$$

Speciálně existuje $C_{n,\alpha} \in (0,+\infty)$ takové, že

$$(E_\alpha) \qquad |E_\alpha(x)| \leq \frac{C_{n,\alpha}}{|x|^{n+|\alpha|-1}} \quad x \neq 0.$$

DŮKAZ: $(\circ)$ dokážeme indukcí podle $|\alpha|$. Zřejmě to platí pro $|\alpha|=0$. Předpokládejme, že platí $(\circ)$ pro $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Pro $j=1,\dots,n$ máme

$$\partial_j E_\alpha(x) = \frac{\partial_j q_\alpha(x)}{|x|^{n+2|\alpha|}} - (n+2|\alpha|)\frac{x_j}{|x|^{n+2|\alpha|+2}} q_\alpha(x)$$

$$= \frac{|x|^2 \partial_j q_\alpha(x) - (n+2|\alpha|) x_j q_\alpha(x)}{|x|^{n+2|\alpha|+2}},$$

což dokazuje indukční krok.

Odtud (E_α) plyne snadno z $(\circ)$, protože pro $x \neq 0$ je

$$q_\alpha(x) = |x|^{|\alpha|+1} q_\alpha\left(\frac{x}{|x|}\right) \text{ a}$$

$$|q_\alpha(x)| \leq \max_{y \in S^{n-1}} |q_\alpha(y)| \cdot |x|^{|\alpha|+1}.$$

S^{n-1} jednotková sféra v $\mathbb{R}^n$

∎

CAn13

VĚTA (Cauchyho odhady)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, V je $\mathbb{C}_n$-modul ($\mathbb{R}_n$) a $f: G \to V$ je monogenní. Nechť $\overline{B(x_0,r)} \subset G$. Potom platí

(Co1) $\displaystyle \|\partial^\alpha f(x_0)\| \leq \frac{\omega_n C_{n,\alpha}}{r^{|\alpha|}} \max_{\partial B(x_0,r)} \|f\|$, je-li $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ a

$C_{n,\alpha}$ jsou konstanty jako v odhadech (E_α);

(Co2) $\displaystyle \|\partial^\alpha f(y)\| \leq \frac{\omega_n C_{n,\alpha} \cdot 2^{n+|\alpha|-1}}{r^{|\alpha|}} \max_{\partial B(x_0,r)} \|f\|$, je-li $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ a $|y - x_0| \leq \frac{r}{2}$.

DŮKAZ: Použijeme-li ∂^α na (CI_B), dostaneme

$$\partial^\alpha f(y) = \int_{\partial B(x_0,r)} E_\alpha(x-y)\, d\sigma(x)\, f(x), \quad y \in B(x_0,r).$$

Speciálně,
$$\|\partial^\alpha f(y)\| \leq \int_{\partial B(x_0,r)} |E_\alpha(y-x)|\, \|f(x)\|\, dS(x).$$

Z (E_α) máme $\displaystyle |E_\alpha(y-x)| \leq \frac{C_{n,\alpha}}{|y-x|^{n+|\alpha|-1}}$, $y \neq x$.

Pro $y = x_0$ je $\displaystyle |E_\alpha(x-x_0)| \leq \frac{C_{n,\alpha}}{r^{n+|\alpha|-1}}$. Je-li $|y - x_0| \leq \frac{r}{2}$ a $x \in \partial B(x_0,r)$,

potom $\displaystyle |E_\alpha(x-y)| \leq \frac{C_{n,\alpha}\, 2^{n+|\alpha|-1}}{r^{n+|\alpha|-1}}$, protože $|y-x| \geq \frac{r}{2}$.

$\blacksquare$