CAn17

VĚTA (LIOUVILLE)

Nechť V je $\mathbb{R}_n$-modul a $f: \mathbb{R}^n \to V$ je omezená monogenní funkce. Potom je f konstantní.

DŮKAZ: Existuje $M \in [0, +\infty)$ taková, že $\|f\| \le M$ na $\mathbb{R}^n$. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a $j = 1, \dots, n$. Potom $\forall r > 0$ platí z (Co 1), že

$$\|\partial_{x_j} f(x_0)\| \le \frac{\omega_n C_{n,j}}{r} M \longrightarrow 0 \text{ pro } r \to +\infty,$$

tudíž $\partial_{x_j} f(x_0) = 0$. ▨

VĚTA (Weierstrass) Nechť $f_k \in \mathcal{E}^1(G, V)$ jsou monogenní funkce a $f_k \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na G. Potom f je monogenní na G a $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$:

$$\partial^\alpha f_k \overset{loc}{\rightrightarrows} \partial^\alpha f \text{ na } G.$$

DŮKAZ: (i) Zřejmě je f spojitá na G. Nechť $\overline{B(x_0, r)} \subset G$. Potom $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall y \in B(x_0, r)$:

$$f_k(y) = \int_{\partial B(x_0,r)} E(x-y)\, d\sigma(x)\, f_k(x)$$

$$\downarrow k \to +\infty \qquad \downarrow$$

$$(CV_B) \quad f(y) = \int_{\partial B(x_0,r)} E(x-y)\, d\sigma(x)\, f(x).$$

Z VĚTY MORERA* dostaneme, že f je monogenní. CA4 15

(ii) Nechť $\overline{B(x_0,r)} \subset G$. Z (Co2) dostaneme

$$\|\partial^\alpha f_k(y) - \partial^\alpha f(y)\| \leq \frac{\omega_n \cdot C_{n,\alpha} \cdot 2^{n+|\alpha|-1}}{r^{|\alpha|}} \max_{\partial B(x_0,r)} \|\underbrace{f_k - f}_{\text{monogenní}}\| \xrightarrow{k\to+\infty} 0,$$

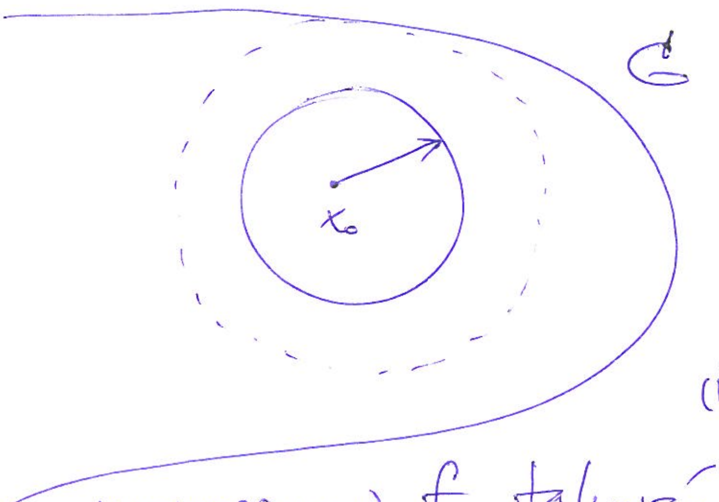
je-li $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ a $|y - x_0| \leq \frac{r}{2}$. ▨

Taylorovy rozvoje

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, V je $\mathbb{C}_n$-modul a $f: G \to V$ je monogenní. Je známo, že dokonce každá harmonická funkce je reálně analytická, a proto je taková i f, tzn. $\forall x_0 \in G \ \exists r(x_0) > 0$ takové, že

$$(\Delta) \quad f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} (x-x_0)^\alpha a_\alpha \text{ na } B(x_0, r(x_0)) \subset G,$$

kde $a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0)$ a řada vpravo konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $B(x_0, r(x_0))$.



Nepříjemné vlastnosti (Δ)

(i) $(x-x_0)^\alpha$ nejsou monogenní až na triviální případy

(ii) Na $G = B(x_0, r)$ existují monogenní f takové, že mají maximální $r(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} r$.

Označení: (i) $B(r) := B(0, r)$

(ii) Označme $M_k = M_k(\mathbb{R}^n, V)$ prostor všech k-homogenních monogenních polynomů $P: \mathbb{R}^n \to V$ pro $k \in \mathbb{N}_0$; $P \in M_k$ nazýváme sférickou monogenikou stupně k.

VĚTA (Taylorův rozvoj monogenní funkce)

Funkce $f: B(r) \to V$ je monogenní, právě když

(TR) $$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k,$$

kde $f_k \in M_k(\mathbb{R}^n, V)$ a řada v (TR) konverguje lokálně stejnoměrně na $B(r)$.

DŮKAZ: $\boxed{\Leftarrow}$ Plyne z Weierstrassovy věty.

$\boxed{\Rightarrow}$ Jednoznačnost (TR): Platí-li (TR), potom

$$f_k(x) = \sum_{|\alpha|=k} x^\alpha a_\alpha,$$

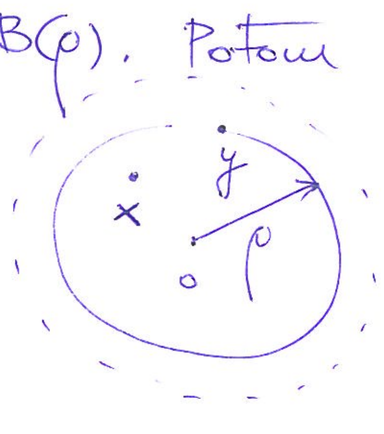
kde $a_\alpha = \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(0)$. Skutečně, z Weierstrassovy věty

$$\partial^\beta f(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \partial^\beta f_k(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \underbrace{\partial^\beta x^\alpha \Big|_{x=0}}_{= \beta!\, \delta_{\alpha\beta}} a_\alpha = (\beta!)\, a_\beta.$$

Existence (TR): Nechť $\rho \in (0, r)$ a $x \in B(\rho)$. Potom

(CV) $$f(x) = \int_{\partial B(\rho)} E(y-x)\, d\sigma(y)\, f(y).$$

Rozvineme!



Rozvoj Cauchyho jádra $E(y-x)$ pomocou tzv. Gegenbauerových polynómů (viz např. [DELANGHE, SOUČEK, SOMMEN, str. 178 − 192]) nebudeme dělat pro nedostatok času. ▨

$\boxed{\text{PROBLÉM}}$ Najdi co nejlepší báze prostoru M_k

Cauchyho - Kovalevské (CK-) rozšíření

Nechť $P_k \in M_k(\mathbb{R}^n, V) \overset{\text{ozn.}}{=:} M_k$. Potom

(1) $$P_k(x) = \sum_{j=0}^{k} p_{k-j}(\underline{x}) \frac{x_n^j}{j!},$$

kde $\underline{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ a $p_{k-j} \in \mathcal{P}_{k-j}(\mathbb{R}^{n-1}, V) \overset{\text{ozn.}}{=:} \mathcal{P}_{k-j}$. Píšeme $D = \underline{D} + e_n \partial_{x_n}$, kde $\underline{D} = e_1 \partial_{x_1} + \dots + e_{n-1} \partial_{x_{n-1}}$. Potom $0 = DP_k(x) =$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \underline{D} p_{k-j}(\underline{x}) \frac{x_n^j}{j!} + \sum_{j=1}^{k} e_n p_{k-j}(\underline{x}) \frac{x_n^{j-1}}{(j-1)!} =$$

$$-\,\|\,- \qquad + \sum_{j=0}^{k-1} e_n p_{k-j-1}(\underline{x}) \frac{x_n^j}{j!}.$$

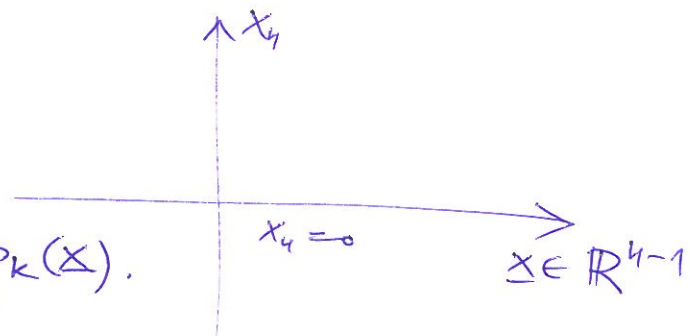
Neboli $\overline{e_n} p_{k-j-1} + \overset{e_n}{\underline{D}} p_{k-j} = 0$, $j = 0, \dots, k-1$;

$$p_{k-j-1} = e_n \underline{D} p_{k-j}$$

dostaneme, že $p_{k-j} = (e_n \underline{D})^j p_k$, $j = 1, \dots, k$.

Tedy (2) $P_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(x_n e_n \underline{D})^j}{j!} p_k(\underline{x}) \overset{\text{ozn.}}{=:} CK(p_k(\underline{x}))$.

Platí, že $p_k(\underline{x}) = P_k(\underline{x}, 0)$ ~~[illegible]~~ je restrikce P_k na nadrovinu $x_n = 0$ v $\mathbb{R}^n$, tzv. počáteční podmínky pro P_k.



Často píšeme

$CK(p_k(\underline{x})) = \exp(x_n e_n \underline{D})\, p_k(\underline{x})$.

Zřejmě platí, že

<u>VĚTA</u>: Operátor $CK : \mathcal{P}_k \xrightarrow{na} M_k$ definovaný jako ve (2) je izomorfismus.

Konstrukce 'báze' M_k

Podle předchozí věty stačí vzít libovolnou bázi $\mathcal{P}_k$, což je snadné.

Nechť $P_k \in M_k$ a $p_k(\underline{x}) = P_k(\underline{x}, 0)$. Potom víme, že

(3) $p_k(\underline{x}) = \sum_{|\underline{\alpha}| = k} \underline{x}^{\underline{\alpha}} a_{\underline{\alpha}}$,

kde $a_{\underline{\alpha}} = \partial^{\underline{\alpha}} p_k(\underline{0}) = \partial^{(\underline{\alpha}, 0)} P_k(0)$ a $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{N}_0^{n-1}$!

+ (2) dostaneme, že

(4) $$P_k(x) = \sum_{|\underline{\alpha}|=k} V_{\underline{\alpha}}(x)\, a_{\underline{\alpha}},$$

kde $V_{\underline{\alpha}}(x) := CK(\underline{x}^{\alpha}) \in M_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}_n)$.

———— x ————

Nechť $v_1, \dots, v_r$ je baze V. Potom

(5) $V_{\underline{\alpha}}(x)\, v_j$, $|\underline{\alpha}| = k$ a $j = 1, \dots, r$

je baze $M_k = M_k(\mathbb{R}^n, V)$.

<u>Poznámka</u> (i) Polynomy $\frac{1}{\underline{\alpha}!} V_{\underline{\alpha}}(x)$ se nazývají <u>Fueterovy</u>.

(ii) Nejlepší baze M_k jsou tzv. <u>GELFAND-TSETLINOVY BÁZE</u>, kterou jsou navíc ortogonální vůči přirozenému skalárnímu součinu na M_k.