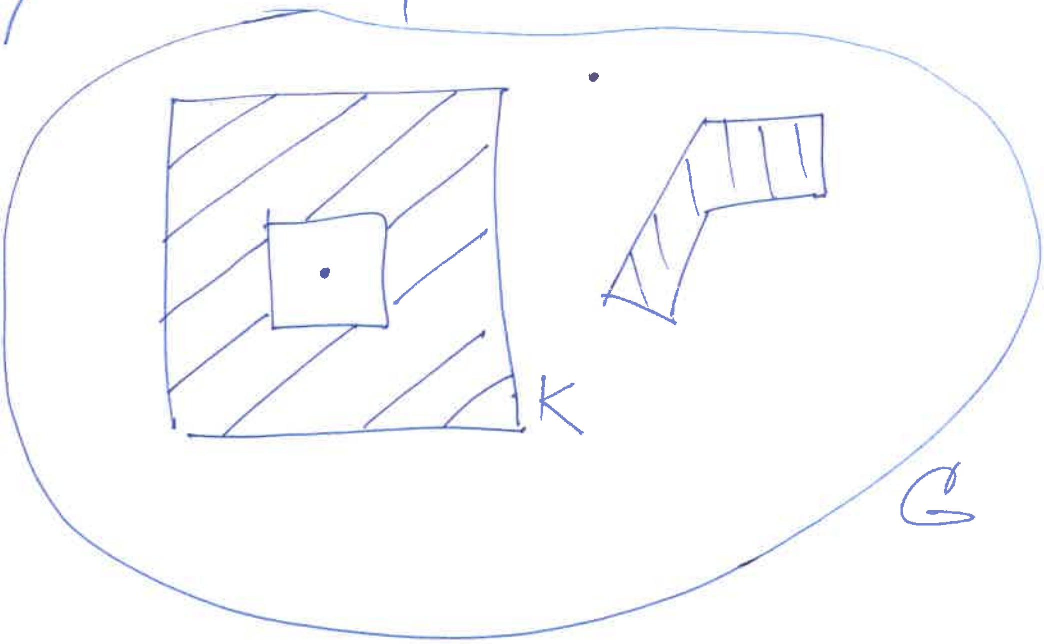
VĚTA (RUNGEHO PRO KOMPAKTY)

Nechť K je kompakt v $\mathbb{C}$ a nechť $S \subset \mathbb{C} \setminus K$ obsahuje aspoň jeden bod z každé komponenty $\mathbb{C} \setminus K$. Nechť f je holomorfní funkce na K. Potom existují racionální funkce R_n s póly v S takové, že $R_n \rightrightarrows f$ na K.



Posouvání pólů   Pushing poles

VÍME: Nechť R je racionální funkce. Potom lze R jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$(*)\quad R(z) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_j^k}{(z-z_k)^j}}_{\substack{\text{hl. č. Laurent.}\\ \text{rozvoje kolem}\\ \text{pólu } z_k}} + B_0 + \underbrace{C_1 z + \dots + C_m z^m}_{\substack{\text{"hl. č. L. rozvoje"}\\ \text{kolem pólu } \infty}},$$

kde $n, m \in \mathbb{N}_0$, $n_k \in \mathbb{N}$, $z_k \in \mathbb{C}$ a $A^k_{n_k} \neq 0$, $C_m \neq 0$.

Potom z_k je pól R násobnosti n_k pro $k = 1, \dots, n$ a
∞ — " — " — " — m.

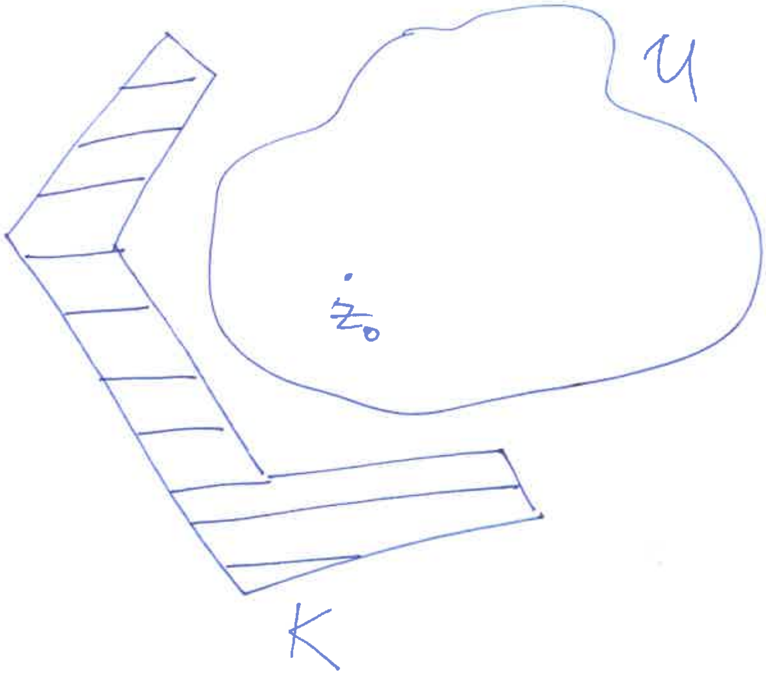
Racionální funkce R je polynom, právě když má pól jedině v ∞, anebo nemá žádný pól (potom je R konstantní funkce).

— × —

Označme: Nechť K je kompakt v $\mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{S}$ a $U \cap K = \emptyset$. Položme

$$\mathcal{B}(K, U) := \overline{\{ R|_K \mid R \text{ je racionální funkce s póly v } U \}}.$$

Zde uzávěr bereme v prostoru $\mathcal{C}(K)$ s normou $\|\cdot\|_K$.



Zřejmě je $B(K,U)$ <u>uzavřená podalgebra</u> prostoru $C(K)$. Cv.

<u>VĚTA</u> (Posouvání pólů)

Nechť K je kompakt v $\mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{S}$ je <u>oblast</u>, $K \cap U = \emptyset$ a $z_0 \in U$. Je-li R racionální funkce s póly v U, potom $R \in B(K, z_0)$.

↑ píšeme místo $\{z_0\}$

<u>Pozn:</u> Z VĚTY plyne, že $B(K,U) = B(K,z_0)$.

<u>DŮKAZ:</u> Položme

for $\xi \in \mathbb{C}$, $z \in B(K,z_0)$ for $\xi = \infty$
$\forall$

$$V := \left\{ \xi \in U \;\middle|\; \frac{1}{z-\xi} \in B(K,z_0) \right\}.$$

(i) Zřejmě $B(K,V) = B(K,z_0)$.
Skutečně, je-li $\xi \in V$, $\cap \mathbb{C}$ potom $\dfrac{1}{(z-\xi)^k} \in B(K,z_0)$ $\forall k \in \mathbb{N}$.
$\infty \in V$ $\quad z^k \quad$ algebra

Tudíž každá racionální funkce R s póly ve V leží v $B(K,z_0)$. Tedy $B(K,V) \subset B(K,z_0)$.
uzavřená

Obrácená inkluze plyne z toho, že $z_0 \in V$.

(ii) <u>V je uzavřená v $\mathcal{U}$</u>: Nechť $\xi_n \in V$, $\xi_n \to \xi_0$ a $\xi_0 \in \mathcal{U}$. Chceme ukázat, že $\xi_0 \in V$. WLOG: $\xi_n \in \mathbb{C}$ $\forall n$.

α) Nechť $\xi_0 \in \mathbb{C}$. Položme $\delta := \operatorname{dist}(\xi_0, K) > 0$. Volme n_0, aby $\operatorname{dist}(\xi_n, K) \geq \frac{\delta}{2}$ $\forall n \geq n_0$.

Potom $\dfrac{1}{z-\xi_n} \rightrightarrows \dfrac{1}{z-\xi_0}$ pro $z \in K$, protože

$$\left|\frac{1}{z-\xi_n} - \frac{1}{z-\xi_0}\right| = \frac{|\xi_n - \xi_0|}{|z-\xi_n| \cdot |z-\xi_0|} \leq \frac{4}{\delta^2}\overbrace{|\xi_n - \xi_0|}^{\to 0},$$

je-li $n \geq n_0$ a $z \in K$. Tedy $\xi_0 \in V$, neboli $\dfrac{1}{z-\xi_0} \in \mathcal{B}(K, z_0)$.

β) Nechť $\xi_0 = \infty$. Potom

$$\frac{\xi_n z}{\xi_n - z} = -\xi_n\left(\frac{\xi_n}{z-\xi_n} + 1\right) \in \mathcal{B}(K, z_0).$$

Volme $C > 0$, aby $|z| \leq C$ pro každé $z \in K$.
Volme n_0, aby $|\xi_n| > C$ $\forall n \geq n_0$. Potom

$$\frac{\xi_n z}{\xi_n - z} \rightrightarrows z \text{ pro } z \in K, \text{ protože}$$

$$\left|\frac{\xi_n z}{\xi_n - z} - z\right| = \frac{|z|^2}{\underbrace{|\xi_n - z|}_{\geq |\xi_n| - |z|}} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{C^2}{|\xi_n| - C}}, \quad \text{je-li } n \geq n_0 \text{ a } z \in K.$$

Tedy $z \in B(K, z_0)$, neboli $\infty \in V$. H*35

(iii) V je otevřená: Nechť $\xi_0 \in V$.

α) Nechť $\xi_0 \in \mathbb{C}$. Položme $\delta := \operatorname{dist}(\xi_0, K) > 0$.
Nechť $\xi \in U(\xi_0, \delta/2)$. Potom

$$\frac{1}{z-\xi} = \frac{1}{(z-\xi_0)-(\xi-\xi_0)} = \frac{1}{z-\xi_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{\xi-\xi_0}{z-\xi_0}} =$$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\xi-\xi_0)^k}{(z-\xi_0)^{k+1}}$ konverguje stejnoměrně pro $z \in K$, protože $\left| \frac{(\xi-\xi_0)^k}{(z-\xi_0)^{k+1}} \right| \le \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^k}{\delta^{k+1}} = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{1}{2^k}$.

Tudíž $\frac{1}{z-\xi} \in B(K, \xi_0) \subset B(K, z_0)$. Tedy
$U(\xi_0, \delta/2) \subset V$.

β) Nechť $\xi_0 = \infty$. Volme $C > 0$, aby $|z| \le C$ pro každé $z \in K$. Nechť $\xi \in \mathbb{C}$ a $|\xi| > 2C$. Potom

$$\frac{1}{z-\xi} = -\frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{\xi}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\xi^{k+1}}$$ konverguje

stejnoměrně pro $z \in K$, protože $\left| \frac{z^k}{\xi^{k+1}} \right| \le \frac{C^k}{(2C)^{k+1}} =$

$= \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{2^{k+1}}$.

Tudíž $\frac{1}{z-\xi} \in B(K, \underset{\xi_0}{\underset{\|}{\infty}}) \subset B(K, z_0)$.

Tedy $U(\infty, \frac{1}{2C}) \subset V$.

(iv) $V = U$, protože $\emptyset \neq V$ je otevřená a uzavřená podmnožina oblasti U. ▨

DŮKAZ RUNGEHO VĚTY PRO KOMPAKTY:

Nechť f je holomorfní funkce na otevřené množině $G \supset K$. Podle klasické RUNGEHO VĚTY "pro otevřené množiny" existují racionální funkce $\tilde{R}_n$ s póly mimo G takové, že

$$\tilde{R}_n \rightrightarrows f \text{ na } K.$$

Platí následující

$\boxed{\text{TVRZENÍ}}$ $\tilde{R}_n \in B(K, S)$

Z TVRZENÍ plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje racionální funkce R_n s póly v S taková, že

$$|R_n - \tilde{R}_n| \leq \frac{1}{n} \text{ na } K.$$

Potom zřejmě $R_n \rightrightarrows f$ na K.

DŮKAZ TVRZENÍ: Všechny póly $\tilde{R}_n$ jsou obsaženy v konečně mnoha komponentách $G_1, \dots, G_k$ ot. množiny $\mathbb{S} \setminus K$. Vyjádříme

$$\tilde{R}_n = \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2 + \dots + \tilde{Q}_k,$$

oblast

kde $\tilde{Q}_j$ je racionální funkce s póly v G_j.
Pro $j = 1, \dots, k$ zvolme $s_j \in S \cap G_j$. Z věty o posouvání pólů máme, že $\tilde{Q}_j \in B(K, s_j)$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pro každé $j = 1, \dots, k$ existuje racionální funkce Q_j s pólem pouze v s_j taková, že

$$|\tilde{Q}_j - Q_j| \le \frac{\varepsilon}{k \cdot \cancel{n}} \text{ na } K.$$

Stačí položit

$$R_n := Q_1 + \dots + Q_k. \qquad \blacksquare$$

Skutečně, potom $|R_n - \tilde{R}_n| \le \varepsilon$ a $R_n \in B(K, S)$.