Charakterizace jednoduché souvislosti

Připomenutí: Oblast $G \subset \mathbb{C}$ se nazývá jednoduše souvislá, pokud $\hat{\mathbb{C}} \setminus G$ je souvislý.

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Potom NTJE:

(JS1) (SC1) Je-li φ uzavřená (reguler) ⊛ křivka v G, potom
$$\operatorname{Int} \varphi \subset G.$$

(JS2) $\hat{\mathbb{C}} \setminus G$ je souvislý

(JS3) $\forall f \in \mathcal{H}(G)$ $\exists$ polynomy P_n : $P_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na G

(JS4) $\forall f \in \mathcal{H}(G)$: $\int_\varphi f = 0$, je-li φ uzavřená křivka v G.

(JS5) $\forall f \in \mathcal{H}(G)$ $\exists F \in \mathcal{H}(G)$: $F' = f$ na G

(JS6) $\forall f \in \mathcal{H}(G)$, $f \neq 0$ na G $\exists g \in \mathcal{H}(G)$:
$$f = e^g \text{ na } G$$

(JS7) $\forall f \in \mathcal{H}(G)$, $f \neq 0$ na G $\exists h \in \mathcal{H}(G)$:
$$f = h^2 \text{ na } G$$

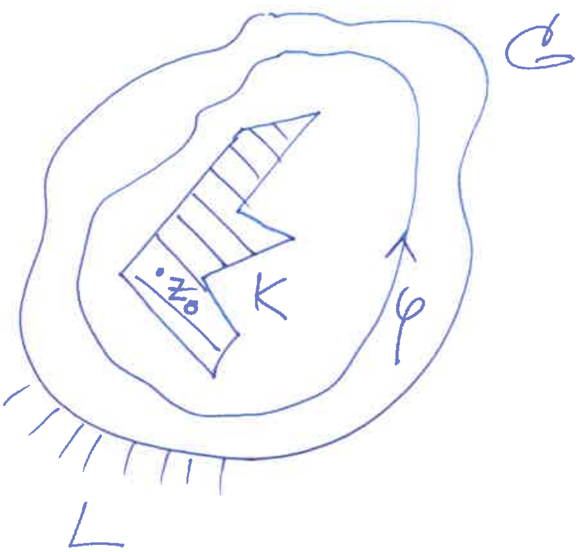
⊛ reguler = piecewise continuously differentiable

(JS1) $\Rightarrow$ (JS2): Nepřímo. Nechť $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ není souvislá. Pak existují disjunktní uzavřené množiny $\emptyset \neq K, L \subset \mathbb{C}_\infty$ tak, že $\mathbb{C}_\infty \setminus G = K \cup L$.

BÚNO: Nechť $\infty \notin K$. Potom K je kompakt v $\mathbb{C}$, $G_0 := G \cup K$ je otevřená množina v $\mathbb{C}$ a existuje cyklus Γ v G_0 takový, že

$$K \subset \operatorname{Int} \Gamma \subset G_0.$$

Nechť $z_0 \in K$. Protože $\operatorname{ind}_\Gamma z_0 \neq 0$, existuje $\varphi \in \Gamma$ taková, že $\operatorname{ind}_\varphi z_0 \neq 0$. Zřejmě $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$ a φ je uzavřená křivka v G. ▨



(JS2) $\Rightarrow$ (JS3): RUNGE

(JS3) $\Rightarrow$ (JS4): viz důkaz Cauchyho věty pro jednod. souvislé množiny

(JS4) $\Leftrightarrow$ (JS5): viz UKA, věta o existenci primitivní funkce

(JS5) $\Rightarrow$ (JS6): viz důkaz $\boxed{\text{Tvrzení}}$ o nenulových holomorf. fcí na jednod. souvislých oblastech v části o "Nulových bodech holomorf. fcí".

(JS6) $\Rightarrow$ (JS7): Stačí položit $h := e^{\frac{1}{2} g}$ na G.

Správná topologická dedukce

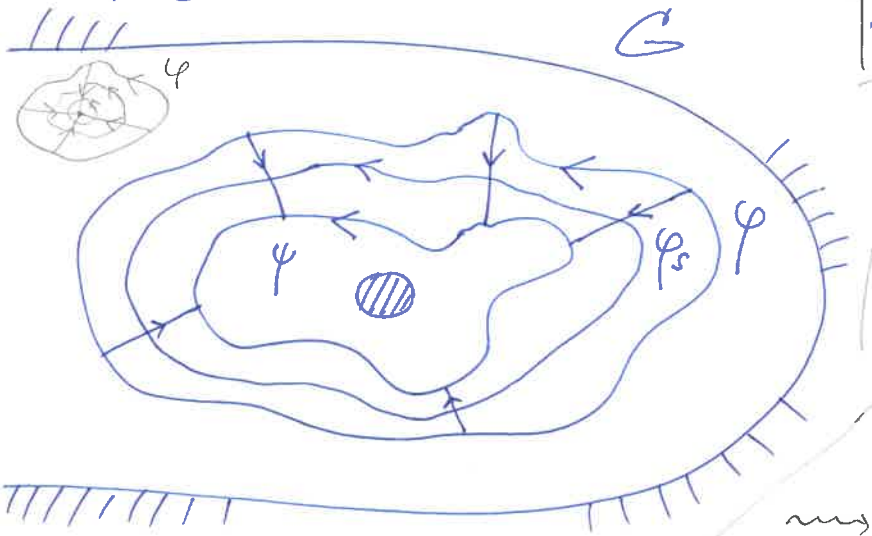
Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená. loop = smyčka

DEF. Řekneme, že spojité uzavřené křivky $\varphi, \psi : [0,1] \to G$ jsou homotopické v G, pokud existuje spojité zobrazení $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow G$ takové, že

$$\varphi_0 = \varphi, \quad \varphi_1 = \psi \quad a \quad \varphi_s(0) = \varphi_s(1) \quad \forall s \in [0,1],$$

kde $\varphi_s(t) := H(s,t)$.

Pozn: φ_s, $s \in [0,1]$ jsou "spojité deformace" φ na ψ v G



BÚNO: Předpokládáme, že všechny křivky jsou definovány na $[0,1]$.

Re: This notion can be generalized easily for (path-connected) topological spaces.
⇝ ALG. TOPOLOGY (FUNDAMENTAL GROUP etc.)

(JS8) Každá spojitá uzavřená křivka φ v G je homotopická v G s konstantní křivkou.

Pozn (i) "Každá smyčka v G lze stáhnout do bodu."

Any loop in G can be continuously shrunked inside G into a point.

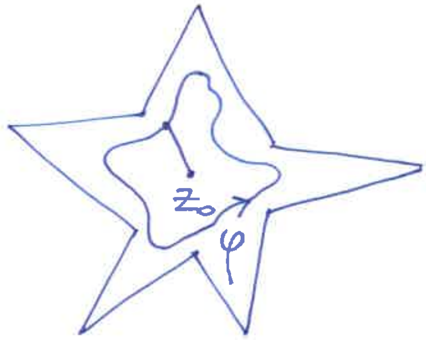
(ii)

star-like

Příklad 1: Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitá oblast. Potom platí (JS8).

⌈ Skutečně, nechť $z_0 \in G$ je střed hvězdovitosti G, tzn. $[z_0; z] \subset G \ \forall z \in G$. Nechť φ je spojitá uzavřená křivka v G. Potom φ je homotopická s $\psi(t) := z_0$, $t \in [0,1]$, protože stačí uvážit

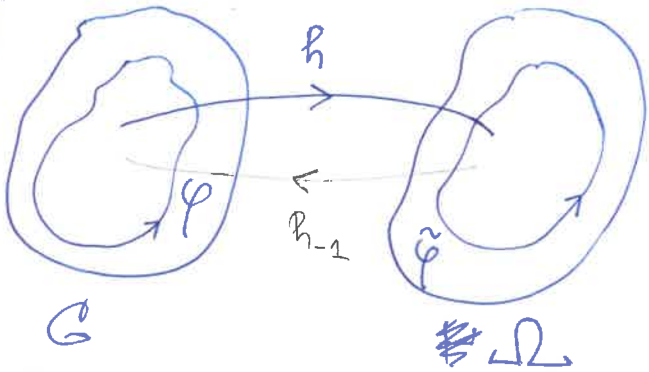
$$H(s,t) := (1-s)\varphi(t) + s z_0, \quad [s,t] \in [0,1]^2. \ \boxtimes$$



⌋

Příklad 2: Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená a má vlastnost $\subset \mathbb{C}$ (JS8). Je-li G homeomorfní s Ω, potom i G má vlastnost (JS8).

⌈



Skutečně, nechť $h : G \xrightarrow{na} \Omega$ je homeomorfismus. Nechť φ je spojitá uzavřená křivka v G. Potom $\tilde{\varphi} := h \circ \varphi$ je homotopická s konstantní křivkou v Ω (s $\tilde{H}$) a totéž platí i pro φ (s $H := h_{-1} \circ \tilde{H}$). $\boxtimes$

⌋

(JS7) $\Rightarrow$ (JS8): Nechť φ je uzavřená spojitá křivka v G. Nechť G_0 je komponenta G obsahující φ. (i) Je-li $G_0 = \mathbb{C}$, pak je φ homotopická s konstantní křivkou v G_0 podle Př. 1.

(ii) Nechť $G_0 \subsetneq \mathbb{C}$. (1) Potom je totéž pravda podle Př. 2, protože platí

$\boxed{\text{Riemannova věta}}$ Nechť $\emptyset \neq G_0 \subsetneq \mathbb{C}$ je oblast s vlastností (JS7). Potom existuje prostá holomorfní $h: G_0 \xrightarrow{na} \mathbb{D}$, speciálně, takováto $h: G_0 \xrightarrow{na} \mathbb{D}$ je homeomorfismus.

Zde $\mathbb{D} = U(0,1)$. [DŮKAZ: POZDĚJI.]

JSJ

(1) Then $\emptyset \neq G_0 \subsetneq \mathbb{C}$ is a domain with (JS7). (SC7)

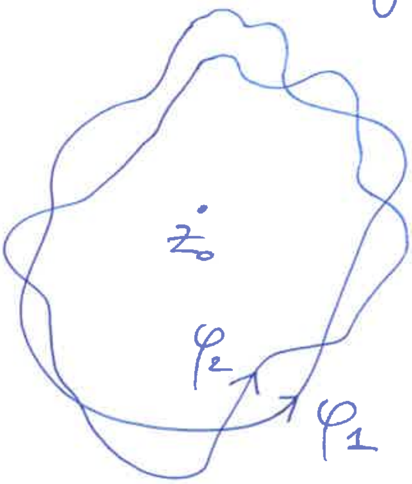
(JS8) $\Rightarrow$ (JS1): Zřejmě každá konstantní | JS6

křivka φ má $\operatorname{Int}\varphi = \emptyset$. Proto tato implikace plyne z následující věty.

<u>VĚTA</u>: Nechť φ a ψ jsou uzavřené spojité křivky homotopické v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$. Potom

$$\operatorname{ind}_\varphi z_0 = \operatorname{ind}_\psi z_0 \quad \forall z_0 \in \mathbb{C} \setminus G.$$

<u>VÍME</u>: $\boxed{\text{Tvrzení}}$ Nechť $\varphi_1, \varphi_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ jsou uzavřené (regulární) křivky a $z_0 \in \mathbb{C} \setminus (\langle\varphi_1\rangle \cup \langle\varphi_2\rangle)$.



Je-li $\forall t \in [0,1]$

$(*)$ $|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| < |\varphi_1(t) - z_0|$,

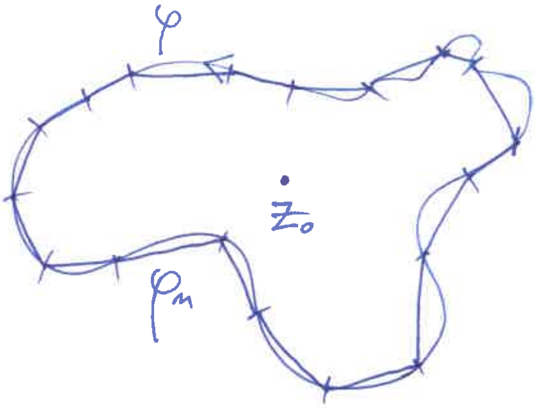
potom $\operatorname{ind}_{\varphi_1} z_0 = \operatorname{ind}_{\varphi_2} z_0$.

---

(1) Rozšíříme definici indexu i pro <u>spojité</u> křivky: Nechť $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ je spojitá uzavřená křivka a $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$. Potom existují <u>regulární</u> uzavřené křivky $\varphi_n : [0,1] \to \mathbb{C}$ tak, že $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$.

Skutečně, φ lze libovolně přesně stejnoměrně aproximovat lomenou čarou s vrcholy na této křivce dané dostatečně jemným dělením $[0,1]$.

Use the uniform continuity of φ. partition



Pokrujeme
$$\operatorname{ind}_\varphi z_0 = \lim_{n\to\infty} \operatorname{ind}_{\varphi_n} z_0 .$$
Z $\boxed{\text{Tvrzení}}$ snadno dostaneme, že tato definice je korektní, protože

(i) Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\operatorname{ind}_{\varphi_n} z_0$, $n \geq n_0$ je konstantní;

(ii) $\operatorname{ind}_\varphi z_0$ nezávisí na volbě $\{\varphi_n\}$. Why? $\boxed{\text{HW}}$

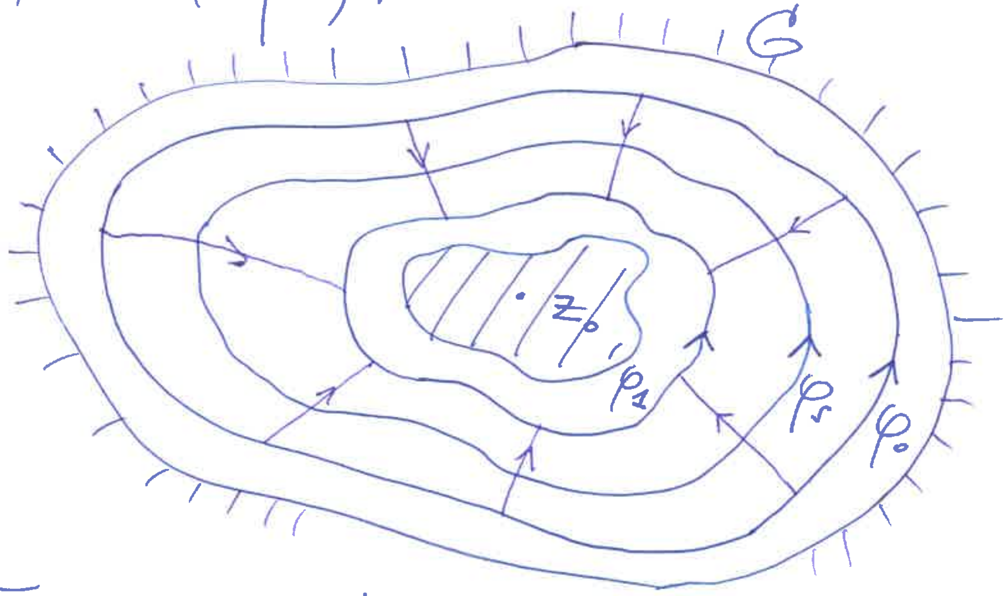
<u>Jiná možnost</u>: definuj $\operatorname{ind}_\varphi z_0$ pomocí jednoznačného rozvoje argumentu pro φ.

2. $\boxed{\text{Tvrzení}}$ platí i pro <u>spojité</u> křivky φ_1 a φ_2.

Skutečně, nechť φ_1, φ_2 splňují předpoklady Tvrzení. Pak z 1. existují aproximace $\tilde\varphi_1, \tilde\varphi_2$, které jsou regulární, splňují předpoklady Tvrzení a navíc
$$\operatorname{ind}_{\varphi_j} z_0 = \operatorname{ind}_{\tilde\varphi_j} z_0 \quad \text{pro } j = 1,2.$$

DŮKAZ VĚTY: Nechť $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$.

Nechť $H : [0,1] \times [0,1] \to G$ je spojitá, $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = \psi$ a $\varphi_s(0) = \varphi_s(1)$ $\forall s \in [0,1]$, kde $\varphi_s(t) := H(s,t)$.



Položme $\varepsilon := \operatorname{dist}(z_0, \underbrace{H([0,1]^2)}_{\text{kompakt v } G}) > 0$.

Protože H je stejnoměrně spojitá, existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $k = 0, 1, \dots, n-1$ a každé $t \in [0,1]$

$$\left| \varphi_{\frac{k}{n}}(t) - \varphi_{\frac{k+1}{n}}(t) \right| = \left| H\left(\tfrac{k}{n}, t\right) - H\left(\tfrac{k+1}{n}, t\right) \right| < \varepsilon,$$

speciálně $\varphi_{\frac{k}{n}}, \varphi_{\frac{k+1}{n}}$ splňují předpoklady Tvrzení. Tudíž máme

$$\operatorname{ind}_{\varphi_0} z_0 = \operatorname{ind}_{\varphi_{1/n}} z_0 = \dots = \operatorname{ind}_{\varphi_1} z_0. \quad \blacksquare$$