RUNGEHO VĚTY

<u>Označení</u>: Nechť $E \subset \hat{\mathbb{C}}$ a $m: E \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
Číslo $m(c)$ je <u>násobnost</u> bodu $c \in E$. Řekneme, že (E, m) má <u>hromadný bod</u> $c \in \hat{\mathbb{C}}$, pokud c je hromadný bod množiny E nebo ($m(c) = \infty$, $c \in E$).
Označme $\mathcal{F}(E, m)$ systém funkcí, který obsahuje

(i) $\frac{1}{z-c}$, je-li $c \in E \cap \mathbb{C}$ a $m(c) < \infty$;

(ii) $\frac{1}{(z-c)^k}$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, je-li $c \in E \cap \mathbb{C}$ a $m(c) = \infty$;

(iii) z^k pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$, je-li $m(\infty) = \infty$ a $\infty \in E$.

<u>VĚTA</u> (RUNGE) Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $E \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus G$ a $m: E \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Má-li (E, m) hromadný bod v každé komponentě $\hat{\mathbb{C}} \setminus G$, tak lineární obal $\mathcal{F}(E, m)$ je hustý v $\mathcal{H}(G)$.

<u>DŮKAZ</u>: Nechť $L \in \mathcal{H}^*(G)$ a $L = 0$ na $\mathcal{F}(E, m)$.
Z Hahn-Banachovy věty stačí ukázat, že $L = 0$ na $\mathcal{H}(G)$. Nechť $x \in \mathcal{H}_0(\hat{\mathbb{C}} \setminus G)$ reprezentuje L ve smyslu věty popisující $\mathcal{H}^*(G)$.

H*27

Je-li $c \in E \cap \mathbb{C}$ a $m(c) < \infty$, potom

$$\lambda(c) = -L\Big(\underbrace{\tfrac{1}{z-c}}_{\in\, \mathcal{F}(E,m)}\Big) = 0.$$

Je-li $c \in E \cap \mathbb{C}$ a $m(c) = \infty$, potom

$$\frac{\lambda^{(k)}(c)}{k!} = -L\left(\frac{1}{(z-c)^{k+1}}\right) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Je-li $\infty \in E$ a $m(\infty) = \infty$, potom

$$\frac{\lambda^{(k+1)}(\infty)}{(k+1)!} = L(z^k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Chceme ukázat, že $\lambda \equiv 0$. Existuje kompakt $K \subset G$ takový, že

(i) $\lambda \in \mathcal{H}_0(\mathbb{S} \setminus K)$;

(ii) každá komponenta $\mathbb{S} \setminus K$ obsahuje komponentu $\mathbb{S} \setminus G$;

Nechť V je komponenta $\mathbb{S} \setminus K$. Potom V je oblast a z (ii) existuje $c \in V$, který je hromadným bodem (E, m). Z věty o jednoznačnosti dostaneme, že $\lambda \equiv 0$ na V, tedy i na $\mathbb{S} \setminus K$. ∎

VĚTA (RUNGE, klasická verze)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ otevřená a $f \in \mathcal{H}(G)$.

(a) Potom existují racionální funkce R_n ($n \in \mathbb{N}$) s póly mimo (outside) G takové, že $R_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na G.

(b) Je-li navíc $\mathbb{S} \setminus G$ souvislá, potom existují polynomy p_n takové, že $p_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na G.

Re: We call a domain $G \subset \mathbb{C}$ simply connected if $\mathbb{S} \setminus G$ is connected.

DŮKAZ: (b) Nechť $E = \{\infty\}$ a ~~nechť~~ $m(\infty) = \infty$.

Potom $\mathcal{F}(E, m) = \{1, z, z^2, \dots, z^k, \dots\}$. Podle předešlé věty jsou polynomy husté v $\mathcal{H}(G)$.

(a) Nechť $E \subset \mathbb{S} \setminus G$ obsahuje právě aspoň jeden bod z každé komponenty $\mathbb{S} \setminus G$. Položme $m \equiv \infty$ na E. Potom z předchozí věty je

$R := \mathcal{L}o(\mathcal{F}(E, m))$ hustý v $\mathcal{H}(G)$.

$\mathcal{L}$ lineární obal

Zřejmě $\mathcal{L}o(\mathcal{F}(E, m)) \subset \{$racionální funkce s póly mimo $G\}$. ▨

VĚTA (Cauchy pro jednoduše souvislou ot. množinu)
Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $\mathbb{S} \setminus G$ je souvislá. Je-li $f \in \mathcal{H}(G)$ a φ je uzavřená křivka v G, potom

$$\int_\varphi f = 0.$$

DŮKAZ: Z Rungeho věty existují polynomy P_n tak, že $P_n \overset{loc}{\underset{n}{\rightrightarrows}} f$ na G. Potom ale

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{mají PF} \\ \text{na } \mathbb{C}}}{0 = \int_\varphi P_n} \xrightarrow{n \to \infty} \int_\varphi f = 0. \quad \blacksquare$$

VĚTA (Cauchyho pro cykly)
Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a Γ je cyklus v G (tzn. $\langle \Gamma \rangle \subset G$). Potom platí

(CV) $\int_\Gamma f = 0 \ \forall f \in \mathcal{H}(G)$, právě když $\operatorname{Int} \Gamma \subset G$.

DŮKAZ: $\boxed{\Rightarrow}$ Je-li $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$, potom $f(z) := \frac{1}{z - z_0} \in \mathcal{H}(G)$ a z (CV) dostaneme

$$\operatorname{ind}_\Gamma z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f = 0.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Nechť $f \in \mathcal{H}(G)$. Z Rungeho věty existují racionální funkce R_n s póly mimo G tak, že $R_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na G. Potom

$$0 \overset{②}{=} \int_\Gamma R_n \longrightarrow \int_\Gamma f \neq 0,$$

Důkaz ②: Nechť $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, kde φ_j jsou uzavřené křivky v G. Potom

$$\int_\Gamma R_n = \sum_{j=1}^{m} \int_{\varphi_j} R_n = \sum_{j=1}^{m} \sum_{R_n(s)=\infty} 2\pi i \cdot \operatorname{res}_s R_n \cdot \operatorname{ind}_{\varphi_j} s =$$

RV pro hvězdovitou oblast $\mathbb{C}$

$$= \sum_{R_n(s)=\infty} 2\pi i \cdot \operatorname{res}_s R_n \cdot \underbrace{\operatorname{ind}_\Gamma s}_{=0,\ \text{neboť } s \notin G} = 0. \quad \blacksquare$$