<u>Meromorfní funkce.</u>

<u>Připomínka</u>. Riemannova sféra

Víme: 1) $\mathbb{S} \simeq S^1$ kompakt

2) $\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to 0} f(\frac{1}{z})$, má-li jedna strana smysl.

<u>Úmluva</u>. $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$, ...

<u>Úmluva</u>. Funkce f je holomorfní na $K \subset \mathbb{C}$, existuje-li otevřená $G \supset K$ taková, že f je holomorfní na G. Speciálně f je holomorfní v z_0, je-li holomorfní na nějakém jeho okolí.

<u>Definice</u>. (i) Funkce f je holomorfní v ∞, pokud $f(\frac{1}{z})$ je holomorfní v 0.

(ii) Funkce f má odstr. singularitu v ∞, pokud $f(\frac{1}{z})$ má odst. sg. v 0.

(iii) analogicky pro pól a podst. sg.

<u>Označení</u>. Je-li $G \subset \mathbb{S}$ otevřená, potom

$\mathcal{H}(G) := \{f : G \to \mathbb{C},\ f \text{ holomorfní na } G\}$.

(f je holomorfní na G, je-li holom. v každém jejím bodě.)

<u>Příklad</u>. $\mathcal{H}(\mathbb{S}) = \{\text{konstanty}\}$

<u>Poznámka</u>. $\mathcal{H}(G)$ zajímavé pro ot. $G \subsetneq \mathbb{S}$, ale búno $G \subset \mathbb{C}$ ot. (jinak $G \subset \mathbb{S} \setminus \{z_0\}$ a užijeme transformaci $\frac{1}{z-z_0}$)

__Definice__. Nechť $G \subset \mathbb{S}$ otevřená. Řekneme, že funkce f na G je __meromorfní__, pokud v každém $z_0 \in G$ je buď funkce f holomorfní, nebo má v z_0 pól.

__Poznámka__. (i) $\mathcal{H}(G) \subset \mathcal{M}(G)$

(ii) Označ. $P_f := \{z_0 \in G, f \text{ má v } z_0 \text{ pól}\}$.
Potom P_f nemá žádné hromadné body v G.

(iii) Je-li $f = \infty$ na P_f, potom $f : G \to \mathbb{S}$ je spojitá.

Úmluva: $f = \infty$ na P_f.

__Příklad__. $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$, $\pi \operatorname{cotg}(\pi z) \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$

$e^{\frac{1}{z}}$, $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{z}} \notin \mathcal{M}(\mathbb{C})$

__Příklad__. Funkce $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$

(i) $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$, $\operatorname{Re} s > 0$,

(ii) $n! = \Gamma(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.

__Vsuvka__. Nechť $G \subset \mathbb{S}$ ot. a $M \subset G$ nemá hromadné body v G. Potom

(i) $G \setminus M$ je otevřená

(ii) Je-li K kompakt v G, potom $K \cap M$ je konečná. Speciálně pro $G = \mathbb{S}$ je M konečná.

(iii) M je nejvýše spočetná; je-li M nekonečná, potom $\emptyset \neq \operatorname{der} M \subset \partial G$, kde $\operatorname{der} M := \{\text{hromadné body } M \text{ v } \mathbb{S}\}$
Nechť $G \subsetneq \mathbb{S}$, BÚNO $G \subset \mathbb{C}$. $\exists K_n$ kompakty, $\bigcup_n K_n = G$. Potom $M = \bigcup_n \underbrace{(M \cap K_n)}_{\text{konečná}}$.

__Lemma__. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ ot.. Potom existují kompakty K_n, $n \in \mathbb{N}$, takové, že

(i) $\bigcup_n K_n = G$,

(ii) $K_n \subset K_{n+1}$ $\forall n$,

(iii) $\forall K$ kompakt, $K \subset G$, $\exists n_0 : K \subset K_{n_0}$.

__Důkaz__. $K_n := \{\operatorname{dist}(z, \mathbb{C} \setminus G) \geq \frac{1}{n}\} \cap \overline{U(0,n)}$. $\square$

__Poznámka__. Je-li $G \subset \mathbb{C}$ oblast, potom $G \setminus M$ je oblast.

__Příklad__. $\mathcal{M}(\mathbb{S}) = \{\text{racionální funkce}\}$

„$\supset$" jasné.

„$\subset$" Nechť $f \in \mathcal{M}(\mathbb{S})$. Potom $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ a P_f je konečná, $P_f = \{z_1, \dots z_n\} \subset \mathbb{C}$.
Víme, že $f(z) = \sum_{j=1}^{n} p_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$,
kde p_j jsou polynomy.
V ∞ má f nejvýše pól.
Funkce $h(z)$ má v ∞ nejvýše pól ($h(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$), právě když
$h(\frac{1}{z}) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{z^n}$ má v 0 nejvýše pól,
tedy $a_n \neq 0$ jen pro konečně mnoho n.

__Příklad__. e^z má v ∞ podstatnou singularitu.
Dokonce každá celá funkce f (tj. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$), která není polynom, má v ∞ podst. singularitu.

__Poznámka__. $\mathcal{M}(G)$ zajímavé pro $G \subsetneq \mathbb{S}$ ot., BÚNO $G \subset \mathbb{C}$ ot.

__Poznámka__. Jsou-li f, g holomorfní na oblasti $G \subset \mathbb{C}$ a $g \not\equiv 0$, potom $\frac{f}{g}$ je meromorfní na G.
Skutečně: $\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z - z_0)^m \tilde{f}(z)}{(z - z_0)^n \tilde{g}(z)} = (z - z_0)^{m-n} \frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}$, $z \in P(z_0)$
kde $m, n \geq 0$ celé a $\tilde{f}, \tilde{g}$ jsou hol. v z_0 a $\tilde{g}(z_0) \neq 0$.

Věta. (O jednoznačnosti pro meromorfní funkce.)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f \in \mathcal{M}(G)$, $f \not\equiv 0$.

Potom $N_f := \{z \in G;\ f(z) = 0\}$ nemá hromadné body v G.

Důkaz. Víme to pro holomorfní funkce. Uvažme $G_0 := G \setminus P_f$. Zřejmě $G_0 \setminus \mathbb{C}$ oblast, $f \in \mathcal{H}(G_0)$ a $f \not\equiv 0$.

Potom $N_f \subset G_0$ nemá hromadné body v G_0, ale ani v P_f. $\square$

Věta. (Reziduová.)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ oblast, φ uz. křivka v G a $\operatorname{Int}\varphi \subset G$.

Nechť $M \subset G \setminus \langle\varphi\rangle$ a f je holomorfní na $G \setminus M$.

Potom $\int_\varphi f = 2\pi i \sum_{s \in M} \operatorname{res}_s f \cdot \operatorname{ind}_s \varphi$.

Poznámka. (RV) platí i v případě, že $M \subset G \setminus \langle\varphi\rangle$ nemá v G hromadné body.

Skutečně, (i) $M_0 := M \cap \operatorname{Int}\varphi$ je konečná:

$M \cap (\operatorname{Int}\varphi \cup \langle\varphi\rangle)$ je kompakt

(ii) $G_0 := G \setminus (M \setminus M_0)$ je otevřená,

f je holomorfní na $G_0 \setminus M_0 = G \setminus M$

a dle (RV) (pro G_0, M_0) dostaneme

$$\int_\varphi f = 2\pi i \sum_{s \in M \cap \operatorname{Int}\varphi} \operatorname{res}_s f \cdot \operatorname{ind}_s \varphi.$$

Věta. (Princip argumentu.)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ oblast, $f \in \mathcal{M}(G)$, φ uzavřená křivka v G.

Nechť $\operatorname{Int}\varphi \subset G$ a φ neprochází nulovým bodem ani pólem funkce f. Potom

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f'}{f} = \sum_{\substack{s \in \operatorname{Int}\varphi \\ f(s)=0}} n_f(s) \cdot \operatorname{ind}_s \varphi - \sum_{\substack{s \in \operatorname{Int}\varphi \\ f(s)=\infty}} p_f(s) \operatorname{ind}_s \varphi;$$

kde $\Sigma(f,\varphi) :=$ pravá strana; $n_f(s)$ je násobnost nul. bodu s funkce f a $p_f(s)$ násobnost pólu s funkce f.

Důkaz. Z (RV) máme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f'}{f} = \sum_{\substack{s \in \operatorname{Int}\varphi \\ s \in N_f \cup P_f}} \operatorname{res}_s\left(\frac{f'}{f}\right) \cdot \operatorname{ind}_s \varphi.$$

Navíc snadno

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{c_p \cdot p (z-s)^{p-1} + \dots}{\underset{\neq 0}{c_p}(z-s)^p + \dots} = \frac{p}{z-s} \cdot \frac{1+\dots}{1+\dots}$$

$$\operatorname{res}_s \frac{f'}{f} = p = \begin{cases} n_f(s); & s \in N_f \\ -p_f(s); & s \in P_f \end{cases}$$

$\square$

Věta. (Rouché.)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ oblast; $f_1, f_2 \in \mathcal{M}(G)$ a φ uzavřená křivka v G, $\operatorname{Int}\varphi \subset G$. Nechť

(Δ) $|f_1(z) - f_2(z)| < |f_1(z)| < \infty \quad \forall z \in \langle\varphi\rangle$.

Potom

$\Sigma(f_1, \varphi) = \Sigma(f_2, \varphi)$.

Důkaz. Položme $\varphi_j := f_j \circ \varphi$. Víme

$$\operatorname{ind}_0 \varphi_j = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f_j'}{f_j} \overset{(PA)}{=} \Sigma(f_j, \varphi).$$

Stačí ukázat následující

Lemma. Nechť $\varphi_1, \varphi_2 : \langle a, b\rangle \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Nechť $|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| < |\varphi_2(t)| \ \forall t \in \langle a, b\rangle$. Potom

$\operatorname{ind}_0 \varphi_1 = \operatorname{ind}_0 \varphi_2$.

Důkaz (Lemmatu.)

Z předpokladu máme

$$\Big|1 - \underbrace{\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}}_{\psi(t)}\Big| < 1 \ \forall t.$$

Zřejmě $\langle\psi\rangle \subset U(1,1)$. Speciálně $\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \notin (-\infty, 0\rangle$.

Dále Vlaškovo lemma o spojovačích. $\square$

Tím je dokončen důkaz Rouchého věty. $\square$

Poznámka. Jsou-li f_1, f_2 holomorfní na $\overline{U(z_0,r)}$ a platí-li $|f_1(z)-f_2(z)|<|f_1(z)|\ \forall z \in \partial\overline{U(z_0,r)}$, potom f_1 a f_2 mají stejný počet nulových bodů v $U(z_0,r)$.*

Důkaz (Poznámky.)

Rouché: pro $\varphi(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. □

*) nulový bod počítáme tolikrát, kolik činí jeho násobnost.

Příklad. Polynom $p(z) := a_0 z^n + \dots + a_n$, $a_0 \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ má právě n kořenů:

Rouché: $f_1 = a_0 z^n$, $f_2 = p$ na dost velkém $U(z_0, r)$.

Označení. Funkce f nabývá v $z_0 \in \mathbb{C}$ hodnoty $w_0 \in \mathbb{C}$ p-násobně, pokud z_0 je p-násobný nulový bod $f - w_0$ (tj. $f(z) = w_0 + c_p(z-z_0)^p + \dots$, $p \in \mathbb{N}$, $c_p \neq 0$).

Funkce f nabývá v z_0 hodnoty ∞ p-násobně, pokud z_0 je p-násobný nulový bod $\frac{1}{f}$ (tj. f má v z_0 pól násobnosti p).

Funkce f nabývá v ∞ hodnoty $w_0 \in \mathbb{S}$ p-násobně, pokud $f(\frac{1}{z})$ v 0 nabývá w_0 p-násobně.

Věta. Nechť $z_0, w_0 \in \mathbb{S}$, f je holomorfní na jistém $P(z_0)$ a f nabývá v z_0 hodnoty w_0 p-násobně. Potom $\exists\, \varepsilon, \delta > 0 : \forall w \in P(w_0, \varepsilon)\ \exists$ právě p čísel $z_1, \dots z_p \in P(z_0, \delta)$ tak, že $f(z_j) = w$ jednonásobně pro $j = 1, \dots p$.

Důkaz. Búno $z_0 = 0$, $w_0 = 0$.
Tedy 0 je p-násobný nulový bod f.
Tedy $\exists\, \delta > 0$: $f \neq 0$ a $f' \neq 0$ na $P(0, 2\delta)$.
(z věty o jednoznačnosti:) Zřejmě

$$\varepsilon := \inf_{|z|=\delta} |f| > 0.$$

Nechť $w \in P(0, \varepsilon)$. Rouché:

$f_1 := f$; $f_2 := f - w$, máme $|f_1 - f_2| = |w| < \varepsilon \leq |f_1|$ na $\partial\overline{U(0,\delta)}$.

Tedy f_1, f_2 mají stejný počet nulových bodů v $U(0,\delta)$ a f nabývá každé hodnoty na $P(0,\delta)$ jednonásobně, neboť je tam $f' \neq 0$. □

Důsledek. Nechť $G \subset \mathbb{S}$ otevřená, $f \in \mathcal{M}(G)$, f není konstantní na žádné komponentě G.

Potom f je otevřené zobrazení na G.

Věta. (Hurwitz.)
Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast, $f_n \in \mathcal{H}(G)$, $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na G a $f \not\equiv 0$. Nechť $z_0 \in G$ a $f(z_0) = 0$.
Existuje $\{z_n\} \subset G$, $z_n \to z_0$
rostoucí $k_n \in \mathbb{N}$ tak, že $f_{k_n}(z_n) = 0$.

Důkaz. Volme $\delta > 0$, aby $U(z_0, \delta) \subset G$ a $f \neq 0$ na $P(z_0, \delta)$.
Položme $\rho_n := \frac{\delta}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ a $\varphi_n(t) := z_0 + \rho_n e^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.
Pro dané $n \in \mathbb{N}$: $\tau_n := \inf_{\langle\varphi_n\rangle} |f| > 0$. Volme k_n tak, aby $|f_{k_n} - f| < \tau_n \leq |f|$ na $\langle \varphi_n \rangle$.
Rouché: $\exists\, z_n \in U(0, \rho_n)$ tak, že $f_{k_n}(z_n) = 0$.
Lze zvolit $\{k_n\}$ rostoucí! □

Důsledek. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast, f_n jsou prosté holomorfní funkce na G a $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na G. Potom f je prostá nebo konstantní.

Důkaz. Sporem: $\exists w_0 \in \mathbb{C}$ taková, že $f \not\equiv w_0$, ale existují různé $z', z'' \in G$, že $f(z') = f(z'') = w_0$. Búno $w_0 = 0$ (jinak $f - w_0$).

Hurwitz: $\exists z'_n \in G$ a vybraná posl. $\{f_{k'_n}\}$ z $\{f_n\}$ tak, že $z'_n \to z'$ a $f_{k'_n}(z'_n) = 0$.

Hurwitz: $\exists z''_n \in G$ a vybraná $\{f_{k''_n}\}$ z $\{f_{k'_n}\}$ tak, že $z''_n \to z''$ a $f_{k''_n}(z''_n) = 0$

$\Rightarrow$ pro dost velké n mají $f_{k''_n}$ alespoň dva různé nulové body, spor. □

Nulové body holomorfních funkcí

Víme: Je-li f holomorfní funkce na oblasti $G \subset \mathbb{C}$ a $f \not\equiv 0$, potom N_f nemá žádné hromadné body (věta o jednoznačnosti.)

Otázka. nemá-li $N \subset G$ hromadné body v G, existuje $f \in \mathcal{H}(G)$ taková, že $N_f = N$?

① „$N = \emptyset$"

Lemma (TVRZENÍ) (T). Nechť f je nenulová holomorfní funkce na jednoduše souvislé oblasti $G \subset \mathbb{C}$ (tj. G je oblast v $\mathbb{C}$ a $S \setminus G$ je souvislá). Potom existuje $L \in \mathcal{H}(G)$ tak, že $f = e^L$ na G.

Důkaz. 1) Nechť L je holomorfní na G a $f = e^L$. Potom $f' = L'e^L$ a $\frac{f'}{f} = L'$.

2) Protože G je j. s. a $\frac{f'}{f} \in \mathcal{H}(G)$, víme, že existuje $L_0 \in \mathcal{H}(G) : L_0' = \frac{f'}{f}$

3) Máme
$(f \cdot e^{-L_0})' = (f' - L_0' f) e^{-L_0} = 0$ na oblasti G.
Tudíž $f \cdot e^{-L_0} = e^c$ na G pro nějaké $c \in \mathbb{C}$.
Stačí položit $L := L_0 + c$. □

② N je konečná.

Nechť $k \geq 0$ a $\{z_1, \dots z_n\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Potom
$f(z) = z^k \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{z_j}\right)$, $z \in \mathbb{C}$ je celá funkce (tj. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$), má v 0 nulový bod násobnosti k a nenulové nulové body má právě v bodech $z_1, \dots z_n$, přičemž násobnost odpovídá výskytu.

Podle (T) každá $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, která má stejné nulové body jako f, má tvar
$$g = f e^L$$
pro nějakou $L \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

③ N je nekonečná.

Označení. Nechť $\{a_j\} \subset \mathbb{C}$. Potom
$$\prod_{j=1}^{\infty} a_j := \lim_{n \to \infty} \prod_{j=1}^{n} a_j,$$
pokud limita vpravo existuje.

Věta. Nechť $M \subset \mathbb{C}$, $u_j : M \to \mathbb{C}$ jsou omezené a $\sum_{j=1}^{\infty} |u_j|$ konverguje stejnoměrně na M. Potom $p_n := \prod_{j=1}^{n} (1 + u_j)$ konvergují stejnoměrně k funkci f na M a platí
$f = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + u_{n_j})$ na M,
je-li $\{n_1, n_2, \dots\}$ permutace $\{1, 2, \dots\}$.
Navíc je-li $z_0 \in M$, potom $f(z_0) = 0$, právě když $\exists j_0 \in \mathbb{N} : u_{j_0}(z_0) = -1$

Důkaz: (i) Označ $p_n^* := \prod_{j=1}^{n}(1+|u_j|)$. Potom

(1) $p_n^* \le \exp\left(\sum_{j=1}^{n}|u_j|\right)$ a

(2) $|p_n - 1| \le p_n^* - 1$

ad (1): Stačí uvážit $1+x \le e^x$, $x \ge 0$.

ad (2): Indukce: $n=1$ … jasné

$n \to n+1$. $p_{n+1} - 1 = p_n(1 + u_{n+1}) - 1 =$

$= (p_n - 1)(1+u_{n+1}) + u_{n+1}$

$|p_{n+1} - 1| \le (p_n^* - 1)(1+|u_{n+1}|) + |u_{n+1}| = p_{n+1}^* - 1.$

(ii) $\sum_{j=1}^{\infty}|u_j|$ je omezený na M.

(Protože $\sum |u_j|$ konverguje stejnoměrně a u_j jsou omezené.)

Tedy z (1) a (2) máme, že $\exists C \in (0,\infty)$, že $\forall n \in \mathbb{N}: |p_n| \le C$ na M.

(iii) nechť $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Volme n_0, aby

$\sum_{n=n_0}^{\infty}|u_n| < \varepsilon$ na M. (3)

nechť $\{n_1, n_2, \dots\}$ je permutace $\{1, 2, \dots\}$ a

$q_m := \prod_{j=1}^{m}(1+u_{n_j})$.

nechť $n \ge n_0$ a m tak velké, aby $\{n_1, \dots n_m\} \supset \{1, \dots, n\}$.

Potom

(4) $|q_m - p_n| = |p_n\left(\prod_{n_j > n}(1+u_{n_j}) - 1\right)| \le$

$\overset{(2)}{\le} |p_n|\left(\prod(1+|u_{n_j}|) - 1\right) \underset{(3)}{\overset{(1)}{\le}} |p_n|(\underbrace{e^{\varepsilon} - 1}_{\le 2\varepsilon}) \le$

$\le 2|p_n|\varepsilon \le 2C\varepsilon.$

(iv) Pokud $n_j = j$, máme $q_n = p_n$ a (4) dává $p_n \rightrightarrows f$ na M. Dále (4) dává pro $n \ge n_0$

$|p_n - p_{n_0}| \le 2\varepsilon |p_{n_0}|$, tedy

$|p_n| \ge (1-2\varepsilon)|p_{n_0}|$

$n \to \infty: \ |f| \ge (1-2\varepsilon)|p_{n_0}|$.

Tedy $f(z_0) = 0 \iff \underset{\uparrow \text{ konečný součin}}{p_{n_0}}(z_0) = 0$

(v) Z (4) máme, že $q_m \rightrightarrows f$ na M.

Důsledek. nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f_n \in \mathcal{H}(G)$ a $f_n \not\equiv 0$ na žádné komponentě G. nechť platí

$$\sum_n |1 - f_n| \overset{loc}{\rightrightarrows} \text{ na } G. \qquad *)$$

Potom

$$f = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$$

konverguje lokálně stejnoměrně na G, $f \in \mathcal{H}(G)$ a platí

$$n_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n_{f_n}(s) \quad \forall s \in G, \qquad (N)$$

kde $n_f(s)$ je násobnost nulového bodu s pro funkci f.

*) Výsledek nekonečného součinu nezávisí na přerovnání.

Důkaz. Bůno G je oblast, stačí ukázat (N): nechť $s \in G$. Protože $f_n \rightrightarrows 1$ na nějakém okolí V bodu s, tak $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $f_n \ne 0$ na V pro každé $n > n_0$. Podle věty:

$$\prod_{n=n_0}^{\infty} f_n \ne 0 \text{ na } V.$$

Tedy platí, že

$$f(s)=\prod_{j=1}^{n_0-1} f_j(s)\underbrace{\Big(\prod_{j=n_0}^{\infty} f_j(s)\Big)}_{\neq 0}$$

a

$$n_f(s)=\sum_{j=1}^{n_0-1} n_{f_j}(s).$$ $\square$

<u>Cvičení</u>. $\frac{f'}{f}=\sum_n \frac{f_n'}{f_n}$ na $G\setminus N_f$

<u>Problém</u>. Nechť $N\subset\mathbb{C}$ je (nekonečná) množina, která nemá v $\mathbb{C}$ hromadné body.

Hledáme $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$, aby $N_f=N$.

1) $N=\{z_1,\dots z_m\}\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$,

$$f(z):=z^k\prod_{j=1}^{m}\Big(1-\frac{z}{z_j}\Big)$$

2) N nekonečná: $0\neq z_j\to\infty$

$$z^k\prod_{j=1}^{\infty}\Big(1-\frac{z}{z_j}\Big)\dots \text{ konvergence?}$$

<u>Lemma</u>. Nechť $\mathcal{E}_0(z):=(1-z)$

$$\mathcal{E}_m(z):=(1-z)\cdot e^{z+\frac{z^2}{2}+\dots+\frac{z^m}{m}}\quad \forall m\in\mathbb{N}.$$

Potom $|1-\mathcal{E}_m(z)|\leq|z|^{m+1},\ |z|\leq 1.$

<u>Důkaz</u>. $1-\underset{\mathcal{E}_m(0)}{\underset{\shortparallel}{1}}-\mathcal{E}_m(z)=-\int_0^z \mathcal{E}_m'(w)\,dw$ (křivkový přes úsečku $\langle 0,z\rangle$)

$$\mathcal{E}_m'(z)=e^{z+\frac{z^2}{2}+\dots+\frac{z^m}{m}}\Big(-1+\underbrace{(1-z)(1+z+\dots+z^{m-1})}_{1-z^m}\Big)=$$

$$=-z^m e^{z+\frac{z^2}{2}+\dots+\frac{z^m}{m}}$$

$$-\mathcal{E}_m'(z)=z^m\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k,\qquad b_0=1,\ b_k\geq 0\ \forall k\in\mathbb{N}.$$

Tedy $1-\mathcal{E}_m(z)=z^{m+1}\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$

a pro $z\neq 0;\ |z|\leq 1$:

$$\Big|\frac{1-\mathcal{E}_m(z)}{z^{m+1}}\Big|\leq\sum_{k=0}^{\infty} b_k=1-\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\mathcal{E}_m(1)}}=1$$ $\square$

<u>Věta</u>. (Weierstrassova faktorizace.)

Nechť $k\geq 0$ je celé a $0\neq z_j\to\infty$. Potom existuje posloupnost $\{m_j\}$ celých nezáporných čísel taková, že

$$f(z):=z^k\prod_{j=1}^{\infty}\mathcal{E}_{m_j}\Big(\frac{z}{z_j}\Big)\qquad (W)$$

konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{C}$, $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ a f má v 0 nulový bod násobnosti k a nenulové nulové body právě v $z_1,z_2,\dots$, přičemž násobnost odpovídá výskytu nulového bodu v posloupnosti $\{z_j\}$.

Navíc vždy lze volit $m_j:=j-1$.

Dále pro každou $g\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$, která má stejné nulové body jako f, existuje $L\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ taková, že $g=fe^L$.

Důkaz. (W) konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{C}$, pokud $\sum_j |1-E_{m_j}(\frac{z}{z_j})|$ konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{C}$ (viz Důsledek), což dle Lemmatu platí v případě, že

$$(\check{R}) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \left|\frac{z}{z_j}\right|^{m_j+1}$$

konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{C}$.

Nechť $r>0$ a $|z|\le r$. Volme j_0, aby

$$\frac{r}{|z_j|} < \frac{1}{2} \qquad \forall j \ge j_0.$$

Je-li $m_j = j-1$, potom

$$\left|\frac{z}{z_j}\right|^j \le \left(\frac{1}{2}\right)^j, \quad |z|\le r \quad a \quad j\ge j_0,$$

tudíž $(\check{R})$ konverguje stejnoměrně na $\{|z|\le r\}$. $\square$

Poznámka. (i) Je-li $\sum_j \frac{1}{|z_j|} < \infty$, lze vzít $m_j = 0 \ \forall j$.

(ii) Je-li $\sum_j \frac{1}{|z_j|^2} < \infty$, lze vzít $m_j = 1 \ \forall j$.

Věta. (Weierstrassova faktorizace pro obecnou otevřenou podmnožinu.)
Nechť $G \subsetneq \mathbb{S}$ je otevřená, $N\subset G$ nemá v G hromadné body a $n: N \to \mathbb{N}$.
Pak existuje $f\in \mathcal{H}(G)$ taková, že $N_f = N$ a $n_f(s) = n(s) \ \forall s\in N$.

Důkaz. Búno: $\infty \in G\setminus N$. Potom $\mathbb{C}\setminus G = \mathbb{S}\setminus G$ je kompakt v $\mathbb{C}$.

1) N je konečná ... máme.

2) N je nekonečná.

Uspořádáme body z N do posloupnosti $\{s_1, s_2, \dots\}$, přičemž každý bod se vyskytuje tolikrát, kolik činí jeho násobnost.

Pro každé $n\in\mathbb{N}$ existuje $t_n \in \overset{\text{kompakt!}}{\widetilde{\mathbb{C}\setminus G}}$ tak, že $|t_n - s_n| = \operatorname{dist}(s_n, \mathbb{C}\setminus G)$.

Potom $|t_n - s_n| \to 0$ (jinak: $\exists \varepsilon>0, \exists \{n_k\}$: $\varepsilon \le |s_{n_k} - t_{n_k}| = \operatorname{dist}(s_{n_k}, \mathbb{C}\setminus G)$, tedy $\{s_{n_k}\}$ má hromadný bod v G $\lightning$)

Položme $z_n := t_n$

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{s_n - t_n}{z - z_n}\right), \quad z\in G. \qquad (\Delta)$$

Stačí ukázat, že (Δ) konverguje lokálně stejnoměrně na G:
nechť $K\subset G$ je kompakt. Potom $\operatorname{dist}(K, \mathbb{C}\setminus G) =: d > 0$.

Volme n_0, aby $\frac{d}{2} > |s_n - t_n| \quad \forall n\ge n_0$.

Je-li $n\ge n_0$ a $z\in K$, potom

$$\left|\frac{s_n - t_n}{z - z_n}\right| < \frac{1}{2} d \cdot \frac{1}{d} = \frac{1}{2},$$

tudíž $\sum \left|\frac{s_n - t_n}{z - z_n}\right|^{n+1}$ konverguje stejnoměrně na K. Dále užijeme Lemma a Důsledek.

$\square$

Věta. Je-li $G \subset \mathbb{C}$ otevřená a $f \in \mathcal{M}(G)$, potom existují $g, h \in \mathcal{H}(G)$ takové, že $f = \frac{g}{h}$.

Důkaz. Nechť P_f je množina všech pólů f. Z Weierstrassovy faktorizace existuje $h \in \mathcal{H}(G)$ taková, že $N_h = P_f$ a $n_h = p_f$ na P_f. Potom $g := f \cdot h$ je holomorfní na G (v bodech z P_f má odstranitelné singularity) a $N_g = N_f$. □

Poznámka. Je-li G otevřená v $\mathbb{C}$, potom $\mathcal{H}(G)$ je asociativní a komutativní okruh.
Je-li G oblast v $\mathbb{C}$, potom $\mathcal{H}(G)$ je obor integrity a $\mathcal{M}(G)$ tvoří podílové těleso $\mathcal{H}(G)$.

Prostor $\mathcal{H}(G)$.

Prostor $C(K)$. Nechť (K, ρ) je metrický kompakt.
$C(K) := \{f : K \to \mathbb{C}\ ;\ f \text{ je spojité}\}$ s normou
$\|f\| = \sup_K |f(z)|$.

Víme: 1) $(C(K), \|\cdot\|)$ je Banachův prostor
2) $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f$ v $C(K) \iff f_n \rightrightarrows f$ na K
3) Arzelà-Ascoli

Prostor $C(G)$. $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená.
Řekneme, že $f_n \to f$ v $C(G)$, pokud $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na G.

Platí: NPJE:
(1) $f_n \to f$ v $C(G)$,
(2) $\forall K$ kompakt v G:
$\|f_n - f\|_K \to 0$ ($\|\cdot\|_K$ je tím pádem seminorma na $C(G)$).

(3) $\|f_n \to f\|_{K_m} \to 0$ pro vyčerpávající spočetný systém $\{K_m\}$.

(4) $\sigma(f_n, f) \to 0$, kde
$\sigma(g, h) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|g-h\|_{K_m}}{1 + \|g-h\|_{K_m}}$ je metrika na $C(G)$.

Definice. (E, τ) je <u>lokálně konvexní prostor</u> (LKP), pokud E lineární prostor nad $\mathbb{C}$ a topologie τ na E je generovaná nějakým systémem P pseudonorem na E (ve smyslu, že τ je topologie nejmenší na E taková, že jsou vůči ní všechny pseudonormy z P spojité.)

Vlastnosti $C(G)$.
1) $(C(G), \sigma)$ je úplný metrický prostor.
2) $(C(G), \tau)$ je LKP, kde τ je topologie generovaná systémem pseudonorem $\{\|\cdot\|_K\ ;\ K \text{ komp. v } G\}$.

Poznámka. $U \subset C(G)$ je okolí $f \in C(G)$, právě když $\exists \varepsilon > 0$, $\exists K$ kompakt v G tak, že
$U^f_{K,\varepsilon} := \{g \in C(G) : \|g - f\|_K < \varepsilon\} \subset U$.
„$\Leftarrow$" $f \in U^f_{K,\varepsilon}$ je ot. v $C(G)$.
„$\Rightarrow$" $\exists m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m > 0$ a kompakty $K_1, \dots K_m \subset G$, že $U^f_{K,\varepsilon} \subset \bigcap_{j=1}^{m} U^f_{K_j, \varepsilon_j} \subset U$, kde
$K := \bigcup_{j=1}^{m} K_j$; $\varepsilon := \min\{\varepsilon_j, \dots \varepsilon_m\}$

Podobně to platí i pro uzavřený podprostor $\mathcal{H}(G)$ prostoru $C(G)$.

<u>Označení</u>. Nechť (E,τ) je LKP a τ je generována systémem pseudonorem P.

Řekneme, že $F \subset E$ je <u>omezená</u>, je-li F omezená vůči každé pseudonormě $p \in P$.

Označíme $E^* := \{L : E \to \mathbb{C}; L$ je lineární spojitý$\}$

Hlavní cíl: $(\mathcal{H}(G))^*$

<u>Věta</u> (Montel.)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Jsou-li $\{f_n\} \subset \mathcal{H}(G)$ lokálně stejně omezené na G, potom existuje vybraná $\{f_{n_k}\}$, která konverguje lokálně stejnoměrně na G.

<u>Důsledek</u>. $F \subset \mathcal{H}(G)$ je omezená & uzavřená $\Leftrightarrow$ F kompakt

<u>Poznámky</u>. (i) Podobně v $\mathbb{R}^n$

(ii) Je-li X Banach, potom uzavřená jednotková koule je kompaktní, právě když $\dim X < \infty$.

(iii) V $C(G)$ to neplatí!

<u>Důkaz</u> (Věty.)

(1) Nechť $r > 0$ je takové, aby $\overline{U(z_0, 2r)} \subset G$ a $\varphi(t) := z_0 + 2re^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.
Nechť $z_1, z_2 \in \overline{U(z_0, r)}$.
Potom z Cauchyho vzorce:

$$f_n(z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f_n(z)}{z - z_j}\, dz$$

Tedy

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\varphi f_n(z) \cdot \left(\frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2} \right) dz \right|$$

$$\le \frac{2\pi \cdot 2r}{2\pi} \; M \cdot \frac{|z_1 - z_2|}{r^2}, \text{ protože} \qquad (*)$$

$$\left| \frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2} \right| = \left| \frac{z_1 - z_2}{(z-z_1)(z-z_2)} \right| \le \frac{|z_1 - z_2|}{r^2}.$$

$M > 0$ takové, že $|f_n| \le M$ na $\langle \varphi \rangle$ $\forall n$.

Tedy z $(*)$ f_n jsou stejně spojité, z předpokladu stejně omezené $\overset{AA}{\Longrightarrow}$ $\exists f_{n_k}$ vybraná posloupnost, která na $U(z_0, r)$ konverguje stejnoměrně.

(2) Lindelöfova vlastnost:
Množina G může být pokryta spočetně mnoha $U(z_1), U(z_2), \dots$, která mají vlastnost z (1).

Diagonální výběr z $\{f_n\}$:

1) Vybereme $\{f_{n_{k^1}}\} \subset \{f_n\}$: $f_{n_{k^1}} \rightrightarrows$ na $U(z_1)$

2) " $\{f_{n_{k^2}}\} \subset \{f_{n_{k^1}}\}$: $f_{n_{k^2}} \rightrightarrows$ na $U(z_2)$

Nakonec zkonstruujeme posloupnost $\{f_{n_{1^1}}, f_{n_{2^2}}, \dots\}$, která konverguje stejnoměrně na každém okolí $U(z_i)$, tedy konverguje lokálně stejnoměrně na G.

$\square$

Duál k $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Označení: $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$

nechť $L \in \mathcal{H}^*(\mathbb{D})$, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \; z \in \mathbb{D} \text{ a } R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \geq 1.$$

Dále

$$L(f) = L\Big(\sum_0^{\infty} a_n z^n\Big) = L\Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k L(z^k) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n L(z^n) = \sum_0^{\infty} a_n b_n, \text{ kde } b_n := L(z^n).$$

Pokud $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} < 1$, potom řada $\sum a_n b_n$ $(**)$ konverguje pro každou posloupnost $\{a_n\}$, pro kterou $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$.

nechť $\limsup \sqrt[n]{|b_n|} \geq 1$.

(a) je-li — " — > 1, potom pro $a_n := 1 \; \forall n$ je $(**)$ divergentní.

(b) je-li — " — $= 1$, $\exists \{b_{n_k}\} : 0 \neq \sqrt[n_k]{|b_{n_k}|} \longrightarrow 1$.

Položíme $a_n := \frac{1}{b_{n_k}}$, $n = n_k$

$:= 0$, jinak

Závěr: je-li $L \in \mathcal{H}^*(\mathbb{D})$, potom $\exists \{b_n\}$ taková, že $\limsup \sqrt[n]{|b_n|} < 1$ a

$(\triangle)$ $L(f) = \sum_0^{\infty} a_n b_n$; $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$.

navíc $b_n := L(z^n)$, $n \geq 0$.

Integrální tvar.

Označme $r := \limsup \sqrt[n]{|b_n|}$,

definujeme $\lambda(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^{n+1}}$.

Zřejmě $\lambda \in \mathcal{H}(\mathbb{S} \setminus \overline{U(0,r)})$, dále $\lambda(\infty) = 0$, $\lambda^{(n+1)}(\infty) =: b_n (n+1)!$

$$\lambda^{(n+1)}(\infty) = \Big(\lambda\big(\tfrac{1}{z}\big)\Big)^{(n+1)}(0)$$

nechť $R \in (r, 1)$ a $\varphi(t) := Re^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Potom pro $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$; $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$ máme

$$2\pi i\, L(f) \overset{?}{=} \int_\varphi f(z)\lambda(z)\,dz = \int_\varphi \Big(\sum_0^{\infty} a_n z^n\Big)\Big(\sum_0^{\infty} \frac{b_m}{z^{m+1}}\Big)\,dz =$$

$$= \int_\varphi \sum_{m,n=0}^{\infty} a_n b_m z^{n-m-1}\,dz = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_n b_m \int_\varphi z^{n-m-1}\,dz =$$

$$= \sum_0^{\infty} a_n b_n \cdot 2\pi i$$

Označení: nechť $A \subset \mathbb{S}$, f_1, f_2 jsou holomorfní na A (tj. holomorfní na nějaké otevřené množině v $\mathbb{C}$ obsahující A.)

Řekneme, že $f_1 \sim f_2$, existují-li otevřené U_1 a U_2 takové, že $A \subset U_1 \cap U_2$, $f_1 \in$ „$\mathcal{H}(U_1)$", $f_2 \in$ „$\mathcal{H}(U_2)$" a $f_1 = f_2$ v $U_1 \cap U_2$.

Označíme $\mathcal{H}(A) := \{[f]; f \text{ je holom. na } A\}$ (třídy ekvivalence.)

Závěr. (i) je-li $L \in \mathcal{H}^*(\mathbb{D})$, potom existuje $\lambda \in \mathcal{H}_0(\mathbb{S} \setminus \mathbb{D})$; $:= \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{S} \setminus \mathbb{D});\, f(\infty) = 0\}$ takové, že

$(\square)$ $L(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi f(z)\lambda(z)\,dz$; $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Navíc

$$\frac{\lambda^{(n+1)}(\infty)}{(n+1)!} = L(z^n), \; n \geq 0 \text{ a}$$

$\lambda(w) := L\left(\frac{1}{w-z}\right), \ |w| \geq 1$

Skutečně pro každé w, $|w| \geq 1$, máme

$$L\left(\frac{1}{w-z}\right) = L\left(\frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{z}{w}\right)}\right) = L\left(\sum_0^\infty \frac{z^n}{w^{n+1}}\right) =$$

$$= \sum_0^\infty \frac{L(z^n)}{w^{n+1}} = \lambda(w).$$

(ii) Je-li L tvaru ($\square$), potom $L \in \mathcal{H}^*(\mathbb{D})$.

<u>$\mathcal{H}^*(\mathbb{D}) \simeq \mathcal{H}_0(\mathbb{S} \setminus \mathbb{D})$</u>

<u>Cíl</u>: Podobný vztah pro obecnou množinu.

nechť $G = \bigcup_{j=1}^{n} D_j$, kde $D_j = U(z_j, r_j)$ a $D_j \cap D_k \neq 0$ pro $k \neq j$. ($*$)

nechť $L \in \mathcal{H}^*(G)$. Potom položme pro každé $j = 1, \dots N$:

$L_j(f) := L(\tilde{f})$, $f \in \mathcal{H}(D_j)$, $\tilde{f} := f_j$ na D_j
$:= 0$ na D_k, $k \neq j$

Potom (1) $Lf = \sum_{j=1}^{N} L_j(f|_{D_j})$, $f \in \mathcal{H}(G)$

Pro každé j $\exists \lambda_j \in \mathcal{H}_0(\mathbb{S} \setminus D_j)$ a $\exists \rho_j \in (0, r_j)$ tak, že pro $\varphi_j := z_j + \rho_j e^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ platí

(2) $L_j(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_j} f(z) \cdot \lambda_j(z)\, dz$, $f \in \mathcal{H}(D_j)$,

navíc

$$\frac{\lambda_j^{(n+1)}(\infty)}{(n+1)!} = L_j(z^n), \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Je-li $f \in \mathcal{H}(G)$, potom

$$L(f) \overset{(1),(2)}{=\!=} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_j} f(z) \lambda_j(z)\, dz \overset{(?)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) \lambda(z)\, dz, \text{ kde}$$

$$\Gamma = \{\varphi_1, \dots \varphi_N\} \text{ a } \lambda := \sum_{j=1}^{N} \lambda_j$$

Tedy

(3) $L(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) \lambda(z)\, dz$.

(?) platí, protože pro $k \neq j$:

$$\int_{\varphi_j} \underbrace{f(z) \lambda_k(z)}_{\in \mathcal{H}(D_j)} dz = 0 \quad (\text{Cauchy})$$

navíc $\frac{\lambda^{(n+1)}(\infty)}{(n+1)!} = L(z^n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. (4)

<u>Závěr</u>. Pro každé $L \in \mathcal{H}^*(G)$ $\exists! \lambda \in \mathcal{H}_0(\mathbb{S} \setminus G)$ takové, že platí (3).

<u>Hahn - Banachova věta.</u>

V dalším bude E buď $C(G)$, nebo $\mathcal{H}(G)$, kde $G \subset \mathbb{C}$ je ot..
Prostor E chápeme jako LKP s topologií generovanou $\|\cdot\|_K$, $K \subset G$ kompakt.

<u>Lemma</u>. $L \in E^*$, právě když $\exists$ kompakt $K \subset G$ a $\exists M \in \langle 0, \infty)$ tak, že

$|L(f)| \leq M \|f\|_K$, $f \in E$.

<u>Důkaz</u>. „$\Leftarrow$“ $\|\cdot\|_K$ je spojitá.

„$\Rightarrow$“ Zřejmě $U := L^{-1}(\mathbb{D})$ je okolí 0 v E.
Potom $\exists$ kompakt $K \subset G$ a $\varepsilon > 0$ tak, že

$U_{K,\varepsilon}(0) := \{f \in E;\ \|f\|_K < \varepsilon\} \subset U$.

Je-li tedy $0 \neq f \in E$, potom $\left|L\left(\frac{f}{\|f\|_K} \cdot \frac{\varepsilon}{2}\right)\right| < 1$

$\Rightarrow |L(f)| < \frac{2}{\varepsilon} \|f\|_K$ $\square$

Věta. (Hahn–Banach.)

Nechť A je lineární podprostor prostoru E.

Potom

(i) je-li $L \in A^*$, potom $\exists \tilde{L} \in E^*$, že $\tilde{L}|_A = L$,

(ii) je-li A uzavřený a $0 \neq b \in E \setminus A$, potom existuje $L \in E^*$ tak, že $L(b) = 1$ a $L = 0$ na A,

(iii) $\overline{A} = E$, právě když ($L \in E^*$, $L = 0$ na $A \Rightarrow L = 0$ na E).

Důkaz. (i) Hahn–Banach, algebraická verze

(ii)+(iii) se dokáže jako v případě NLP. $\square$

Věta. Nechť G je konečné disjunktní sjednocení kruhů v $\mathbb{C}$ jako v $(*)$. Potom pro $\forall f \in \mathcal{H}(G)$ $\exists$ polynomy P_n takové, že $P_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na G.

Důkaz. Nechť $P := \mathrm{Lin}\{1, z, \dots, z^n, \dots\}$ je prostor polynomů. Potom $P \subset \mathcal{H}(G)$.

Nechť $L \in \mathcal{H}^*(G)$ a $L = 0$ na P.

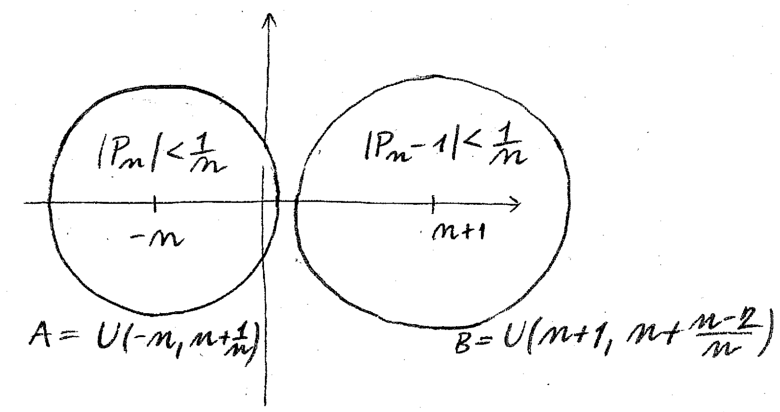
Víme: $\exists \lambda \in \mathcal{H}_0(\mathbb{S} \setminus G)$ takové, že platí (3).

Ze (4) víme, že $\lambda^{(n)}(\infty) = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, a tedy $\lambda \equiv 0$. Tudíž $L = 0$ na $\mathcal{H}(G)$ a z H-B máme $\overline{P} = \mathcal{H}(G)$. $\square$

Příklad. Existují polynomy P_n takové, že

$$P_n \to 0 \ \text{v} \ \{\operatorname{Re} z \le 0\}$$

$$\text{a} \ P_n \to 1 \ \text{v} \ \{\operatorname{Re} z > 0\}$$



$\exists f$ holomorfní tak, že $f|_A = 0$, $f|_B = 1$

… použijeme aproximaci z předešlé věty.

Příklad. Birkhoff: univerzální celá funkce.

$\exists f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ taková, že $\overline{\{\tau_\gamma f, \gamma \in \mathbb{C}\}} = \mathcal{H}(\mathbb{C})$, kde $\tau_\gamma f(z) := f(z - \gamma)$.

Jinak řečeno:

$\forall g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})\ \exists \{\gamma_n\} \subset \mathbb{C}: \tau_{\gamma_n} f \overset{loc}{\rightrightarrows} g$ na $\mathbb{C}$.

Příklad. Nechť $M := \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D});\ \lim\limits_{r \to 1-} f(re^{i\theta})$ neexistuje pro žádné $\theta \in \mathbb{R}\}$

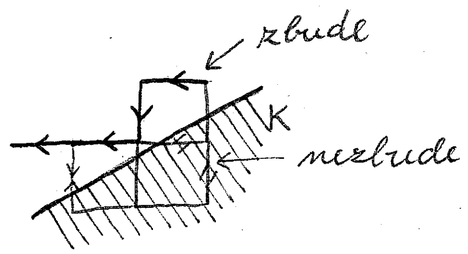
Potom $\mathcal{H}(\mathbb{D}) \setminus M$ je 1. kategorie v úplném metrickém prostoru $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Věta. (Cauchyho vzorec pro kompakt.)
nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a K je kompakt v G. Potom existuje cyklus Γ v G takový, že $K \subset \operatorname{Int} \Gamma \subset G$ a $\operatorname{ind}_\Gamma(z_0) = 1 \ \forall z_0 \in \operatorname{Int} \Gamma$ a platí

1) $\forall f \in \mathcal{H}(G): \int_\Gamma f = 0$,

2) $\forall f \in \mathcal{H}(G): f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz$, $a \in \operatorname{Int} \Gamma$.

Důkaz. Volme $0 < \delta < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(K, \mathbb{C} \setminus G)$. Nechť $Q_{m,n}$ je uzavřený čtverec se stranami rovnoběžnými s osami, které mají délku δ, a takový, že $m\delta + in\delta$ je levý dolní roh $Q_{m,n}$, kde $m, n \in \mathbb{Z}$.
Označme $Q^* := \{Q_{m,n};\ Q_{m,n} \cap K \neq \emptyset\}$.
Zřejmě Q^* je konečný. Označíme-li
$\mathcal{U} = (\bigcup Q^*)^\circ$, potom
$K \subset \mathcal{U} \subset \bigcup Q^* \subset G$.
Dále $\partial Q_{m,n}$ chápeme jako kladně orientovanou křivku.
Nechť Γ je systém hran $\Gamma_1, \dots \Gamma_n$ čtverců z Q^*, které zbudou, vyřadíme-li ty, které tam budou $2\times$ s opačnou orientací!



Zřejmě lze chápat Γ jako cyklus a $\mathcal{U} = \bigcup Q^* \setminus \langle \Gamma \rangle$.

(a) Nechť $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom
$$\int_\Gamma f = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_j} f = \underbrace{\sum_{Q^*} \int_{\partial Q_{m,n}} f}_{=0} = 0$$
Pro daný čtvereček je f holomorfní na nějakém větším okolí čtverečku $\Rightarrow$ Cauchyho věta pro hvězdovité konvexní oblast.

(b) Nechť $f \in \mathcal{H}(G)$ a $a \in \mathcal{U}$.

(i) nechť $a \in (\tilde{Q}_{m,n})^\circ$, kde $\tilde{Q}_{m,n} \in Q^*$.
Potom
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \sum_{Q_{m,n} \in Q^*} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_{m,n}} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = f(a)$$
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_{m,n}} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \begin{cases} f(a) & Q_{m,n} = \tilde{Q}_{m,n} \ (\text{RV}) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

(ii) nechť $a \in \partial \tilde{Q}_{m,n}$, $\tilde{Q}_{m,n} \in Q^*$, $a \notin \langle \Gamma \rangle$
Existuje $\{a_n\} \subset (\tilde{Q}_{m,n})^\circ : a_n \to a$.
Podle (i) máme
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a_n}\, dz = f(a_n)$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz = f(a)$$

(c) $\mathcal{U} = \operatorname{Int} \Gamma$:
nechť $a \in \mathbb{C} \setminus (\mathcal{U} \cup \langle \Gamma \rangle) = \mathbb{C} \setminus \bigcup Q^*$.
Jako v (a) snadno ukážeme, že $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$.
Je-li $a \in \mathcal{U}$, potom z (b) máme (pro $f \equiv 1$), že $\operatorname{ind}_\Gamma a = 1$.

$\square$

Popis $\mathcal{H}^*(G)$.

Věta. Je-li $G \subset \mathbb{C}$ otevřená, potom $\mathcal{H}^*(G) \simeq \mathcal{H}_0(\mathbb{S} \setminus G)$.

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $L \in \mathcal{H}^*(G)$.

(1) Existuje kompakt K v G a ex. $L_1 \in C^*(K)$ tak, že $L(f) = L_1(f|K)$, $f \in \mathcal{H}(G)$.

Důkaz (1). Existuje $K \subset G$ kompakt a $c \geq 0$ tak, že
$|L(f)| \leq c\|f\|_K$, $f \in \mathcal{H}(G)$.
H-B: $\exists \tilde{L}_1 \in C^*(G) : |\tilde{L}_1(f)| \leq c\|f\|_K$, $f \in C(G)$

Položme pro každou $f \in C(K)$:

$L_1(f) := \tilde{L}_1(\tilde{f})$, kde $\tilde{f} \in C(G)$ a $\tilde{f}|_K = f$.

Definice L_1 je korektní, protože:

- Tietze: $\forall f \in C(K)\ \exists \tilde{f} \in C(G) : \tilde{f} = f$ na K
- jsou-li $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in C(G)$ a $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ na K, potom $|\tilde{L}_1(\tilde{f}_1) - \tilde{L}_1(\tilde{f}_2)| = |\tilde{L}_1(\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2)| = 0$. □

Poznámka. Z Rieszovy věty plyne, že pro $L_1 \in C^*(K)$ $\exists!$ komplexní borelovská míra μ na K taková, že
$$L_1(f) = \int_K f\,d\mu, \quad f \in C^*(K).$$

(2) Z předešlé věty máme cyklus Γ v G takový, že $K \subset \operatorname{Int}\Gamma \subset G$; $\operatorname{ind}_\Gamma a = 1\ \forall a \in \operatorname{Int}\Gamma$ a platí Cauchyho vzorec:
Nechť $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom
$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z_2)}{z_2 - z_1}\,dz_2\ ;\ z_1 \in K.$$

Označme $L_2(f) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z_2)\,dz_2$, $f \in C(\langle\Gamma\rangle)$ a
$$F(z_1, z_2) := \frac{f(z_2)}{z_2 - z_1}.$$

Zřejmě $L_2 \in C^*(\langle\Gamma\rangle)$, $F \in C(K \times \langle\Gamma\rangle)$ a
$$f(z_1) = L_2(F(z_1, z_2)),\ z_1 \in K.$$

(3) Máme
$$L(f) \overset{(1)}{=} L_1(f(z_1)) \overset{(2)}{=} L_1(L_2(F(z_1,z_2))) \overset{FV}{=}$$
$$= L_2(L_1(F(z_1,z_2))),\ \text{tudíž}$$

(□) $L(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z_2)\Lambda(z_2)\,dz_2$, kde

(*) $\quad \Lambda(z_2) := L_1\left(\frac{1}{z_2 - z_1}\right)$, $z_2 \in \mathbb{C} \setminus K$

(4) $\Lambda \in \mathcal{H}_0(\mathbb{S} \setminus K)$ a

(a) $\frac{\Lambda^{(k+1)}(\infty)}{(k+1)!} = L(z^k)$, $k = 0, 1, \dots$

(b) $\frac{\Lambda^{(k)}(z_0)}{k!} = -L\left(\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}\right)$, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$, $k = 0, 1, \dots$

Důkaz. (b) nechť $u_0 \notin K$ a $r > 0$ takové, že $U(u_0, r) \cap K = \emptyset$. Potom $\forall u \in U(u_0, r)$:
$$\Lambda(u) \overset{(*)}{=} L_1\left(\frac{1}{u - z_1}\right) = L_1\left(-\sum_{k=0}^\infty \frac{(u-u_0)^k}{(z_1-u_0)^{k+1}}\right) = ⊛$$
$$\frac{1}{u - z_1} = \frac{1}{(u-u_0)-(z_1-u_0)} = -\frac{1}{(z_1-u_0)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{u-u_0}{z_1-u_0}} =$$
$$= -\sum_{k=0}^\infty \frac{(u-u_0)^k}{(z_1-u_0)^{k+1}}$$
$$⊛ = -\sum_{k=0}^\infty L_1\left(\frac{1}{(z_1-u_0)^{k+1}}\right)(u-u_0)^k$$
Speciálně pro $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$:
$$\frac{\Lambda^{(k)}(z_0)}{k!} = -L_1\left(\frac{1}{(z_1-z_0)^{k+1}}\right) \overset{(1)}{=} -L\left(\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}\right).$$

(a) Nechť $U(\infty,\delta)\cup\{\infty\}$ je disjunktní s K. Je-li $u\in P(\infty,\delta)$, potom

$$\Lambda(u)=L_1\left(\frac{1}{u-z_1}\right)=L_1\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_1^k}{u^{k+1}}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}L_1(z_1^k)\cdot\frac{1}{u^{k+1}}$$

Speciálně

$$\frac{\Lambda^{(k+1)}(\infty)}{(k+1)!}=L_1(z_1^k)\overset{(1)}{=}L(z^k),$$ protože.

(5) Λ je určeno jednoznačně jako prvek z $\mathcal{H}_0(\mathbb{S}\setminus G)$.

<u>Lemma</u>. Nechť $G\subset\mathbb{C}$ je otevřená a K je kompakt v G. Potom $\exists$ kompakt K_1 takový, že $K\subset K_1\subset G$ a každá komponenta $\mathbb{S}\setminus K_1$ obsahuje komponentu $\mathbb{S}\setminus G$.

<u>Důkaz</u>. Existuje $n\in\mathbb{N}$ takové, že $K\subset K_1:=\overline{U(0,n)}\cap$ $\cap\{z\in\mathbb{C};\ \operatorname{dist}(z,\mathbb{C}\setminus G)\geq\frac{1}{n}\}$.
Zřejmě $\mathbb{S}\setminus K_1=U(\infty,\frac{1}{n})\cup\bigcup_{z\in\mathbb{C}\setminus G}U(z,\frac{1}{n})$
Nechť V je komponenta $\mathbb{S}\setminus K_1$. Potom pro nějaké $z_0\in\mathbb{S}\setminus G$ máme $U(z_0,\frac{1}{n})\subset V$.
Je-li W komponenta $\mathbb{S}\setminus G$ obsahující z_0, pak $W\subset V$. □

<u>Důkaz (5)</u>. Nechť $\Lambda_1,\Lambda_2\in\mathcal{H}_0(\mathbb{S}\setminus G)$, pro která platí (□), (4)(a) a (4)(b). Existuje kompakt $K\subset G$ takový, že $\Lambda_1,\Lambda_2\in\mathcal{H}_0(\mathbb{S}\setminus K)$.
Podle lemmatu můžeme předpokládat, že každá komponenta $\mathbb{S}\setminus K$ protíná $\mathbb{S}\setminus G$. Nechť V je komponenta $\mathbb{S}\setminus K$, speciálně V je oblast. Je-li $z_0\in(\mathbb{S}\setminus G)\cap V$, potom z (a), (b) máme $\Lambda_1^{(k)}(z_0)=\Lambda_2^{(k)}(z_0)$ $\forall k\in\mathbb{N}_0$. Z věty o jednoznačnosti dostaneme, že $\Lambda_1=\Lambda_2$ na V, tedy
$\Lambda_1=\Lambda_2$ na $\mathbb{S}\setminus K$. □

<u>Lemma</u> („Fubini").
Nechť $K_1,K_2\subset\mathbb{C}$ jsou kompakty, $L_j\in C^*(K_j)$, $j=1,2$, a $F\in C(K_1\times K_2)$.
Potom platí, že $L_1(L_2(F(z_1,z_2)))\overset{(\Delta)}{=}L_2(L_1(F(z_1,z_2)))$.

<u>Důkaz</u>. (náznak.) Je jasné, že (Δ) platí pro funkce $F(z_1,z_2)=f(z_1)\cdot g(z_2)$, kde $f\in C(K_1)$, $g\in C(K_2)$.
Stone-Weierstrass: Lineární obal funkcí typu $f(z_1)g(z_2)$ je hustý v $C(K_1\times K_2)$. □

<u>Označení</u>. Nechť $E\subset\mathbb{S}$ a $m: E\to\mathbb{N}\cup\{\infty\}$.
($m(e)$ je násobnost bodu $e\in E$.)
Řekneme, že (E,m) má <u>hromadný bod</u> e, pokud e je hromadný bod množiny E nebo $m(e)=\infty$.
Označme $\mathcal{F}(E,m)$ (nejmenší) systém funkcí, pro který platí:
(i) Je-li $e\in E\cap\mathbb{C}$, $m(e)<\infty$, potom $\frac{1}{z-e}\in\mathcal{F}(E)$,
(ii) — " — , $m(e)=\infty$, potom $\frac{1}{(z-e)^k}\in\mathcal{F}(E)$ $\forall k\in\mathbb{N}$.
(iii) Je-li $m(\infty)=\infty$, potom $z^k\in\mathcal{F}(E,m)$ $\forall k\in\mathbb{N}_0$.
$m(\infty)<\infty$, potom nic.

Věta (Runge).
Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $E \subset \mathbb{S} \setminus G$ a $m : E \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Má-li (E, m) hromadný bod v každé komponentě $\mathbb{S} \setminus G$, tak lineární obal $F(E, m)$ je hustý v $\mathcal{H}(G)$.

Důkaz. Nechť $L \in \mathcal{H}^*(G)$ a $L = 0$ na $F(E, m)$. Chceme ukázat, že $L = 0$ na $\mathcal{H}(G)$. Potom z H-B. věty dostaneme zbytek.
Nechť $\Lambda \in \mathcal{H}_0(\mathbb{S} \setminus G)$ reprezentuje L.
Je-li $e \in E \cap \mathbb{C}$, $m(e) < \infty$, potom $\Lambda(e) = -L\left(\frac{1}{z-e}\right) = 0$.
Je-li $e \in E \cap \mathbb{C}$, $m(e) = \infty$, potom

$$\frac{\Lambda^{(k)}(e)}{k!} = -L\left(\frac{1}{(z-e)^{k+1}}\right) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Je-li $m(\infty) = \infty$, potom

$$\frac{\Lambda^{(k+1)}(\infty)}{(k+1)!} = L(z^k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Chceme ukázat, že $\Lambda \equiv 0$. Existuje kompakt $K \subset G$ takový, že
(i) $\Lambda \in \mathcal{H}_0(\mathbb{S} \setminus K)$,
(ii) Každá komponenta $\mathbb{S} \setminus K$ obsahuje komponentu $\mathbb{S} \setminus G$.
(iii) Nechť V je komponenta $\mathbb{S} \setminus K$.
Speciálně V je oblast a z (ii) máme, že existuje $e \in V$, který je hromadným bodem (E, m).

Z věty o jednoznačnosti máme $\Lambda \equiv 0$ na V, tedy na $\mathbb{S} \setminus K$. □

Věta (Runge, klasická verze.)
Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f \in \mathcal{H}(G)$.
(a) Potom existují rac. funkce R_m s póly mimo G takové, že $R_m \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na G.
(b) Je-li navíc $\mathbb{S} \setminus G$ souvislá, potom existují polynomy P_n takové, že $P_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na G.

Důkaz. (b). Nechť $E = \{\infty\}$ a $m(\infty) = \infty$. Potom $F(E, m) = \{1, z, z^2, \dots\}$. Dle předešlé věty jsou polynomy husté v $\mathcal{H}(G)$.
(a). Nechť $E \subset \mathbb{S} \setminus G$ obsahuje alespoň jeden bod z každé komponenty $\mathbb{S} \setminus G$.
Položme $m \equiv \infty$ na E. Potom z předchozí věty je $\operatorname{Lin}(F(E, m))$ hustý v $\mathcal{H}(G)$.
Zřejmě platí, že $\operatorname{Lin}(F(E, m)) \subset \{$rac. fce s póly mimo $G\}$. □

Věta. (Cauchy pro jednoduše souvislou množinu)
Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $\mathbb{S} \setminus G$ je souvislá.
Je-li $f \in \mathcal{H}(G)$ a φ je uzavřená křivka v G, potom $\int_\varphi f = 0$.

Důkaz. Runge: $\exists$ polynomy $P_n : P_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na G. Tedy

$$0 = \int_\varphi P_n \to \int_\varphi f.$$

□

Věta. (Cauchy pro cykly.)
Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, Γ je cyklus v G, tj. $\langle \Gamma \rangle \subset G$. Potom platí

(CV) $\int_\Gamma f = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}(G)$, právě když $\operatorname{Int} \Gamma \subset G$.

Důkaz. „$\Rightarrow$": Je-li $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$, potom

$$f(z) := \frac{1}{z - z_0} \in \mathcal{H}(G) \text{ a z (CV):}$$

$$\operatorname{ind}_\Gamma z_0 := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f = 0$$

„$\Leftarrow$": Nechť $f \in \mathcal{H}(G)$. Z Rungeho věty existují rac. funkce R_n s póly mimo G tak, že $R_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na G, tudíž

$$0 \overset{(?)}{=} \int_\Gamma R_n \to \int_\Gamma f = 0$$

nechť $\Gamma = \{\varphi_1, \dots \varphi_m\}$, kde φ_i jsou uzavřené křivky v G.

Potom

$$\int_\Gamma R_n \overset{def}{=} \sum_{i=1}^m \int_{\varphi_i} R_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RV pro} \\ \text{„hvězdovitě konv." oblast } \mathbb{C}}}{=} 2\pi i \sum_{i=1}^m \sum_{R_n(s)=\infty} \operatorname{res}_s R_n \cdot \operatorname{ind}_{\varphi_i} s =$$

$$= 2\pi i \sum_{R_n(s)=\infty} \sum_{i=1}^m \operatorname{res}_s R_n \underbrace{\operatorname{ind}_\Gamma s}_{\substack{\| \\ 0, \\ \text{neboť } s \notin G}} = 0$$

$\square$

Charakterizace jednoduché souvislosti.

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Pak NTJE:

(JS1) Je-li φ uzavřená křivka v G, potom $\operatorname{Int} \varphi \subset G$;

(JS2) $\mathbb{S} \setminus G$ je souvislá (naše definice j. souvislosti);

(JS3) $\forall f \in \mathcal{H}(G)\ \exists$ polynomy P_n : $P_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na G;

(JS4) $\forall f \in \mathcal{H}(G)\ \forall$ uz. křivku φ v G: $\int_\varphi f = 0$;

(JS5) $\forall f \in \mathcal{H}(G)\ \exists F \in \mathcal{H}(G) : F' = f$

(JS6) $\forall f \in \mathcal{H}(G)$, $f \neq 0$ na G, $\exists g \in \mathcal{H}(G) : f = e^g$

(JS7) $\forall f \in \mathcal{H}(G)$, $f \neq 0$ na G, $\exists h \in \mathcal{H}(G) : f = h^2$

Důkaz.

(JS1) $\Rightarrow$ (JS2): Nepřímo. Nechť $\mathbb{S} \setminus G$ není souvislá. Pak existují uzavřené neprázdné disjunktní K, L takové, že $\mathbb{S} \setminus G = K \cup L$. Nechť $\infty \notin K$. Potom K je kompakt v $\mathbb{C}$, $G_0 := G \cup K$ je otevřená v $\mathbb{C}$ a dle Cauchyho vzorce pro kompakt existuje cyklus Γ v G_0 tak, že $K \subset \operatorname{Int} \Gamma \subset G_0$.
Nechť $z_0 \in K$. Protože $\operatorname{ind}_\Gamma z_0 \neq 0$, musí existovat uz. křivka $\varphi \in \Gamma$ taková, že $\operatorname{ind}_\varphi z_0 \neq 0$. Ale $z_0 \in \operatorname{Int} \varphi \cap \mathbb{C} \setminus G$ a φ je uz. křivka v G, tedy neplatí (JS1).

(JS2) $\Rightarrow$ (JS3) viz polynomiální Rungeho větu.

(JS3) $\Rightarrow$ (JS4) už dříve.

(JS4) $\Leftrightarrow$ (JS5) zimní semestr.

(JS5) $\Rightarrow$ (JS6): ukázali jsme (JS6) za předpokladu, že $\mathbb{S} \setminus G$ je souvislá, ale v důkazu jsme užili pouze (JS5)

(JS6) $\Rightarrow$ (JS7) snadné, stačí $h := e^{\frac{1}{2}g}$

„Správná definice" jednoduché souvislosti

Definice. Řekneme, že dvě spojité uzavřené křivky $\varphi, \psi : \langle 0,1\rangle \longrightarrow G$ jsou homotopické v G, existuje-li spojitá $H : \langle 0,1\rangle^2 \longrightarrow G$ taková, že
$$\varphi_0 = \varphi,\ \varphi_1 = \psi \ \text{ a } \ \varphi_s(0) = \varphi_s(1) \ \forall s \in \langle 0,1\rangle,$$
kde $\varphi_s(t) := H(s,t)$.

(JS8) Každá spojitá uzavřená křivka φ v G je homotopická s konstantní křivkou (konstantní křivka = bod)

Úmluva. Všechny křivky budou definovány na $\langle 0,1\rangle$, nebude-li řečeno jinak.

Příklady. 1) 

nechť $G \in \mathbb{C}$ je hvězdovitě konvexní oblast. Potom platí (JS8).

nechť z_0 je „střed hvězdovitosti" G.
nechť φ je spojitá uzavřená křivka v G.
Potom stačí uvážit
$$H(s,t) := (1-s)\varphi(t) + s z_0$$

2) nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina splňující (JS8). Je-li G homeomorfní s Ω, potom má G také vlastnost (JS8)

nechť $h : G \overset{na}{\to} \Omega$ je homeomorfismus.
nechť φ je uzavřená spojitá křivka v G.
Označme $\tilde{\varphi} := h \circ \varphi$. Potom $\tilde{\varphi}$ je v Ω homotopická s konstantní křivkou, a tedy φ je homotopická s konst. křivkou.

(JS7) $\Rightarrow$ (JS8): nechť φ je spojitá uz. křivka v G. Označme G_0 komponentu G, ve které leží celá křivka φ.

(i) je-li $G_0 = \mathbb{C}$, pak dle Příkladu 1) platí (JS8)

(ii) nechť $G_0 \subsetneq \mathbb{C}$.
Riemannova věta (bude): je-li $\emptyset \neq G_0 \subsetneq \mathbb{C}$ oblast s vlastností (JS7), potom existuje prosté holomorfní zobrazení $h : G_0 \overset{na}{\longrightarrow} \mathbb{D}$, kde $\mathbb{D} := U(0,1)$.
Speciálně G_0 je homeomorfní s $\mathbb{D}$.
Podle Příkladů 1) a 2) a Riemannovy věty máme, že (JS8) platí.

Zbývá dokázat, že (JS8) $\Rightarrow$ (JS1):

(JS8) $\Rightarrow$ (JS1): Zřejmě každá konstantní křivka ψ v G má $\operatorname{Int}\psi = \emptyset$. To znamená, že stačí ukázat:

Věta. Jsou-li φ, ψ spojité uzavřené křivky v G, které jsou v G homotopické, pak
$$\operatorname{ind}_\varphi z_0 = \operatorname{ind}_\psi z_0,\quad z_0 \in \mathbb{C} \setminus G.$$

Lemma. Jsou-li $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ spojité uzavřené křivky, $\bar{\varphi}, \bar{\psi} : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, kde $z_0 \in \mathbb{C}$, a platí

(*) $|\bar{\varphi}(t) - \bar{\psi}(t)| < |\bar{\varphi}(t) - z_0| \ \forall t \in \langle 0,1\rangle$, pak
$$\operatorname{ind}_{\bar{\varphi}} z_0 = \operatorname{ind}_{\bar{\psi}} z_0.$$

Důkaz. Plyne z následujícího:

Věta. (O stejných počtech oběhů.)
Jsou-li $\varphi, \psi : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ spojité, uzavřené a $\frac{\psi(t)}{\varphi(t)} \notin (-\infty, 0)\ \forall t \in \langle 0,1\rangle$, potom
$$\operatorname{ind}_\varphi 0 = \operatorname{ind}_\psi 0.$$

Dokazujeme lemma:

$\varphi(s) := \bar{\varphi}(s) - z_0$,

$\psi(s) := \bar{\psi}(s) - z_0$.

z $(*)$ máme $|\varphi(s) - \psi(s)| < |\varphi(s)|$ $\forall s \in \langle 0,1 \rangle$

$$\left|1 - \frac{\psi(s)}{\varphi(s)}\right| < 1$$

$\square$

<u>Důkaz</u> (hlavní věty).

nechť $H : \langle 0,1 \rangle^2 \to G$ spojitá,

$\varphi_s(s) = H(s,s)$,

$\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = \psi$ a $\varphi_s(0) = \varphi_s(1)$ $\forall s$

(křivky jsou homotopické).

Označme $\varepsilon := \operatorname{dist}(z_0, \underbrace{H(\langle 0,1 \rangle^2)}_{\text{kompakt}}) > 0$

Protože H je stejnoměrně spojitá, existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall k = 0, \dots, n-1$ máme

$$|\underset{H(\frac{k}{n}, s)}{\underset{\shortparallel}{\varphi_{\frac{k}{n}}(s)}} - \underset{H(\frac{k+1}{n}, s)}{\underset{\shortparallel}{\varphi_{\frac{k+1}{n}}(s)}}| < \varepsilon \quad \forall s \in \langle 0,1 \rangle.$$

Tedy $\varphi_{\frac{k}{n}}$ a $\varphi_{\frac{k+1}{n}}$ splňuje $(*)$ a z Lemmatu máme

$$\operatorname{ind}_{\varphi} z_0 = \operatorname{ind}_{\varphi_{\frac{1}{n}}} z_0 = \dots = \operatorname{ind}_{\varphi_1} z_0 = \operatorname{ind}_{\psi} z_0.$$

$\square$

<u>Schwarzovo lemma.</u>

<u>Věta</u> (Schwarz).

Nechť $f \in (\mathcal{H}(\mathbb{D}))$, $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ a $f(0) = 0$. Potom

(i) $|f(z)| \leq |z|$ pro $z \in \mathbb{D}$,

(ii) $|f'(0)| \leq 1$.

Navíc, nastane-li v (i) rovnost pro nějaké $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ nebo v (ii) nastane rovnost, potom f je rotace na $\mathbb{D}$, tj. $f(z) = \lambda z$ pro nějaké $|\lambda| = 1$.

<u>Důkaz</u>. Na cvičení. $\square$

<u>Lemma</u>. Pro $\alpha \in \mathbb{D}$ označme

$$\varphi_\alpha(z) := \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z}.$$

Potom

(i) φ_α je prosté, $\varphi_\alpha(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, $\varphi_\alpha(\alpha) = 0$ a $\varphi_\alpha(\mathbb{T}) = (\mathbb{T})$, kde $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, samozřejmě $\varphi_\alpha \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\bar{\alpha}}\})$;

(ii) $(\varphi_\alpha)_{-1} = \varphi_{-\alpha}$;

(iii) $\varphi_\alpha'(\alpha) = \frac{1}{1 - |\alpha|^2}$, $\varphi_\alpha'(0) = 1 - |\alpha|^2$.

<u>Důkaz</u>. (ii) $w = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z}$

$z = \frac{w + \alpha}{1 + \bar{\alpha} w}$

(i) $\varphi_\alpha(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$:

Je-li $|z| = 1$, potom $\left|\frac{z - \alpha}{\underset{\bar{z} z}{\underset{\shortparallel}{1}} - \bar{\alpha} z}\right| = \left|\frac{z - \alpha}{\bar{z} - \bar{\alpha}}\right| = 1$.

Tedy $\varphi_\alpha(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$, totéž platí pro $(\varphi_\alpha)_{-1}$, tudíž $\varphi_\alpha(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$.

Z $\varphi_\alpha(\mathbb{T})=\mathbb{T}$ dostaneme, že $\varphi_\alpha(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$ z principu maxima modulu.

Ale tedy i $\varphi_{-\alpha}(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$, tudíž $\varphi_\alpha(\mathbb{D})=\mathbb{D}$.

(iii) Cvičení. $\square$

<u>Lemma</u> (Schwarz – Pick).

Nechť $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$, $f(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$ a $f(\alpha)=\beta$.

Potom

$$|f'(\alpha)|\le\frac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}. \qquad (\Delta)$$

Nastane-li v (Δ) rovnost, potom

$$f=\varphi_{-\beta}(\lambda\varphi_\alpha(z)),\quad z\in\mathbb{D},$$

pro nějaké $|\lambda|=1$.

<u>Důkaz</u>. Plyne ze Schwarze, pokud jej užijeme na $\tilde{f}:=\varphi_\beta\circ f\circ\varphi_{-\alpha}$. Potom

$$\tilde{f}'(0)=\varphi_\beta'(\beta)\cdot f'(\alpha)\cdot\varphi_{-\alpha}'(0). \qquad \square$$

<u>Poznámka</u>. Tedy $|f'(0)|<1$, pokud f není prostá holomorfní funkce na $\mathbb{D}$ a $f(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$.

<u>Cvičení</u> (iii) z předminulého Lemmatu:

$$\varphi_\alpha'(\alpha)=\lim_{z\to\alpha}\frac{\varphi_\alpha(z)}{z-\alpha}=\frac{1}{1-|\alpha|^2}$$

$$\varphi_\alpha'(0)=\left.\frac{(1-\bar{\alpha}z)+\bar{\alpha}(z-\alpha)}{(1-\bar{\alpha}z)^2}\right|_{z=0}=1-|\alpha|^2$$

<u>Riemannova věta</u>

<u>Věta</u> (Riemann).

Nechť $\emptyset\neq G\subsetneq\mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast. Potom existuje prostá holomorfní funkce $f: G\xrightarrow{na}\mathbb{D}$.

<u>Poznámka</u>. (1) $f_{-1}:\mathbb{D}\to G$ je holomorfní

(2) Větu dokážeme mimo jiné použitím vlastnosti (JS-7): $\forall f\in\mathcal{H}(G)$, $f\neq0$ na G $\exists h\in\mathcal{H}(G): h^2=f$ na G

Tím také dokážeme ekvivalenci podmínek (JS1)–(JS8).

<u>Důkaz</u>. Nechť $\emptyset\neq G\subsetneq\mathbb{C}$ je oblast a (JS7) platí. Nechť $z_0\in G$. Označíme Σ množinu všech prostých holomorfních funkcí $\psi: G\to\mathbb{D}$.

(1) $\Sigma\neq\emptyset$

(2) Nechť $\psi\in\Sigma$ a $\psi(G)\neq\mathbb{D}$. Potom $\exists\,\tilde{\psi}\in\Sigma$ tak, že $|\tilde{\psi}'(z_0)|>|\psi'(z_0)|$.

(3) Položme $\eta:=\sup\{|\psi'(z_0)|,\ \psi\in\Sigma\}$

Je-li $\psi\in\Sigma$, potom ψ je prostá, tudíž $\psi'(z_0)\neq0$.

Tedy $\eta>0$. Z definice $\exists\{\psi_n\}\subset\Sigma$ tak, že $|\psi_n'(z_0)|\longrightarrow\eta$.

Montel: $\{\psi_n\}$ je stejně omezená, existuje vybraná $\psi_{n_k}\overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na G

Weierstrass: Máme $f\in\mathcal{H}(G)$ a $\eta=|f'(z_0)|>0$.

Hurwitz: Protože f není konstantní a je lokálně stejnoměrnou limitou prostých holomorfních funkcí, je f prostá.

Zřejmě $f(G) \subset \mathbb{D}$. Protože f je nekonstantní holomorfní funkce na oblasti G, je f otevřené zobrazení, a tudíž $f(G) \subset \mathbb{D}$, neboli $f \in \Sigma$. Z (2) dostáváme, že $f(G) = \mathbb{D}$.

Musíme nyní dokázat (1) a (2).

(1) Nechť $w_0 \in \mathbb{C} \setminus G$. Z (JS7) plyne, že existuje $\varphi \in \mathcal{H}(G)$ taková, že $\varphi^2(z) = z - w_0 \neq 0$, $z \in G$.

Potom máme

(*) $\varphi(z_1) = \pm\varphi(z_2) \Rightarrow \varphi^2(z_1) = \varphi^2(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$.

Z (*) máme, že φ je prostá.

Dále $\emptyset \neq \varphi(G)$ je otevřená a existuje $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $r > 0$ tak, že $0 < r < |a|$ a $U(a,r) \subset \varphi(G)$.

Z (*) máme, že $U(-a,r) \cap \varphi(G) = \emptyset$, neboli $|\varphi(z) - (-a)| \geq r$, $z \in G$.

Položme $\psi(z) := \dfrac{r}{2(\varphi(z)+a)}$, $z \in G$.

Zřejmě $\psi \in \Sigma$.

(2) Nechť $\psi \in \Sigma$ a $\alpha \in \mathbb{D} \setminus \psi(G) \neq \emptyset$.

Označme $\varphi_\alpha(z) := \dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$

Víme (i) $\varphi_\alpha : \mathbb{D} \xrightarrow{\text{bijekce}} \mathbb{D}$, holomorfní

(ii) $(\varphi_\alpha)_{-1} = \varphi_{-\alpha}$

(iii) $\varphi_\alpha(\alpha) = 0$

Potom $\varphi_\alpha \circ \psi \in \Sigma$ a $\varphi_\alpha \circ \psi \neq 0$ na G.

Podle (JS7) $\exists\, g \in \mathcal{H}(G) : g^2 = \varphi_\alpha \circ \psi$. $(\bullet)$

Potom g je prosté:

$g(z_1) = g(z_2) \Rightarrow g^2(z_1) = g^2(z_2) \Rightarrow (\varphi_\alpha \circ \psi)(z_1) = (\varphi_\alpha \circ \psi)(z_2)$

$\Rightarrow z_1 = z_2$, neboť φ_α i ψ jsou prosté.

Zřejmě $g \in \Sigma$.

Označíme-li $\beta := g(z_0)$, potom

$(\odot)$ $\tilde{\psi} := \varphi_\beta \circ g \in \Sigma$ a $\tilde{\psi}(z_0) = 0$.

Označíme-li $s(w) := w^2$, potom

$\psi \overset{(\bullet)}{=} \varphi_{-\alpha} \circ s \circ g \overset{(\odot)}{=} \underbrace{\varphi_{-\alpha} \circ s \circ \varphi_{-\beta}}_{=:F} \circ \tilde{\psi}$. $(\circledast)$

Označíme $F := \varphi_{-\alpha} \circ s \circ \varphi_{-\beta}$. Potom $F \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $F(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ a F <u>není</u> prostá.

Schwarz-Pick: $|F'(0)| < 1$

Z $(\circledast)$ máme: $\psi = F \circ \tilde{\psi}$.

Tedy $\psi'(z_0) = F'(0) \cdot \tilde{\psi}'(z_0)$ a $0 < |\psi'(z_0)| < |\tilde{\psi}'(z_0)|$.

$\square$

<u>Harmonické funkce.</u>

$f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $G \subset \mathbb{C}$ ot.

$\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$

$f = u + iv$; $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$

<u>Pozorování</u>: Jsou-li $f, g \in \mathcal{H}(G)$, $G \subset \mathbb{C}$ oblast, a $\operatorname{Re} f = \operatorname{Re} g$, potom $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tak, že $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g + c$.

Podobně pro imaginární části.

Důkaz tohoto plyne snadno z C-R podmínek

<u>Otázka</u>. Jak vypadají reálné části holomorfních funkcí?

Označení. Totální diferenciál

$$df(h) := \frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2 \; ; \; h \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$$

$$df(h) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{h+\bar{h}}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{h-\bar{h}}{2}\right) =$$

$$= \partial f \cdot h + \bar{\partial} f \cdot \bar{h},$$

kde $\partial f := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$,

$\bar{\partial} f := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

Věta (Cauchy - Riemann.)

Existuje $f'(z_0) \in \mathbb{C} \iff \exists\, df(z_0)$ a $\bar{\partial} f(z_0) = 0$.

V tomto případě $f'(z_0) = \partial f(z_0)$.

Lemma. Je-li $f \in C^2(G)$, potom

$$\partial\bar{\partial} f = \bar{\partial}\partial f = \frac{1}{4}\Delta f,$$

kde $\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ je Laplaceův operátor.

Důkaz. $\partial\bar{\partial} f = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f =$

$= \frac{1}{4}\Delta f$ □

Harmonické funkce.

Definice. Řekneme, že $u \in C^2(G)$ ($G \subset \mathbb{C}$ ot.) je harmonická, pokud $\Delta u = 0$.

Příklady. (1) Je-li $f \in \mathcal{H}(G)$, potom $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ jsou harmonické!

Skutečně, je-li $f \in \mathcal{H}(G)$, pak splňuje C-R podmínky a máme:

$$0 = \partial\bar{\partial} f = \frac{1}{4}\big(\underbrace{\Delta(\operatorname{Re} f)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\Delta(\operatorname{Im} f)}_{\in\mathbb{R}}\big) \Rightarrow \Delta(\operatorname{Re} f) = \Delta(\operatorname{Im} f) = 0.$$

(2) Je-li $f \in \mathcal{H}(G)$, $f \not\equiv 0$ a G je jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{C}$, potom $\exists F \in \mathcal{H}(G)$ taková, že $\operatorname{Re} F = \log|f|$, speciálně $\log|f|$ je harmonická funkce.

Důkaz: Z j. s. plyne, že existuje $F \in \mathcal{H}(G)$ taková, že $f = e^F$;

$|f| = e^{\operatorname{Re} F}$; $\log|f| = \operatorname{Re} F$

(3) $f(z) := \log|z|$; $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

je harmonická, ale není reálnou částí žádné holomorfní funkce na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Skutečně, f je harmonická, neboť je reálnou částí holomorfní funkce na libovolném kruhu neobsahujícím počátek.

f není reálnou částí žádné holomorfní funkce:

$\operatorname{Re}(\log z) = \log|z|$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0\rangle$

hl. h. logaritmu

Nyní nechť pro spor existuje $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ taková, že

$\operatorname{Re} F = \log|z| = \operatorname{Re}(\log z)$

$\Rightarrow$ na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0\rangle$ je $F(z) = \log z + ic$, $c \in \mathbb{R}$ ↯

Poznámka. Búno nadále harmonické funkce jsou reálné!

Věta. Je-li $G \subset \mathbb{C}$ jednoduše souvislá oblast a u je harmonická na G, potom existuje $f \in \mathcal{H}(G)$ taková, že $u = \operatorname{Re} f$.

Poznámka. Jinak řečeno, každá harmonická funkce je lokálně reálnou částí holomorfní funkce. (Globálně ale nemusí!)

Pozorování! Je-li $f \in \mathcal{H}(G)$, potom

$$f' = \partial f = \partial(f + \bar{f}) = 2\partial(\operatorname{Re} f), \text{ protože}$$

$$0 = \overline{\bar{\partial} f} = \partial \bar{f}.$$

Důkaz (Věty).

Protože u je harmonická, je ∂u holomorfní na G (protože $\bar{\partial}(\partial u) = \frac{1}{4}\Delta u = 0$). Tedy (z j.s.) existuje $f_0 \in \mathcal{H}(G)$ taková, že $f_0' = 2\partial u$.

Tedy $2\partial(\operatorname{Re} f_0) = f_0' = 2\partial u$, $\partial(\underbrace{\operatorname{Re} f_0 - u}_{\in \mathbb{R}}) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Re} f_0 - u) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{Re} f_0 - u) = 0 \quad \text{na oblasti } G.$$

Tedy $\exists\, c \in \mathbb{R}$, že $u = \operatorname{Re} f_0 + c$.

Položme $f := f_0 + c$. □

Důsledek. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a u je harmonická na G. Potom $u \in C^\infty(G)$ a splňuje podmínku průměru:

Pro každý kruh $\overline{U(z_0, r)} \subset G$ platí, že

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})\,dt. \qquad \text{(PP)}$$

Značení! $\displaystyle \fint_{S(z_0,r)} u := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})\,dt$

Důkaz (Důsledku).

Nechť $\overline{U(z_0, r)} \subset G$. Potom existuje $R > r$ tak, že $U(z_0, R) \subset G$ a $u = \operatorname{Re} F$ pro nějakou $F \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$. Protože $F \in C^\infty(U(z_0, R))$, je taková i u. Z Cauchyho vzorce:

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{F(z)}{z - z_0}\,dz, \text{ kde } \varphi(t) := z_0 + e^{it} r,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$$

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} F(z_0 + re^{it}) \frac{\cancel{i}\,\cancel{re^{it}}}{\cancel{re^{it}}}\,dt.$$

Tedy dostáváme (PP). □

Věta. Nechť u je spojitá reálná funkce na oblasti $G \subset \mathbb{C}$, která splňuje (PP). Potom u je buď konstantní, nebo nenabývá na G extrému.

Důkaz. Nechť $z_0 \in G$ a $u(z_0) \geq u$ na G.

Položme $M := \{z \in G;\ u(z) = u(z_0)\}$. Zřejmě $\emptyset \neq M$ a M je uzavřená v G. Ukážeme-li, že M je otevřená, máme $G = M$.

Nechť $z_1 \in M$ a $U(z_0, r) \subset G$. Potom $U(z_0, r) \subset M$:

pro spor nechť $\exists\, z_2 \in U(z_0, r) \setminus M$. Z (PP) máme

$$\underset{u(z_0)}{\overset{\|}{u(z_1)}} = \fint_{S(z_1, |z_1 - z_2|)} u \overset{(*)}{\leq} u(z_0)$$

nerovnost $(*)$ však musí být ostrá (ze spojitosti). ↯

□

Důsledek (Princip maxima a minima pro harmonické funkce).
Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je omezená otevřená množina, $u \in C(\overline{G})$ a u je harmonická na G.
Potom platí

$$\min_{\partial G} u \leq u \leq \max_{\partial G} u.$$

Poznámka. Předpoklad harmoničnosti lze nahradit (PP).

Důkaz (Důsledku).
Nechť $\exists z_0 \in G$, $u(z_0) = \max_{\overline{G}} u$.

Podle předchozí věty je ale taková u konstantní na komponentě G_0 obsahující z_0, z toho nutně plyne, že maxima nabývá i na hranici. $\square$

Poissonův integrál.

Nechť u je harmonická na $\overline{\mathbb{D}}$ (tj. na jisté otevřené množině obsahující $\overline{\mathbb{D}}$). Potom existuje $f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ taková, že $\operatorname{Re} f = u$ na $\overline{\mathbb{D}}$ a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| \leq 1$$

Pro $|z| \leq 1$, $z = re^{i\vartheta}$ máme

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n r^n e^{in\vartheta} + \overline{a}_n r^n e^{-in\vartheta}\right) \cdot \frac{1}{2}.$$

Tedy

$$u(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} b_n r^{|n|} e^{in\vartheta}, \qquad (1)$$

kde $b_n := \begin{cases} \operatorname{Re} a_0 & ; n = 0 \\ \frac{1}{2} a_n & ; n > 0 \\ \frac{1}{2} \overline{a}_{-n} & ; n < 0 \end{cases}$

navíc platí:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) e^{-imt} \, dt \overset{(1)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{i(n-m)t} \, dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} \, dt}_{\begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}} = b_m \qquad (2)$$

Dosaďme do (1) vyjádření (2): Pro $z = re^{i\vartheta}$, $r \in \langle 0, 1)$

$$u(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) e^{in(\vartheta - t)} \, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\vartheta - t)} \right) u(e^{it}) \, dt.$$

Označení. (i) $P_r(\vartheta) := \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\vartheta}$, $0 \leq r < 1$, $\vartheta \in \mathbb{R}$

Poissonovo jádro

(ii) $[P_u](z) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\vartheta - t) \, u(e^{it}) \, dt$

Poissonův integrál

Věta. Je-li u harmonická na $\overline{\mathbb{D}}$, potom
$u = Pu$ na $\mathbb{D}$.

Cvičení. $P_r(\vartheta) = \operatorname{Re}\left(\frac{1 + re^{i\vartheta}}{1 - re^{i\vartheta}}\right) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\vartheta}$

Řešení. Pro $|z| < 1$, $z = re^{i\vartheta}$, máme

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n;$$

$$2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = 2 + \sum_{1}^{\infty} \left(r^n e^{in\vartheta} + r^n e^{-in\vartheta}\right) = 1 + P_r(\vartheta)$$

$$P_r(\vartheta) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \ldots \text{ (snadné)}$$

$\triangle$

Věta. Nechť $g \in L^1(\mathbb{T})$ (kde $\mathbb{T} := \partial\mathbb{D}$). Potom

1) Pg je harmonická na $\mathbb{D}$;

2) Je-li g spojitá v $z_0 \in \mathbb{T}$, potom
$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \mathbb{D}}} [Pg](z) = g(z_0);$$

3) Pro s.v. $\vartheta \in \mathbb{R}$ platí
$$\lim_{r \to 1-} [Pg](re^{i\vartheta}) = g(e^{i\vartheta}) \in \mathbb{R} \qquad (*)$$
(Fatouova věta).

Důkaz. 1)
$$\underset{\substack{z = re^{i\vartheta} \\ |z|<1}}{[Pg](z)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i(\vartheta-t)}}{1-re^{i(\vartheta-t)}}\right) g(e^{it})\,dt = \operatorname{Re}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\, g(e^{it})\,dt\right)}_{=:f(z)}$$

navíc $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ a $Pg = \operatorname{Re} f$, tedy harmonická funkce.

2) Bůno $g(z_0) = 0$ (jinak uvažme $g - g(z_0)$). Nechť $\varepsilon > 0$. Volme $\delta \in (0,\pi)$, aby
$$|g(e^{it})| < \varepsilon \quad \forall t \in (\vartheta_0 - \delta, \vartheta_0 + \delta),$$
(uvažujeme $z_0 = e^{i\vartheta_0}$).
Nechť $z \in \mathbb{D}$, $z = re^{i\vartheta}$ a $|\vartheta - \vartheta_0| < \frac{\delta}{2}$.
$$Pg(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta_0-\delta}^{\vartheta_0+\delta} P_r(\vartheta - t)\, g(e^{it})\,dt}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{A:=(-\pi,\pi)\setminus(\vartheta_0-\delta,\vartheta_0+\delta)} P_r(\vartheta - t)\, g(e^{it})\,dt}_{I_2}$$

Zřejmě $P_r > 0$ a $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\vartheta - t)\,dt = 1$
$$\overset{\shortparallel}{[P(1)](re^{i\vartheta})}$$

Potom $|I_1| \le \varepsilon$.
Dále
$$|I_2| \le \frac{1}{2\pi}\int_A P_r(\vartheta - t)|g(e^{it})|\,dt$$
$$\underset{\substack{|\vartheta - t| \ge \frac{\delta}{2} \\ |\vartheta - t| \le \frac{3\pi}{2}}}{P_r(\vartheta - t)} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta - t)} \le P_r\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

Volme $r_0 \in (0,1)$ tak, aby $|I_2| < \varepsilon \ \forall r \in (r_0, 1)$.
Potom pro $z = re^{i\vartheta}$ s $|\vartheta - \vartheta_0| < \frac{\delta}{2}$ a $r \in (r_0, 1)$ máme, že $|Pg(z)| < 2\varepsilon$.
Důkaz 3) později. □

Dirichletova úloha.

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ ot., omezená. Nechť $g \in C(\partial G)$.
Hledáme $u \in C(\overline{G})$, která je harmonická na G a $u = g$ na ∂G (DÚ)

Poznámky. (i) Z principu maxima a minima plyne, že řešení (DÚ) existuje nejvýše jedno

(ii) Řešení (DÚ) nemusí existovat:
$G := \mathbb{D} \setminus \{0\}$;
$$g := \begin{cases} 1 & v\ 0 \\ 0 & v\ \mathbb{T} \end{cases}$$
Pro takového g neexistuje řešení!

(iii) (DÚ) má řešení na „pěkných" oblastech, např. oblastech s lipschitzovskou hranicí.

Věta. (DÚ) má jediné řešení na $\mathbb{D}$ (a stejně tak na jiných kruzích v $\mathbb{C}$).

Konkrétněji: nechť $g \in C(\mathbb{T})$. Potom existuje jediná $u \in C(\overline{\mathbb{D}})$, která je harmonická na $\mathbb{D}$ a $u = g$ na $\mathbb{T}$.

Navíc $u = Pg$ na $\mathbb{D}$.

Důkaz. Plyne ihned z vlastností (1), (2), jednoznačnost plyne z principu maxima a minima. □

Věta. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Potom u je harmonická na G právě, když u je spojitá na G a splňuje (PP) na G.

Důkaz. „$\Rightarrow$" máme.

„$\Leftarrow$". Nechť $u \in C(G)$ a splňuje (PP) na G.

Nechť $\overline{U(z_0, r)} \subset G$; $U := U(z_0, r)$.

Nechť h je řešení (DÚ) na U s hraniční podmínkou $u|\partial U$.

Potom $v := u - h$ na U je zřejmě spojitá na $\overline{U}$, dále v splňuje (PP) na U a $v = 0$ na ∂U. Z principu maxima a minima dostaneme $v = 0$ na $\overline{U}$, čili $u = h$ na $\overline{U}$, tudíž u je harmonická na $\overline{U}$. □

Důkaz (Fatouovy věty).

Položme $\Phi(t) := \int_0^t g(e^{i\tau})\,d\tau$, $t \in \mathbb{R}$

Jistě $\Phi(2\pi) = \Phi(0) = 0$.

Potom je zřejmě Φ 2π-periodická, AC na $\langle -\pi, \pi\rangle$ a $\Phi'(\vartheta) = g(e^{i\vartheta}) \in \mathbb{R}$ pro s. v. $\vartheta \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Uvažme takové ϑ. Dokážeme, že pro takové ϑ platí (*).

Nechť $z = e^{i\vartheta} r$, $0 \le r < 1$. Potom

$$Pg(z) \overset{P\text{-}P}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r'(\vartheta - t)\, \Phi(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{P_r'(t)}_{\text{lichá}}\, \Phi(\vartheta - t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} P_r'(t) \big(\Phi(\vartheta - t) - \Phi(\vartheta + t)\big)\,dt$$

$$P_r'(\vartheta) = -\frac{(1-r^2)\,2r \sin\vartheta}{(1+r^2-2r\cos\vartheta)^2}$$

Označme:

$$K_r(t) := \frac{\sin t}{r} P_r'(t) = \frac{2(1-r^2)\sin^2 t}{(1+r^2-2r\cos t)^2}$$

Potom $K_r \ge 0$, sudé

$$Pg(z) = \frac{r}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_r(t) \underbrace{\left(\frac{\Phi(\vartheta+t) - \Phi(\vartheta - t)}{2 \sin t}\right)}_{\text{užijeme sudost}} dt \qquad (\triangle)$$

$$\downarrow t \to 0$$

$$\Phi'(\vartheta) = g(e^{i\vartheta}) \in \mathbb{R}$$

Dokážeme, že

$$Pg(re^{i\vartheta}) - g(e^{i\vartheta}) \to 0 \text{ pro } r \to 1- \qquad (\circ)$$

Platí, že

(i) $\frac{r}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_r(t)\,dt = 1 \quad \forall r \in \langle 0,1)$

Stačí do $(\triangle)$ dosadit $g(z) = \operatorname{Re} z = r\cos\vartheta$ (harmonická)

$$\Phi(t) = r\sin t$$
$$\vartheta = 0$$

(ii) Pro dané $\varepsilon > 0$ volme $\delta \in (0,\pi)$, aby $\forall t \in (-\delta,\delta)$:

$$\left|\frac{\Phi(\vartheta+t) - \Phi(\vartheta-t)}{2\sin t} - g(e^{i\vartheta})\right| < \varepsilon$$

Tedy máme

$$\frac{r}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_r(t)\left(\frac{\Phi(\vartheta+t)-\Phi(\vartheta-t)}{2\sin t} - g(e^{i\vartheta})\right)dt =$$

$$= \underbrace{\frac{r}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}(\dots)\,dt}_{I_1} + \underbrace{\frac{r}{2\pi}\int_{\delta<|t|<\pi}(\dots)\,dt}_{I_2} = I_1 + I_2$$

Zřejmě $|I_1| < \varepsilon$ z (ii)

Je-li $\pi > |t| > \delta$, potom

$$0 \le K_r(t) \le \frac{K_r(t)}{|\sin t|} \le \frac{2(1-r^2)}{(1+r^2-2r\cos\delta)^2} =: \omega(r) \xrightarrow{r\to 1-} 0$$

Dále

$$|I_2| \le \frac{r}{2\pi}\Big(\overbrace{2\pi\cos r\,|g(e^{i\vartheta})|}^{\text{divný odhad, radši pomocí } \omega(r)} + \frac{\omega(r)}{2}\|\Phi\|_{L^1(-\pi,\pi)}\cdot 2\Big) \xrightarrow{r\to 1-} 0$$

Volme $r_0 \in (0,1)$, aby $|I_2| < \varepsilon \ \forall r \in (r_0,1)$. $\square$

Hraniční chování holomorfních funkcí.

1) Obecně nelze říct nic
2) Hraniční chování konformních zobrazení
3) Hardyho H^r-prostory

Příklad. $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$

Je-li $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$, $q > 2$, potom

$$f(re^{2i\frac{p\pi}{q}}) = \sum_{n \ge q} r^{n!} - q \xrightarrow{r\to 1-} \infty$$

Tato funkce je příkladem holomorfní funkce na $\mathbb{D}$, jež se nedá holomorfně rozšířit na žádnou větší oblast.

Příklad. $g(z) := \sum_{1}^{\infty} \frac{z^{n!+1}}{n!+1} \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$

$g' = f$

Banach: $C(\langle 0,1\rangle)$ úplný met. prostor

$M := \{f \in C(\langle 0,1\rangle);\ f' \text{ existuje vlastní někde v } (0,1)\}$

$C(\langle 0,1\rangle) \setminus M$ je reziduál v $C(\langle 0,1\rangle)$

Připomínka. $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ je úplný met. prostor

Věta. Nechť $\mathcal{A} := \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D});\ \forall \theta \in \mathbb{R} \text{ neex. } \lim_{r\to 1-} f(re^{i\theta})\}$.

Potom $\mathcal{A}$ je reziduální množina v $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, speciálně $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Důkaz. Nechť $\varepsilon>0$ a $0<\rho<1$. Označme

$$A^1_\rho(\varepsilon) := \{ f\in\mathcal{H}(\mathbb{D});\ \forall\vartheta\in\langle-\pi,\pi\rangle\ \exists r\in(\rho,1): |f(e^{i\vartheta}r)|<\varepsilon\}$$

a $A^2_\rho(\varepsilon) := \{$ — " — $|f(re^{i\vartheta})| > \frac{1}{\varepsilon}\}$

Ukážeme, že $A^1_\rho(\varepsilon)$ i $A^2_\rho(\varepsilon)$ jsou otevřené a husté v $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Volme $\rho_n\in(0,1)$, $\rho_n\uparrow 1$ a $\varepsilon_n\in(0,\infty)$, $\varepsilon_n\downarrow 0$.

Položme

$$A_1 := \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(A^1_{\rho_n}(\varepsilon_n)\cap A^2_{\rho_n}(\varepsilon_n)\right)$$

Zřejmě A_1 je hustá G_δ a $A\supset A_1$.
Dokonce A_1 je obsažena v množině

$$A_2 := \{ f\in\mathcal{H}(\mathbb{D});\ \forall\vartheta\in\mathbb{R}: \limsup_{r\to 1-}|f(re^{i\vartheta})| = \infty \text{ a } \liminf_{r\to1-}|f(re^{i\vartheta})|=0\}.$$

1) $A^1_\rho(\varepsilon)$ je otevřená:
nechť $f\in A^1_\rho(\varepsilon)$.
Připomeňme: $\mathcal{U}$ je okolí f v $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, existuje-li $\delta>0$ a kompakt $K\subset\mathbb{D}$ tak, že

$$\mathcal{U}\supset U^{(f)}_{K,\delta} := \{g\in\mathcal{H}(\mathbb{D});\ \max_K|f-g|<\delta\}$$

Položme $J := \{z\in\mathbb{D};\ |z|>\rho \text{ a } |f(z)|<\varepsilon\}$.
Zřejmě J je otevřená v $\mathbb{D}$. Tedy $\forall z\in J\ \exists\delta_z>0$ tak, že oblouk

$$\underset{\substack{z=re^{i\vartheta}\\ \vartheta\in\langle-\pi,\pi\rangle}}{\Delta(z)} := \{re^{is};\ s\in(\vartheta-\delta_z,\vartheta+\delta_z)\}$$

i s uzávěrem leží v J.

Existuje konečně mnoho oblouků $\Delta(z_1),\dots,\Delta(z_m)$ tak, že každý poloměr protne alespoň jeden z nich. To plyne z kompaktnosti $\langle-\pi,\pi\rangle$, který je pokryt $\{(\vartheta_z-\delta_z,\vartheta_z+\delta_z),\ z\in J\}$. Položme

$K := \bigcup_{j=1}^{m}\overline{\Delta(z_j)}$ a $\delta := \varepsilon - \max_K|f|$. Zřejmě K je kompakt, $K\subset J$, $\delta>0$ a $A^1_\rho(\varepsilon)\supset U_{K,\delta}(f)$.
Nechť $g\in U_{K,\delta}(f)$. Potom na K platí

$$|g|\le|g-f|+|f|<\varepsilon, \text{ tedy } g\in A^1_\rho(\varepsilon).$$

2) $A^1_\rho(\varepsilon)$ je hustá v $\mathcal{H}(\mathbb{D})$:
nechť $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$, $K\subset\mathbb{D}$ je kompakt a $\delta>0$.
Chceme najít $g\in A^1_\rho(\varepsilon)\cap U_{K,\delta}(f)$
Volme R tak, aby $\rho<R<1$ a $K\subset\overline{U(0,R)}$.
Volme v $\mathbb{D}\setminus\overline{U(0,R)}$ konečně mnoho disjunktních kruhů $D_1,\dots,D_m$ tak, že každý poloměr protne alespoň jeden z nich.
Runge: Existuje polynom g takový, že $|f-g|<\delta$ na $\overline{U(0,R)}\supset K$ a zároveň $|g|<\varepsilon$ na $D_1\cup\dots\cup D_m$, speciálně $g\in A^1_\rho(\varepsilon)$.

$\square$

Poznámka. Nechť
$B := \{f\in\mathcal{H}(\mathbb{D}),\ \mathbb{T}$ je přirozená hranice $f\}$.
Potom B je reziduální v $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.
(Snadno $A\subset B$.)

Hardyho prostory.

<u>Definice</u>. Nechť $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ a $0<p<\infty$. Položme

$$\|f\|_{H^p} := \begin{cases} \sup_{\mathbb{D}} |f|; & p=\infty \\ \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}; & 0<p<\infty. \end{cases}$$

Potom definujeme

$$H^p := \{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D});\ \|f\|_{H^p} < \infty \}.$$

<u>Poznámka</u>. (i) $H^\infty = \{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D});\ f \text{ omezená} \}$

(ii) H^p je Banach pro $1 \le p \le \infty$,
pro $0<p<1$ $\|\cdot\|_{H^p}$ není norma

(iii) Fatou: Je-li $f \in H^p$, potom
$\exists f^* \in L^p(\mathbb{T})$ tak, že
$$\lim_{r\to 1-} f(re^{i\vartheta}) = f(e^{i\vartheta}) \text{ pro s.v. } \vartheta.$$

Prostor H^2.

<u>Připomeňme</u>: $L^2(\mathbb{T})$

- norma: $\|f\|_{L^2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$
- skalární součin: $(f,g) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\overline{g}(e^{it})\, dt$
- Fourierovy řady: $\{e^{in\vartheta}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je ON-báze
  Je-li $f \in L^2(\mathbb{T})$, potom
  $$f(e^{i\vartheta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\vartheta} \text{ v } L^2(\mathbb{T}),$$
  kde $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\vartheta}) e^{-in\vartheta} d\vartheta$.

Parseval: $\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$ (PR)

<u>Věta</u>. (a) Nechť $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ a $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$; $z \in \mathbb{D}$.
Potom $\|f\|_{H^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2}$.

Speciálně H^2 je izometricky izomorfní s ℓ^2 a je to tedy separabilní Hilbert.

(b) Nechť $f \in H^2$. Potom $\exists f^* \in L^2(\mathbb{T})$ tak, že

(i) $f^*(e^{i\vartheta}) = \lim_{r\to 1-} f(re^{i\vartheta})$ pro s.v. ϑ;

(ii) $\widehat{f^*}(n) = 0$ pro $n<0$ a
$\widehat{f^*}(n) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pro $n \ge 0$;

(iii) f je Poissonovým integrálem f^*,
tj. pro $z = re^{i\vartheta} \in \mathbb{D}$ je
$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\vartheta - t) f^*(e^{it})\, dt;$$

(iv) f je Cauchyho integrálem f^*, tj:
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi} \frac{f^*(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

<u>Důkaz</u>. (a) Nechť $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Pro $0<r<1$ označíme
$f_r(z) := f(rz)$; $z \in \frac{1}{r}\mathbb{D}$. Pro $0<r<1$
$f_r(e^{i\vartheta}) = \sum_0^\infty a_n r^n e^{in\vartheta}$ kvg. stejnoměrně v ϑ
spoj. na $\mathbb{T}$, spec. $L^2(\mathbb{T})$
z (PR) máme
$$\|f_r\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$
Pro $r \to 1-$ dostaneme, že
$$\|f\|_{H^2}^2 = \sum_0^\infty |a_n|^2 \quad (\text{z Leviho věty})$$

(b) nechť $f \in H^2$ a $f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$, $z \in \mathbb{D}$.

Def. $f^*(e^{i\vartheta}) := \sum_{n=0}^\infty a_n e^{in\vartheta}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$.

Potom $f^* \in L^2(\mathbb{T})$ a platí (ii).

Ukažme (iii):

Nejprve si rozmysleme, že $f_r \to f^*$ v $L^2(\mathbb{T})$:

$$\|f_r - f^*\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 (1-r^n)^2 \xrightarrow[r\to 1-]{} 0$$

ze stejnoměrné konvergence.

Nechť $z \in \mathbb{D}$, $z = re^{i\vartheta}$. Pro $\forall r \in (0,1)$ je zřejmě $f_r \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ a $f_r(z) = [Pf_r](z) =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)}_{=:\overline{g}(e^{it}) (= g(e^{it}))} f_r(e^{it})\, dt = (f_r, g)$$

Tedy
$$\begin{array}{ccccc} f_r(z) & = & (f_r, g) & & \\ \Big\downarrow{\scriptstyle r\to 1-} & & \Big\downarrow & & \\ f(z) & = & (f^*, g) & = & Pf^*(z) \end{array}$$

Podobně se ukáže (iv) $\square$

Tvrzení. Je-li $f \in H^\infty$ a $\lim\limits_{r\to 1-} f(re^{i\vartheta}) = 0$ pro s.v. $\vartheta \in (\alpha,\beta)$, kde $\alpha < \beta$, potom $f \equiv 0$.

Důkaz. Volme $N \in \mathbb{N}$, aby $\frac{2\pi}{N} < \beta - \alpha$. Označme $\eta = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ a $g(z) := f(z)\cdot f(\eta z)\cdot f(\eta^2 z) \dots f(\eta^{N-1} z)$.

Zřejmě $g \in H^\infty$ a $\underbrace{\lim\limits_{r\to 1-} g(re^{i\vartheta})}_{=g^*(e^{i\vartheta})} = 0$ pro s.v. ϑ.

Protože $H^2 \supset H^\infty$, je $g \equiv 0$ na $\mathbb{D}$, tudíž i $f \equiv 0$ na $\mathbb{D}$ (z věty o jednoznačnosti). $\square$

Rozložení nulových bodů u funkcí z H^∞

Víme: Posloupnost $\{a_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{D}$ obsahuje všechny nulové body nějaké $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $f \not\equiv 0$, právě když $|a_j| \to 1$ pro $j \to \infty$.

Problém. Jak to vypadá, když $f \in H^\infty$?

Věta. Posloupnost $\{a_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{D}$ obsahuje všechny nulové body nějaké $f \in H^\infty$, $f \not\equiv 0$ (násobnost nulového bodu odpovídá výskytu v posloupnosti), právě když
$$\sum_j (1-|a_j|) < \infty.$$

Důkaz. 1) „$\Leftarrow$" Blaschkeho součin.

Nechť $\{a_j\} \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}$ a $k = 0,1,2,\dots$

Definujme
$$f(z) := z^k \prod_{j=1}^\infty \frac{a_j - z}{1-\overline{a}_j z}\cdot\frac{|a_j|}{a_j}, \quad z \in \mathbb{D}. \qquad (*)$$

Potom $f \in H^\infty$, 0 je k-násobný nulový bod f a $\{a_j\}$ obsahuje všechny nenulové nulové body f.

(i) $\varphi_j := \frac{a_j - z}{1-\overline{a}_j z} \Rightarrow \varphi_j^{-1} = \varphi_j \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\overline{a}_j}\})$

(ii) $\varphi_j(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$: Buď $|z|=1$, tj. $\overline{z}z = 1$, pak
$$\left|\frac{a_j - z}{(\overline{z}-\overline{a}_j)z}\right| = 1.$$
$\Rightarrow \varphi_j(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$

(iii) $\varphi_j(a_j) = 0$, $\varphi_j(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

(iv) $(*)$ konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{D}$: Nechť $|z| \le r < 1$. Potom
$$\sum\left|1 - \frac{a_j - z}{1-\overline{a}_j z}\cdot\frac{|a_j|}{a_j}\right| = \sum\left|\frac{a_j - |a_j|^2 z - a_j|a_j| + z|a_j|}{(1-\overline{a}_j z)a_j}\right| =$$

$$= \sum (1-|a_j|) \frac{|z|a_j|+a_j|}{|1-\bar{a}_j z||a_j|} \le \frac{1+r}{1-r} \underbrace{\sum{}' (1-|a_j|)}_{\text{kvg. z předpokladu}}.$$

2) „$\Rightarrow$" pomocí následujícího:

Jensenova rovnost.

Víme: Nechť $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ a $f \neq 0$ na $\mathbb{D}$. Potom $\log|f|$ je harmonická na $\mathbb{D}$, splňuje tedy podmínku průměru, a tedy speciálně

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{it})|\,dt = \log|f(0)|.$$

Problém. Co když f má nulové body v $\mathbb{D}$?

Věta (Jensenova rovnost).
Nechť $f \in \mathcal{H}(\overline{U(0,r)})$, $f(0) \neq 0$ a nechť $\{a_j\}_{j=1}^{m}$ je posloupnost všech nulových bodů f v $\overline{U(0,r)}$ (násobnost = výskyt).
Potom platí

$$(\mathrm{JR}) \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(e^{it}r)|\,dt = \log|f(0)| + \sum_{j=1}^{m} \log\frac{r}{|a_j|}.$$

Důkaz. Bůno $\{a_j\}_1^{m_1} \subset U(0,r)$, $\{a_j\}_{m_1}^{m} \subset \partial U(0,r)$.
Definujme $g(z) := \prod_{j=1}^{m_1} \underbrace{\frac{z-a_j}{r^2-\bar{a}_j z} \cdot r}_{|\cdots|=1 \text{ na } \partial U(0,r)} \cdot \prod_{j=m_1+1}^{m} \frac{a_j - z}{a_j}$.

Potom g má stejné nulové body v $\overline{U(0,r)}$ jako f, tudíž $\frac{f}{g}$ je nenulová holomorfní na $\overline{U(0,r)}$.

Potom tedy

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|\frac{f}{g}(re^{it})\right|dt = \log\left|\frac{f(0)}{g(0)}\right|.$$

Dále

$$\log|g(0)| = \log\left(\prod_{j=1}^{m_1} \frac{|a_j|}{r}\right) = \sum_{j=1}^{m_1} \log\frac{|a_j|}{r};$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|g(re^{it})|\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|\prod_{j=1+m_1}^{m}\left(1-\frac{re^{it}}{a_j}\right)\right|dt =$$

$$= \sum_{j=m_1+1}^{m} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|1-e^{i(t-\vartheta_j)}|\,dt = 0, \text{ protože } \quad a_j = re^{i\vartheta_j}$$

$$I := \int_{-\pi}^{\pi} \log|1-e^{it}|\,dt = 0 \quad (\text{cv.}) \qquad \square$$

Cvičení. $|1-e^{it}|^2 = (1-\cos t)^2 + \sin^2 t = 2 - 2\cos t =$
$= 2^2 \sin^2 \frac{t}{2}$

$$I = \int_0^{2\pi} \cdots \underset{s=\frac{t}{2}}{=} 2\int_0^{\pi} \log(2\sin s)\,ds =$$

$$= 2\pi\log 2 + 2\underbrace{\int_0^{\pi} \log(\sin s)\,ds}_{\overset{!!}{J}}$$

$$J \underset{s=2r}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\underbrace{\sin 2r}_{\overset{\shortparallel}{2\sin r \sin(r+\frac{\pi}{2})}})\,dr = 2\left(\frac{\pi}{2}\log 2 + \underbrace{\int_0^{\pi} \log(\sin r)\,dr}_{J}\right)$$

$$\Rightarrow J = -\pi \log 2.$$

Zpět k důkazu 2):

Bůno: $f(0) \neq 0$ (jinak $\frac{f(z)}{z^k}$). Z (JR) máme $\forall r \in (0,1)$:

$$\sum_{|a_j| \le r} \log\frac{r}{|a_j|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{it})|\,dt - \log|f(0)| \le 2\log C,$$

kde $C := \sup_{\mathbb{D}} |f| \; (>0)$.

$r \to 1-$:

$$\sum_j \log \frac{1}{|a_j|} \le 2 \log C =: K$$

$\exists x_0 > 1: \ \frac{1}{2}(x-1) \le \log x \le x-1 \quad \forall x \in \langle 1, x_0 \rangle$

Protože $|a_j| \to 1$, máme z předchozího

$$\sum \log \frac{1}{|a_j|} < \infty \iff \sum \left(\frac{1}{|a_j|} - 1\right) < \infty$$
$$\Updownarrow$$
$$\sum \frac{1-|a_j|}{|a_j|} < \infty$$
$$\Updownarrow$$
$$\sum (1-|a_j|) < \infty$$

□

<u>Poznámka</u>. Věta platí dokonce pro $f \in N$ (Nevanlinnova třída).

<u>Definice</u>. Funkce $f \in N$, pokud $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ a platí

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overset{+}{\log} |f(re^{it})| \, dt < \infty,$$

kde

$$\overset{+}{\log} t := \chi_{\langle 1,\infty)} \log t .$$

<u>Cvičení</u>. $N \supset H^s$ $(0 < s < \infty)$

<u>Věta</u>. Je-li $f \in H^\infty$ a $f \not\equiv 0$, potom

$$f^*(e^{i\vartheta}) = \lim_{r \to 1-} f(re^{i\vartheta}) \neq 0 \text{ pro s.v. } \vartheta.$$

<u>Důkaz</u>. Bůno $f(0) \neq 0$ a $|f| \le 1$. Potom $\forall\, 0<r<1$:

$$-\infty < \log|f(0)| \overset{(JR)}{\le} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{it})| \, dt}_{=:\varphi_r(f) \ldots \text{ neklesající v } r} \overset{?}{\le}$$

$$\overset{?}{\le} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|f^*(e^{it})| \, dt .$$

$\Rightarrow \log|f^*| > -\infty$ s.v. na $\mathbb{T}$ $\Rightarrow f^* \neq 0$ s.v. na $\mathbb{T}$.

Fatouovo lemma:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (-\log|f^*(e^{it})|) \, dt \le \lim_{r\to 1-} \int_{-\pi}^{\pi} (-\log|f(re^{it})|) \, dt$$

□

<u>Hraniční chování konformních zobrazení.</u>

<u>Riemannova věta</u>: Je-li $\emptyset \neq \Omega \subsetneq \mathbb{C}$ j.s. oblast, potom existuje hol. $f: \Omega \overset{na}{\twoheadrightarrow} \mathbb{D}$.

<u>Důsledek</u>. Jsou-li $\Omega_1, \Omega_2 \subsetneq \mathbb{C}$ neprázdné j.s. o., potom $\exists$ prostá holomorfní $f: \Omega_1 \twoheadrightarrow \Omega_2$.

<u>Problém</u>. Nechť $\emptyset \neq \Omega \subsetneq \mathbb{C}$ je j.s.o., $f: \Omega \overset{(na)}{\twoheadrightarrow} \mathbb{D}$ je prosté holomorfní. Jaké je hraniční chování f?

<u>Věta</u> (Caratheodory).
Zobrazení f lze rozšířit na homeomorfismus $\bar{f}: \overline{\Omega} \twoheadrightarrow \overline{\mathbb{D}}$, právě když $\partial\Omega$ je tvořena Jordanovou křivkou (tj. existuje J.K. φ na $\langle 0,1 \rangle$ taková, že $\varphi(\langle 0,1\rangle) = \langle \varphi \rangle = \partial\Omega$)

<u>Poznámka</u>. (i) Spojitá křivka $\varphi: \langle 0,1 \rangle \to \mathbb{C}$ je Jordanova, je-li prostá a uzavřená.

(ii) Zřejmě spojitá $\varphi: \langle 0,1 \rangle \to \mathbb{C}$ je Jordanova, právě když
$$\tilde{\varphi}(e^{2\pi i t}) := \varphi(t), \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$
je homeomorfismus na $\mathbb{T}$.

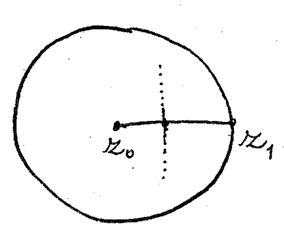
(iii) Implikace „$\Rightarrow$" v Car. větě je jasná:
$$\bar{f}: \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}} \ ; \quad \tilde{\varphi} := (\bar{f})_{-1}\big|_{\mathbb{T}}$$

Věta (Painlevé).
Je-li $\partial\Omega$ navíc C^∞, potom $\overline{f}$ je difeomorfismus na $\overline{\Omega}$, tj. $\overline{f} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ a $\overline{f}^{-1} \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$.

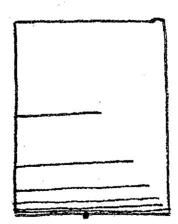
Poznámka. Carathéodory a Painlevé platí, i když místo $\mathbb{D}$ uvažujeme „vhodnou" omezenou j. s. o. v $\mathbb{C}$.

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená (oblast) a $z_0 \in \partial\Omega$.
Řekneme, že z_0 je jednoduchý hraniční bod Ω, pokud pro každou posloupnost $\{z_n\} \subset \Omega$, $z_n \to z_0$ existuje spojitá křivka φ na $\langle 0,1\rangle$ a existuje rostoucí $\{t_n\} \subset \langle 0,1)$ tak, že
- $\varphi(t_n) = z_n \ \forall n$,
- $(\langle 0,1)) \subset \Omega$
- $\varphi(1) = z_0$.

Příklad. (i) $\mathbb{D}$. Stačí uvažovat pro $\{z_n\}$ lomenou čáru „spojující po řadě" body z_n.
Zřejmě všechny body libovolné konvexní oblasti jsou jednoduché.

(ii)


Body na (z_0, z_1) nejsou jednoduché.

(iii)

„nekonečný hřeben"
Body ze spodní hrany nejsou dosažitelné.

Definice. z_0 je dosažitelný hraniční bod, existuje-li spojitá křivka φ na $\langle 0,1\rangle$ taková, že $\varphi(\langle 0,1)) \subset \Omega$ a $\varphi(1) = z_0$.

Věta. Nechť Ω je omezená jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{C}$, $f: \Omega \twoheadrightarrow \mathbb{D}$ je prostá a holomorfní. Potom platí:

(1) Je-li $\beta \in \partial\Omega$ jednoduchý, potom f lze spojitě rozšířit na $\Omega \cup \{\beta\}$.
V tomto případě je $|f(\beta)| = 1$.

(2) Jsou-li $\beta_1, \beta_2 \in \partial\Omega$ dva různé jednoduché hraniční body, potom f rozšířená spojitě na $\Omega \cup \{\beta_1, \beta_2\}$ (podle (1)) splňuje: $f(\beta_1) \neq f(\beta_2)$.

(3) Jsou-li všechny hraniční body Ω jednoduché, pak f lze rozšířit na homeomorfismus $\overline{f}: \overline{\Omega} \twoheadrightarrow \overline{\mathbb{D}}$, speciálně $\partial\Omega$ je tvořena Jordanovou křivkou. Navíc platí i obrácení: je-li $\partial\Omega$ tvořena Jordanovou křivkou, pak jsou všechny hraniční body jednoduché.

Důkaz. Dokážeme jen (1).
Sporem. Nechť existuje posloupnost $\{a_n\} \subset \Omega$, $a_n \to \beta$ taková, že
$f(a_{2n}) \to w_1$ a $f(a_{2n+1}) \to w_2$, $w_1 \neq w_2$.
Protože β je jednoduchý, existuje $\gamma: \langle 0,1\rangle \xrightarrow{\text{spoj.}} \Omega \cup \{\beta\}$ a rostoucí $\{t_n\} \subset \langle 0,1)$ tak, že $\gamma(1) = \beta$ a $\gamma(t_n) = a_n \ \forall n$.
Položme $\Gamma := f \circ \gamma$ na $\langle 0,1)$.

Ukážeme, že $\lim_{s\to 1-} |\Gamma(s)| = 1$ (*), speciálně $|w_1| = |w_2| = 1$.

Nechť $0<r<1$ a $g := f_{-1}$. Položme

$K_r := g(\overline{U(0,r)})$.

Zřejmě K_r je kompakt v Ω.

Existuje $s_0 \in (0,1)$ takové, že $\forall s \in (s_0, 1)$: $\gamma(s) \notin K_r$, neboli $|\Gamma(s)| > r$. Odtud (*).

Zřejmě alespoň jeden z oblouků J, jejichž sjednocením je $\mathbb{T} \setminus \{w_1, w_2\}$, má následující vlastnost:

Pro každý $z_0 \in J$ a pro každé $r \in (0,1)$ existuje bod ležící na $\langle\Gamma\rangle \cap \{s z_0, s \in \langle r, 1\rangle\}$.

Zřejmě $g \in H^\infty$. Proto g má radiální limity ve s.v. bodech oblouku J.

Připomeňme: $\Gamma(s) = f(\gamma(s))$ neboli $\gamma(s) = g(\Gamma(s))$, $0 \le s < 1$.

Tedy $\lim_{s\to 1-} g(s e^{i\vartheta}) = \beta$

pro s.v. ϑ taková, že $e^{i\vartheta} \in J$.

Protože $g - \beta \in H^\infty$, $(g-\beta)^* = 0$ na J s.v.,
$\underset{\text{hran. hodnoty}}{\uparrow}$

musí platit $g \equiv \beta$ na $\mathbb{D}$, což je spor s prostotou g. $\square$

Zobecnění Riemannovy věty a Caratheodoryho věty pro konečně souvislé oblasti.

Definice. Řekneme, že oblast $\Omega \subset \mathbb{C}$ je konečně (K-) souvislá, pokud $\mathbb{S} \setminus \Omega$ má konečně (K) komponent.

Věta (Koebe).
Nechť $K \geq 1$ a $\Omega \subset \mathbb{C}$ je K-souvislá oblast. Potom existuje prosté holomorfní zobrazení f na Ω takové, že

$f(\Omega) = \mathbb{D} \setminus \bigcup_{j=1}^{K-1} D_j$, kde D_j jsou po dvou disjunktní uzavřené kruhy v $\mathbb{D}$, přičemž D_j mohou být jednobodové.

Definice. Nechť $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ jsou oblasti. Řekneme, že Ω_1 a Ω_2 jsou konformně ekvivalentní, existuje-li prostá holom. f Ω_1 na Ω_2.

Píšeme: $\Omega_1 \sim \Omega_2$.

1-souvislé oblasti – třídy ekvivalence:

(i) $\emptyset$
(ii) $\mathbb{C}$
(iii) $\mathbb{D}$

2-souvislé oblasti:

(i) ani jedna komponenta $\mathbb{S} \setminus \Omega$ není jednobodová. Potom $\Omega \sim P(0, r, 1)$ ($0<r<1$, mezikruží). Pro každé r se ale jedná o jinou třídu ekvivalence.
(ii) Obě komponenty $\mathbb{S} \setminus \Omega$ jsou jednobodové. Potom $\Omega \sim \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
(iii) Právě jedna komponenta je jednobodová. Potom $\Omega \sim \mathbb{D} \setminus \{0\}$

Caratheodoryho věta o rozšiřování konformních zobrazení na homeomorfismy uzávěrů daných oblastí platí i pro konečně souvislé omezené oblasti ohraničené konečně mnoha Jordanovými křivkami.

Funkce více komplexních proměnných.

Víme: Nechť $U \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f: U \to \mathbb{C}$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) ex. f' všude na U (Cauchy.)

(2) f lze lokálně rozvést do mocninné řady v U. (Weierstrass.)

(3) $f \in C^1(U)$ a $\bar{\partial} f := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$ na U, kde $z = x + iy$, $z \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. (Riemann.)

Nechť $U \subset \mathbb{C}^n$ je ot. a $f: U \to \mathbb{C}$.
Potom zobecníme (1), (2), (3) následovně:

(1*) Řekneme, že f je na U <u>odděleně holomorfní</u>, pokud existují $\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}$ všude na U.

(2*) Řekneme, že f je <u>holomorfní</u> na U, pokud lze f lokálně na U rozvést do mocninné řady.

(3*) $f \in C^1(U)$ a $\bar{\partial}_{z_1} f = \bar{\partial}_{z_2} f = \dots = \bar{\partial}_{z_n} f = 0$, kde $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $z_j = \underset{\mathbb{R}}{\overset{\cap}{x_j}} + i\underset{\mathbb{R}}{\overset{\cap}{y_j}}$ a

$$\bar{\partial}_{z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

<u>Poznámka.</u> (3*) ⟹ (1*) jasné.
(2*) ⟹ (3*) bude snadno plynout z vlastností moc. řad.
(1*) ⟹ (2*) Hartogsova věta (hluboká)

Mocninné řady v $\mathbb{C}^n$

$$\sum_\alpha a_\alpha (z-w)^\alpha := \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0 \\ \text{celá}}} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} (z_1 - w_1)^{\alpha_1} \cdots (z_n - w_n)^{\alpha_n} \qquad (*)$$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$
$z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$
$z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \cdot z_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot z_n^{\alpha_n}$

1) <u>Konvergence (*)</u>. Řadu (*) chápeme jako zobecněnou řadu.

<u>Poznámka.</u> $\sum_{\alpha \in I} a_\alpha := \int_I a_\alpha \, d\mu(\alpha)$, kde μ je sčítací míra na I

(a) $a_\alpha \geq 0$: $\sum_{\alpha \in I} a_\alpha := \sup \left\{ \sum_{\substack{K \subset I \\ \text{konečná}}} a_\alpha \right\}$

(b) $a_\alpha \in \mathbb{C}$: $a_\alpha = \operatorname{Re} a_\alpha + i \operatorname{Im} a_\alpha = (\operatorname{Re} a_\alpha)^+ - (\operatorname{Re} a_\alpha)^- + i((\operatorname{Im} a_\alpha)^+ - (\operatorname{Im} a_\alpha)^-)$

<u>Poznámka:</u> Snadno máme: $\sum a_\alpha$ kvg. $\Leftrightarrow \sum |a_\alpha|$ kvg.

<u>Označení.</u> Nechť $w \in \mathbb{C}^n$ a $r \in (0, \infty)^n$. Potom

$$U(w, r) := \bigtimes_{j=1}^n U(w_j, r_j)$$

$$\overline{U}(w, r) := \{ z \in \mathbb{C}^n ; |z_j - w_j| \leq r_j \ \forall j = 1, \dots, n \}.$$

Běžno $w = 0$.

2) Konverguje-li (*) v $z \in \mathbb{C}^n$, potom (*) konverguje stejnoměrně na $\overline{U}(0, r)$, kde $r_j = |z_j|$. Navíc platí Cauchyho odhady:

$\exists\, C>0\ \forall \alpha : |a_\alpha| r^\alpha \le C.$ (CO)

Skutečně: nechť $u \in \mathbb{C}^n$ a $|u_j| \le |z_j|\ \forall j$. Potom

$$|a_\alpha||z^\alpha| = |a_\alpha||z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}| \ge |a_\alpha||u_1^{\alpha_1} \cdots u_n^{\alpha_n}| = |a_\alpha u^\alpha|.$$

Zřejmě $|a_\alpha| r^\alpha \le \sum_\alpha |a_\alpha z^\alpha| =: C < \infty.$

3) Nechť platí (CO). Potom (*) konverguje lokálně stejnoměrně na $U(0,r)$.

Důkaz. Nechť $0 < s_j < r_j$ a $|z_j| \le s_j$. Potom

$$\sum_\alpha |a_\alpha \cdot z^\alpha| \le \sum_\alpha |a_\alpha| s^\alpha \le \sum_\alpha C \frac{s^\alpha}{r^\alpha} = \sum_{\substack{\alpha_j \ge 0 \\ \forall j}} \left(\frac{s_1}{r_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{s_n}{r_n}\right)^{\alpha_n} =$$
$$= C \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \left(\frac{s_1}{r_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} \left(\frac{s_n}{r_n}\right)^{\alpha_n}$$

4) Oborem konvergence (*) nazveme největší otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, na které (*) konverguje.

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} (z_1 z_2)^k$ kvg. $\iff |z_1||z_2| < 1$

Cvičení. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ a Ω je oborem konvergence nějaké řady (*). Potom

(a) Ω je oblast (z 2))

(b) $z \in \Omega$, $u \in \mathbb{C}^n$, $|u_j| \le |z_j|\ \forall j \Rightarrow u \in \Omega$

(c) $\Omega^* := \{[\log|z_1|, \dots, \log|z_n|]\,;\ z \in \Omega \text{ a } z_j \ne 0\ \forall j\}$ je konvexní

Pokud nějaká $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ splňuje tyto podmínky, je už potom oborem konvergence nějaké mocninné řady.

Věta 1. Nechť (*) konverguje na $U(w,r)$, kde $r_j > 0\ \forall j$ a (*) má součet f. Potom f je spojitá funkce na U, odděleně holomorfní a má všechny

$$\partial^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}} \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

na U, které dostaneme derivováním řady formálně člen po členu. Speciálně

$$\left(f(z) = \sum_\alpha a_\alpha (z-w)^\alpha\right)$$

$$\forall \alpha : a_\alpha = \frac{\partial^\alpha f(w)}{\alpha!}, \text{ kde } \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!.$$

Řada (*) je jednoznačně určena svým součtem.

Důkaz. Búno $w = 0$;

(i) Součet f je spojitý (z 2)),

(ii) $f(z) = \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} \left(\sum_{\alpha'} a_{(\alpha',\alpha_n)} (z')^{\alpha'} \right) z_n^{\alpha_n}$

$z = (z', z_n)$, z' fixované proměnné

$$\frac{\partial f}{\partial z_n} = \sum_{\alpha_n=1}^{\infty} \left(\sum_{\alpha'} a_{(\alpha',\alpha_n)} (z')^{\alpha'} \right) \alpha_n z_n^{\alpha_n - 1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_n} = \sum_{\alpha=(\alpha',\alpha_n)} \alpha_n a_{(\alpha',\alpha_n)} (z')^{\alpha'} (z_n)^{\alpha_n - 1},$$ protože

zobecněná řada vpravo vždy konverguje.

(Snadno jako v 3)). $\square$

Věta 2. (Cauchyho vzorec pro n proměnných.) nechť f je odděleně holomorfní na $U(w,R)$, $0<r_j<R_j$ a $\varphi_j(t):=w_j+r_je^{it}$, $t\in\langle 0,2\pi)$. Potom pro každý $z\in U(w,r)$ máme

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\varphi_n}\Big(\cdots\Big(\int_{\varphi_1}\frac{f(\xi_1,\dots,\xi_n)}{(\xi_1-z_1)\cdots(\xi_n-z_n)}\,d\xi_1\Big)\cdots\Big)d\xi_n. \quad (CV)$$

Důkaz. $n=1$ známe.

$n-1\longrightarrow n$:

$z=(z',z_n)\in\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{C}$. Potom

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{pevné}}}{f(z',z_n)}\overset{CV(1)}{=}\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_n}\frac{f(z',\xi_n)}{\xi_n-z_n}\,d\xi_n\overset{IP}{=}\int_{\varphi_n}\frac{1}{2\pi i}\int\cdots\int\cdots d\xi_1\cdots d\xi_n$$

□

Poznámka. V (CV) nezáleží na pořadí jednotlivých křivkových integrálů

Pozor: Nemáme žádnou informaci o integrálu vůči z (podle vícerozměrné míry)

Věta 3. nechť f je odděleně holomorfní a spojitá na ot. $U\subset\mathbb{C}^n$, $U:=U(w,R)$ (mnohokruh).

Potom

$$f(z):=\sum_\alpha a_\alpha(z-w)^\alpha,\ z\in U(w,R) \quad (*)$$

a

$$a_\alpha=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\varphi_n}\Big(\cdots\Big(\int_{\varphi_1}\frac{f(\xi_1,\dots,\xi_n)}{(\xi_1-w_1)^{\alpha_1+1}\cdots(\xi_n-w_n)^{\alpha_n+1}}\,d\xi_1\Big)\cdots\Big)d\xi_n.$$

Důkaz. Dosadíme (CV) následující rozvoje: ($\varphi_j=r_je^{it}$, $0<r_j<R_j$)

$$\frac{1}{\xi_j-z_j}=\frac{1}{(\xi_j-w_j)-(z_j-w_j)}=\frac{1}{\xi_j-w_j}\cdot\frac{1}{1-\frac{z_j-w_j}{\xi_j-w_j}}=$$

$$=\sum_{\alpha_j=0}^{\infty}\frac{(z_j-w_j)^{\alpha_j}}{(\xi_j-w_j)^{\alpha_j+1}}$$

Protože f je spojitá, můžeme zaměnit sumy a křivkové integrály (rozmyslet). Zbývá si rozmyslet, že $(*)$ konverguje.

Cauchyho odhad:

$$|a_\alpha|\le\frac{1}{(2\pi i)^n}\sup_{\overline{U}(w,r)}|f|\,\frac{2\pi r_1\cdots 2\pi r_n}{r_1^{\alpha_1+1}\cdots r_n^{\alpha_n+1}}=\frac{1}{r^\alpha}\sup_{\overline{U}(w,r)}|f|$$

$(|\xi_j-w_j|=r_j)$

Odtud lokálně stejnoměrná konvergence na celém mnohokruhu $U(w,R)$ □

Definice. Řekneme, že komplexní funkce f definovaná na ot. $U\subset\mathbb{C}^n$ je holomorfní, pokud pro každý $w\in U$ existuje $U(w,R)$ v U takový, že

$$f(z)=\sum_\alpha a_\alpha(z-w)^\alpha;\ z\in U(w,R).$$

Věta. (Slabá Hartogsova).
Funkce f je holomorfní, právě když je odděleně holomorfní a spojitá.

Důkaz. „$\Rightarrow$" z věty 1.
„$\Leftarrow$" z věty 3. □

Poznámka. Věta platí i bez předpokladu spojitosti.

Příklad. $f(z_1,z_2):=z_1z_2$

$f=0 \iff z_1=0 \vee z_2=0$

$\Rightarrow$ nulové body nejsou izolované.

Věta. („Slabá o jednoznačnosti").
Nechť $U \subset \mathbb{C}^n$ je oblast a f je holomorfní na U. NTJE:

(1) $f \equiv 0$ na U,

(2) existuje $z_0 \in U$ takový, že $D^\alpha f(z_0) = 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$,

(3) existuje $U(z_0, R) \subset U$, že $f = 0$ na $U(z_0, R)$.

Důkaz. $(3) \Rightarrow (2)$ jasné.

$(2) \Rightarrow (3)$: Víme, že $f(z) = \sum_\alpha \frac{D^\alpha f(z_0)}{\alpha!}(z - z_0)^\alpha = 0$, $z \in U(z_0, R)$.

$(2) \& (3) \Rightarrow (1)$: Uvažujme

$M := \{z_0 \in U;\ \exists U(z_0, R): f = 0 \text{ na } U(z_0, R)\} =$

$= \{z_0 \in U,\ D^\alpha f(z_0) = 0\ \forall \alpha\}$

Zřejmě M je otevřená (z prvního popisu) a uzavřená (z druhého popisu).

$(1) \Rightarrow (2)$ zřejmé! □

Věta (Weierstrass).
Nechť $U \subset \mathbb{C}^n$ je otevřená, f_m jsou holomorfní funkce na U a $f_m \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na U.
Potom f je holomorfní a $D^\alpha f_m \overset{loc}{\rightrightarrows} D^\alpha f \ \forall \alpha$.

Důkaz. (i) f je spojitá a odděleně holomorfní, protože: $z = (z', z_n)$, víme:

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{pevné}}}{f_m(z', \cdot)} \overset{loc}{\rightrightarrows} f(z', \cdot) \underset{(1D)}{\overset{\text{Wstr.}}{\Longrightarrow}}$ existuje $\frac{\partial f}{\partial z_n} \in \mathbb{C}$

(ii) cvičení! □

Hartogsův paradox.

Nechť $U(w, R) \subset \mathbb{C}^n$, kde $n > 1$, nechť $K \subset U(w, R)$ je kompakt a $U(w, R) \setminus K$ je souvislý. Je-li f holomorfní na $U(w, R) \setminus K$, potom $\exists!$ holomorfní F na $U(w, R)$ taková, že

$F = f$ na $U(w, R) \setminus K$.

Důsledek 1. Každá izolovaná singularita holomorfní funkce více kompl. proměnných je odstranitelná.

Důsledek 2. Holomorfní funkce více kompl. proměnných nemají izolované nulové body.

Důkaz. Je-li z_0 izolovaný nulový bod f, potom je z_0 izolovaná singularita $\frac{1}{f}$, ale ta je odstranitelná ↯ □

Věta (Hartogsův paradox).
Nechť $n > 1$, $U(0, r) \subset \mathbb{C}^n$ a $r = (r', r_n)$.
Nechť $U \subset U(0, r)$ je oblast. Označme pro každé $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$: $U_{z'} := \{z_n \in \mathbb{C},\ (z', z_n) \in U\}$.
Předpokládejme, že

(i) $\exists s \in (0, r_n)$ takové, že $U(0, r_n) \setminus U_{z'} \subset \overline{U(0, s)}$;

(ii) množina všech bodů $z' \in U(0, r')$, pro které $U_{z'} = U(0, r_n)$ má alespoň jeden vnitřní bod.

Potom každou holomorfní funkci f na U lze jednoznačně rozšířit na holomorfní funkci na celém $U(0, r)$.

Poznámka. Tvrzení platí speciálně pro $U = U(0, r) \setminus K$, je-li U oblast a K je kompakt.

__Důkaz.__ Nechť f je holomorfní na U. Nechť $z \in U(0,r)$, $z=(z', z_n)$. Volme kladně orientovanou kružnici γ kolem 0, která má ve vnitřku z_n i $\overline{U(0,s)}$.

Položme $\hat{f}(z', z_n) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z',\xi)}{\xi - z_n}\,d\xi$. $(*)$

Z Cauchyho věty je jasné, že integrál v $(*)$ nezávisí na volbě γ s požadovanými vlastnostmi.

Nechť $0 < s < s_1 < s_2 < r_n$. Potom pro každé $(z', z_n) \in U(0,r') \times \overline{U(0,s_1)}$ je

$$\hat{f}(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z',\xi)}{\xi - z_n}\,d\xi, \quad (**)$$

kde $\gamma(t) := s_2 e^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Ukážeme, že $\hat{f}$ je holomorfní na $U(0,r') \times U(0,s_1)$. To plyne z toho, že:

(1) $\hat{f}$ je odděleně holomorfní z $(**)$ a z věty o derivování integrálu závislého na komplexním parametru a

(2) $\hat{f}$ je spojitá: Nechť $0 < p_j < r'_j$ a $L := \overline{U(0,p)} \times \overline{U(0,s_1)}$. Ukážeme, že $\hat{f}$ je spojité na L (tj. stejnoměrně). Nechť $(z', z_n), (v', v_n) \in L$. Potom

$$|\hat{f}((z', z_n)) - \hat{f}((v', v_n))| \le \underbrace{|\hat{f}((z', z_n)) - \hat{f}((z', v_n))|}_{(A)} + \underbrace{|\hat{f}((z', v_n)) - \hat{f}((v', v_n))|}_{(B)}$$

$$(A) = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left(\frac{f(z',\xi)}{\xi - z_n} - \frac{f(z',\xi)}{\xi - v_n}\right)d\xi\right| \le$$

$$\le \frac{2\pi s_2}{2\pi} \sup_{(z',\xi)\in\overline{U(0,p)}\times\langle\gamma\rangle} |f| \,\frac{|z_n - v_n|}{(s_2 - s_1)^2}, \text{ protože}$$

$$\left|\frac{1}{\xi - z_n} - \frac{1}{\xi - v_n}\right| = \left|\frac{z_n - v_n}{(\xi - z_n)(\xi - v_n)}\right| \le \frac{|z_n - v_n|}{(s_2 - s_1)^2}$$

$$(B) = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z',\xi) - f(v',\xi)}{\xi - v_n}\,d\xi\right| \le$$

$$\le \frac{2\pi s_2}{2\pi}\cdot\frac{1}{s_2 - s_1} \sup_{\substack{z'\in\overline{U(0,p)} \\ \xi\in\langle\gamma\rangle}} |f(z',\xi) - f(v',\xi)|.$$

Nechť $\varepsilon > 0$. Volme $\delta > 0$, aby

(a) $(A) < \frac{\varepsilon}{2}$, je-li $|z_n - v_n| < \delta$;

(b) $(B) < \frac{\varepsilon}{2}$, je-li $|z' - v'| < \delta$.

Tedy $\hat{f}$ je spojitá na L. $\hat{f} = f$ na U z existence vnitřního bodu $\{U_z^! = U(0, r_n)\}$ $\square$

Existence a jednoznačnost řešení DR v $\mathbb{C}$.

1) __Soustava lineárních diferenciálních rovnic.__

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{aligned} \quad (1)$$

Dáno a_{jk}, b_j, hledáme y_j, pro které platí

$$y_1(x_0) = y_{10}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0} \quad (2)$$

__Věta.__ Nechť $x_0 \in \mathbb{C}$; $y_{10}, \dots, y_{m0} \in \mathbb{C}$ a všechny a_{jk}, b_j jsou holomorfní na $U(x_0, R)$. Potom existují jediné holomorfní funkce $y_1, \dots, y_n$ na $U(x_0, R)$, pro které platí (1) a (2).

__Důkaz.__ Bůno $x_0 = 0$, $y_{10} = \dots = y_{m0} = 0$. Nechť $0 < r < R$. Nechť $a_{jk}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{jkn} x^n$ a

$$b_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{jn} x^n.$$

Zřejmě $|a_{jkn} x^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_{jkn}| |x|^n \leq M < \infty$, $|x| \leq r$.

Tedy $|a_{jkn}| \leq \frac{M}{r^n}$,

$$|b_j| \leq \frac{M}{r^n}$$

(M bereme společné pro $\forall$ koeficienty, neb je jich konečně mnoho.)

1) Předpokládejme, že (1) má řešení

$$y_j = \sum_{n=1}^{\infty} c_{jn} x^n, \quad x \in U(0, r).$$
$(\Rightarrow$ p.p.$)$

$$y_j' = \sum_{n=1}^{\infty} c_{jn} \cdot n \cdot x^{n-1} = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n a_{jkn} \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} c_{kl} x^l \right) + \sum_{n=0}^{\infty} b_{jn} x^n$$

$$\left.\begin{aligned} x^0&: \ 1 . c_{j1} = b_{j0} \\ x^{n-1}&: \ n c_{jn} = b_{jn-1} + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{m} a_{jkl} c_{k,n-1-l}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}\right\} (3)$$

Tedy pokud řešení existuje, je určeno jednoznačně.

Máme-li $y_j = \sum_{1}^{\infty} c_{jn} x^n$ s koeficienty splňujícími (3), pak y_j řeší naši soustavu, pokud tyto řady konvergují na $U(0, r)$.

K důkazu konvergence použijeme __Cauchyho metodu dominantních řad:__

$\sum d_n x^n$ má dominantní řadu $\sum D_n x^n$, pokud $D^n \geq |d_n|$.

Místo naší soustavy budeme řešit dominantní soustavu.

$$a_{jk}^{(x)} = \sum a_{jkn} x^n \dashrightarrow A_{jk}(x) := \sum \frac{M}{r^n} x^n = \frac{M}{1 - \frac{x}{r}}$$

$$b_j(x) = \sum b_{jn} x^n \ \dots \ B_j(x) := \frac{M}{1 - \frac{x}{r}}.$$

$$Y_j' = \frac{M}{1 - \frac{X}{r}} (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m + 1) \qquad (1^*)$$

$$Y_j(0) = 0 \qquad (2^*)$$

Pokud

$$Y_j = \sum_{n=1}^{\infty} C_{jn} X^n$$

řeší (1^*) na $U(0, r)$, potom $|c_{jn}| \leq C_{jn}$, neboť $|n c_{jn}| \leq |b_{jn-1}| + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{m} |a_{jkl}| |c_{k,n-1-l}| \leq$

$$\leq B_{jn-1} + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{m} A_{jkl} C_{k,n-1-l} = n C_{jn}.$$

Z (1^*) & (2^*) máme: $Y = Y_1 = \dots = Y_m$

$$\Rightarrow \quad Y' = \frac{M}{1 - \frac{X}{r}} (mY + 1) \qquad (1^{**})$$

$$Y(0) = 0 \qquad (2^{**})$$

Hledáme $Y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$, $x \in (0, r)$ (reálné), které řeší (1^{**})

$$\frac{Y'}{mY+1} = \frac{M}{1-\frac{x}{r}}$$

$$\frac{1}{m}\log(1+mY) = -Mr\log\left(1-\frac{x}{r}\right) + C$$

$x \to 0+: \quad 0 = 0 + C \Rightarrow \underline{C=0}.$

$$\log(1+mY) = \log\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-mMr}$$

$$Y = \frac{1}{m}\left(\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-mMr} - 1\right), \quad x\in(0,r).$$

$\square$

Analytické pokračování.

<u>Motivace</u> (Hledání primitivní funkce).

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast, $f \in \mathcal{H}(G)$, $z_0 \in G$. Hledáme $F \in \mathcal{H}(G)$ takovou, že $F' = f$ na G a $F(z_0) = 0$.

Jednoznačnost: ano.

Existence: např. na j. s. oblastech, spec. na otevřených kruzích.

<u>Definice</u>. Je-li D otevřený kruh v $\mathbb{C}$ a $f \in \mathcal{H}(D)$, potom (D,f) nazveme <u>holomorfní element</u>.

Jsou-li (D_0,f_0) a (D_1,f_1) dva holomorfní elementy, potom nazveme (D_1,f_1) <u>přímým pokračováním</u> (D_0,f_0), pokud $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$ a $f_0 = f_1$ na $D_0 \cap D_1$.

Píšeme: $(D_0,f_0) \approx (D_1,f_1)$.

<u>Poznámka</u>. Z věty o jednoznačnosti je (D_1,f_1) určeno (D_0,f_0) a D_1, pokud existuje.

<u>Definice</u>. <u>Řetězem</u> $\mathcal{C}$ nazveme posloupnost otevřených kruhů $D_0,\dots,D_n$ takovou, že $D_j \cap D_{j+1} \neq \emptyset \ \forall j = 0,\dots,n-1$.

Řekneme, že (D_n,f_n) je <u>analytickým pokračováním</u> holomorfního elementu (D_0,f_0) podél řetězu $\mathcal{C}$, pokud $\exists (D_j,f_j)$ takové, že $(D_j,f_j) \approx (D_{j+1},f_{j+1}) \ \forall\, j = 0,\dots,n-1$. Značíme:

$(D_0,f_0) \overset{\mathcal{C}}{\approx} (D_n,f_n)$

<u>Poznámka</u>. Z věty o jednoznačnosti je (D_n,f_n) jednoznačně určeno (D_0,f_0) a $\mathcal{C}$, pokud existuje.

<u>Příklad</u>. $f(z) := \frac{1}{z}$; $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$D_0 = U(1,1)$

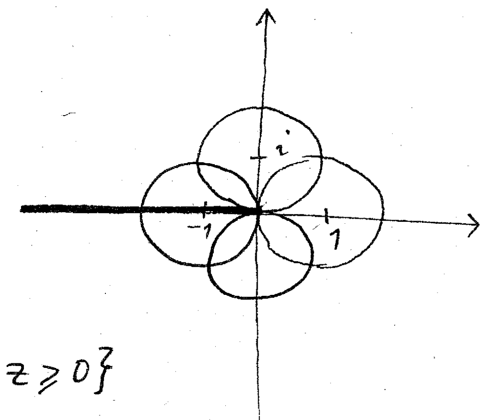
$f_0 = \log$

$D_1 = U(i,1)$

$f_1 = \log$

$D_2 = U(-1,1)$

$f_2 = \begin{cases} \log & \text{na } D_2 \cap \{\operatorname{Im} z \geq 0\} \\ \log + 2\pi i & \text{na } D_2 \cap \{\operatorname{Im} z < 0\} \end{cases}$



$D_3 = U(-i,1)$

$f_3 = \log + 2\pi i$

$D_4 = D_0$

$f_4 = \log + 2\pi i$

Poznámka. Relace $\approx$ není tranzitivní.

Lemma. Nechť $(D_0, f_0) \approx (D_1, f_1)$ a $(D_1, f_1) \approx (D_2, f_2)$. Je-li $D_0 \cap D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, potom

$$(D_2, f_2) \approx (D_0, f_0).$$

Důkaz. Protože $f_1 = f_2$ na $\underbrace{D_0 \cap D_1 \cap D_2}_{ot.} \neq \emptyset$, je z věty o jednoznačnosti $f_0 = f_2$ na $D_0 \cap D_2$. □

Definice. Nechť $\gamma : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{C}$ je spojitá křivka. Řekneme, že (D, f) je analytickým pokračováním (D_0, f_0) podél γ, pokud

(1) existuje řetěz $\mathcal{C}$ složený z kruhů $D_0, D_1, \dots, D_n = D$, který pokrývá γ, tj. existuje dělení $\underset{s_0}{0} < s_1 < \dots < s_n = 1$ takové, že $\gamma(\langle s_j, s_{j+1}\rangle) \subset D_j$ pro každé $j = 0, \dots, n-1$;

(2) $\gamma(0)$ je střed D_0 a $\gamma(1)$ je střed D;

(3) $(D_0, f_0) \overset{\mathcal{C}}{\approx} (D, f)$

Věta. Existuje nejvýše jedno analytické pokračování (D_0, f_0) podél křivky γ.

Přesněji: nechť $\mathcal{C} : D_0, D_1, \dots, D_n$ a

$\mathcal{C}' : D_0', D_1', \dots, D_m'$

jsou řetězy, které pokrývají γ. Dále nechť $D_0 = D_0'$!

nechť $(D_j, f_j) \approx (D_{j+1}, f_{j+1})$ pro $j = 0, \dots, n-1$ a $(D_j', g_j) \approx (D_{j+1}', g_{j+1})$ pro $j = 0, \dots, m-1$ a $g_0 = f = f_0$.

Nechť $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = s_{n+1} = 1$ a $0 = s_0' < s_1' < \dots < s_m' = s_{m+1}' = 1$ jsou dělení $\langle 0, 1\rangle$ takové, že

$$\gamma(\langle s_j, s_{j+1}\rangle) \subset D_j,$$

a $\gamma(\langle s_j', s_{j+1}'\rangle) \subset D_j'$.

Potom $(D_n, f_n) \approx (D_m', g_m)$, neboli

$$f_n = g_m \text{ na } D_n \cap D_m'.$$

Důkaz. $(D_j, f_j) \approx (D_k', g_k)$, pokud $\langle s_j, s_{j+1}\rangle \cap \langle s_k', s_{k+1}'\rangle \neq \emptyset$

To ukážeme sporem:

nechť $\exists\, j, k$ taková, že $\langle s_j, s_{j+1}\rangle \cap \langle s_k', s_{k+1}'\rangle \neq \emptyset$, ale $(D_j, f_j) \not\approx (D_k', g_k)$. Potom volme taková j, k, že jejich součet je nejmenší (a mají onu vlastnost.) Búno $s_j \geq s_k'$.

Zřejmě $j + k > 0$, a tudíž $j \geq 1$,

$\gamma(s_j) \in D_j \cap D_{j-1} \cap D_k'$.

Protože $j+k$ je minimální, máme

$$(D_{j-1}, f_{j-1}) \approx (D_k', g_k).$$

Protože

$$(D_{j-1}, f_{j-1}) \approx (D_j, f_j),$$

dostaneme z Lemmatu, že

$$(D_k', g_k) \approx (D_j, f_j) \ \lightning$$

nakonec stačí užít tvrzení na $j = n$ a $k = m$. □

Příklad. $D_0 = U(1,1)$

$f_0 = \log$

analytické pokračování (D_0, f_0) podél

$\varphi_k(t) := e^{i2\pi k t}$, $t \in \langle 0,1 \rangle$

je (D_0, f_k), kde $f_k = \log + 2\pi k$

Definice. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Pak jednoparametrickým systémem spojitých křivek z α do β rozumíme systém $\{\gamma_t\}_{t \in \langle 0,1 \rangle}$ splňující:

(i) $\gamma_t(s) = \varphi(t,s) \quad \forall t, s \in \langle 0,1 \rangle$,

(ii) $\gamma_t(0) = \alpha$, $\gamma_t(1) = \beta \quad \forall t \in \langle 0,1 \rangle$,

kde $\varphi : \langle 0,1 \rangle^2 \to \mathbb{C}$ je spojité zobrazení.

Věta. Je-li $\{\gamma_t\}_{t \in \langle 0,1 \rangle}$ jednoparametrický systém křivek z α do β, D je kruh se středem α a (f, D) lze pokračovat podél každé γ_t k elementu (g_t, D_t), pak $g_0 = g_1$ na $D_0 \cap D_1$.

Důkaz. Nechť $t \in \langle 0,1 \rangle$ je pevné. Nechť $\tau = \{A_0, \dots, A_n\}$ je řetěz pokrývající $\langle \gamma_t \rangle$, tedy $\exists$ dělení $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ takové, že $E_j := \gamma_t(\langle s_j, s_{j+1} \rangle) \subset A_j$ pro $\forall j = 1, \dots, n-1$. Nechť A_0 má střed α, A_n má střed β a $(f, D) \overset{\tau}{\sim} (g_t, D_t)$. Volme $\varepsilon > 0$ tak, že $\operatorname{dist}(E_j, \mathbb{C} \setminus A_j) \geq \varepsilon \ \forall j$. Ze stejnoměrné spojitosti funkce φ (z definice j.p. systému) $\exists \delta > 0$ takové, že

$$|\gamma_t(s) - \gamma_u(s)| = |\varphi(t,s) - \varphi(u,s)| < \varepsilon$$

pro $\forall u, s \in \langle 0,1 \rangle$, $|t-u| < \delta$.

Je-li $J_t := (t-\delta, t+\delta) \cap \langle 0,1 \rangle$, potom pro $\forall u \in J_t$ máme, že τ pokrývá i $\langle \gamma_u \rangle$, tedy $g_t = g_u$ na $D_u \cap D_t$ (jednoznačnost pokračování). Z kompaktnosti $\langle 0,1 \rangle$ $\exists t_1, \dots, t_m \in \langle 0,1 \rangle : \bigcup_{j=1}^{m} J_{t_j} = \langle 0,1 \rangle$. Snadno po konečně mnoha krocích: $g_0 = g_1$ na $D_0 \cap D_1$. $\square$

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast; Γ_0, Γ_1 jsou spojité křivky v G z α do β. Řekneme, že Γ_0 a Γ_1 jsou homotopické, existuje-li j.p. systém $\{\gamma_t\}_{t \in \langle 0,1 \rangle}$ spojitých křivek z α do β tak, že $\{\langle \gamma_t \rangle\} \subset G$ a $\gamma_0 = \Gamma_0$, $\gamma_1 = \Gamma_1$.

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast. Řekneme, že holomorfní element (f, D), kde $D \subset G$, je neomezeně pokračovatelný v G, pokud pro každou spojitou křivku γ v G začínající ve středu D lze (f, D) analyticky pokračovat.

Věta (O monodromii).

Nechť (f, D) je neomezeně pokračovatelný v oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Je-li navíc G jednoduše souvislá, pak existuje jediná $F \in \mathcal{H}(G)$ taková, že $F = f$ na D.

Důkaz. (i) Nechť γ_0, γ_1 jsou spojité křivky z α do β v jednoduše souvislé oblasti G. Pak jsou γ_0, γ_1 v G homotopické: Existuje homeomorfismus $h : G \twoheadrightarrow \mathbb{D}$. Položme pro $s, t \in \langle 0,1 \rangle$:

$$\gamma_t(s) := h^{-1}((1-t)(h \circ \gamma_0)(s) + t(h \circ \gamma_1)(s)).$$

Zřejmě $\{\gamma_t\}$ je hledaný systém.

(ii) Definujme $F := g$ na B, kde (g, B) je analytické pokračování podél nějaké spojité křivky (elementu (f, D)) v G. (Tato definice je korektní). $\square$