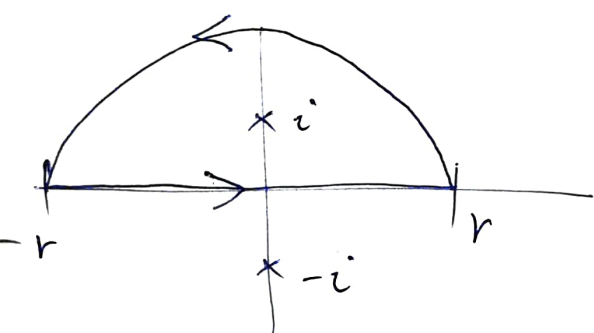


Integrals typu $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos x \, dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin x \, dx$

(a) Pokud racionální funkce R nemá póly na $\mathbb{R}$, převeďme tento integrál na typ $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{i\lambda x} \, dx$.

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{x \cdot \sin x}{x^2 + 1} \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{x \cdot e^{ix}}{x^2 + 1}}_{f(x)} \, dx$
 (suda' realne)

$= \frac{\pi}{2e}$, protože $\int_{-\infty}^{+\infty} f = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_i f = \frac{\pi i}{e}$



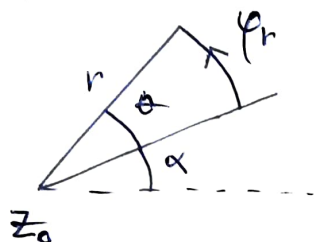
$\operatorname{res}_i f \stackrel{(P2)}{=} \frac{i e^{-1}}{2i} = \frac{1}{2e}$

(b) Pokud R na $\mathbb{R}$ má jednoduchý pól, užijeme následujícího Lemmu o oběha-
zku jednoduchého pólu:

Lemme: Nocht' f ma) v z_0 isolududly

pol. Nocht' $\alpha \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$, $r > 0$

$$\varphi_r(t) := z_0 + r e^{it}, \quad t \in [\alpha, \alpha + \theta].$$



Potom $\int_{\varphi_r} f \mapsto i\theta \cdot r \alpha z_0 f$ pro $r \rightarrow 0$.

Důkaz: Máme

$$\int_{\varphi_r} f = \int_{\varphi_r} \left(\frac{a_{-1}}{z - z_0} + \underbrace{a_0 + a_1(z - z_0) + \dots}_{h(z)} \right) dz =$$

$h(z)$ je holomorfna na $U(z_0, \text{ome} z_0)$

$$= a_{-1} \int_{\varphi_r} \frac{dz}{z - z_0} + \int_{\varphi_r} h \rightarrow i \cdot \theta \cdot a_{-1} \text{ pro } r \rightarrow 0$$

$$i\theta = \int_{\alpha}^{\alpha+\theta} \frac{ir e^{it} dt}{r e^{it}}$$

$$\int_{\varphi_r} h \xrightarrow{z_0} 0 \text{ pro } r \rightarrow 0$$

pro to z_0 $\textcircled{2}$ platí: $\left| \int_{\varphi_r} h \right| \leq \theta \cdot r \cdot \max_{\langle \varphi_r \rangle} |h| \rightarrow 0 \text{ pro } r \rightarrow 0$
 (ome z_0)

