Rovinné vektorové pole

Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená a $V: G \to \mathbb{R}^2$ je třídy $\mathcal{C}^1$. Potom vektorové pole V nazýváme

(1) nestlačitelné, pokud

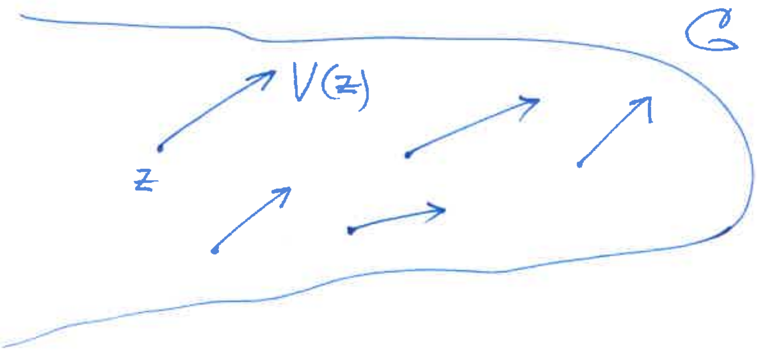
$$\operatorname{div} V := \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 0 \text{ na } G;$$

divergence

(2) nevírové, pokud

$$\operatorname{rot} V := \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0 \text{ na } G.$$

rotace



$\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$: $z = x + iy = (x, y)$, $V = V_1 + iV_2$

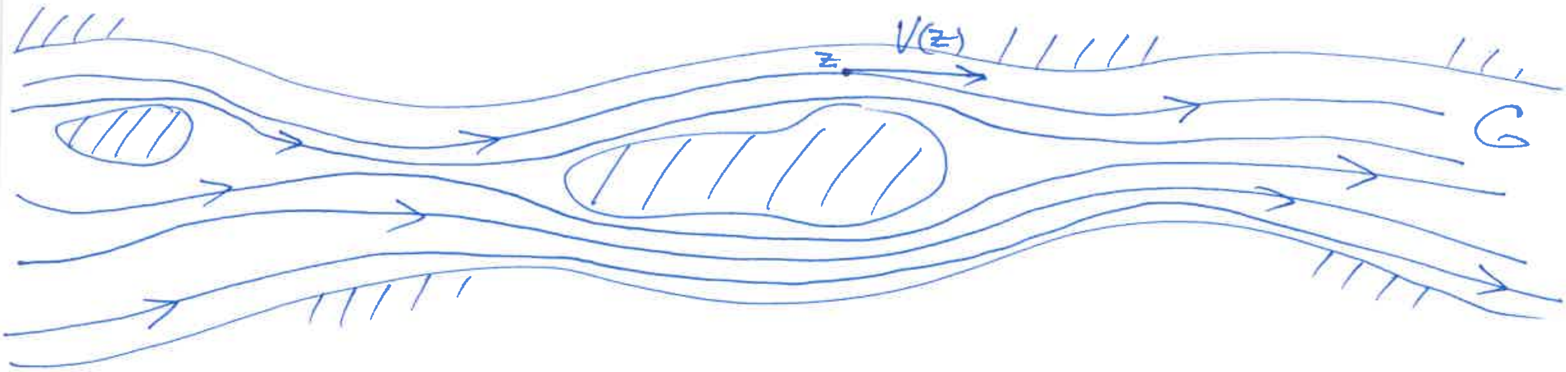
POZOROVÁNÍ 1 V je nestlačitelné a nevírové pole na G, právě když $f := \overline{V} \in \mathcal{H}(G)$ (tzn. V je antiholomorfní)

[(1), (2) $\Leftrightarrow$ (CR) pro $f = V_1 - iV_2$]

Aplikace

1. Proudění kapaliny:

rovinné, stacionární (nezávislé na čase), nestlačitelné, nevírové



Kapalina je soubor částic, které se pohybují v G, a to rychlostí $V(z)$ v bodě $z \in G$.
Trajektorie částic kapaliny jsou řešení

$$\boxed{\dot{z}(t) = V(z(t)), \quad z = z(t)}$$

čas

2. Stacionární elektrické pole

- $V(z)$ je síla, kterou působí elektrické pole na jednotkový kladný náboj v bodě z

Komplexní potenciál V

Nechť f má na G primitivní funkci F, tzn. $F' = f$ na G. Nechť $F = \phi + i\Psi$. Potom

(1.) ϕ je potenciál V, tzn. $\nabla\phi := \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = V$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial x}}_{\overset{(CR)}{=} -\frac{\partial\phi}{\partial y}} = F' = V_1 - iV_2$$

(2.) $\nabla\phi \perp \nabla\psi$ (z (CR))

(3.) ψ je tzv. proudová funkce V, tzn. vrstevnice/množiny*) Ψ (tzn. $\{\psi = c\}$ pro $c \in \mathbb{R}$) jsou proudnice, tj. křivky, po kterých se částice kapaliny pohybují.

Pozn: *) je-li ψ nadmořská výška, potom to jsou vrstevnice na mapě

Nechť $\dot{z}(t) = V(z(t))$, $t \in (a,b)$. Potom

$$\frac{d}{dt}\left(\psi(z(t))\right) = \langle \nabla\psi, \underset{\underset{V}{\parallel}}{\dot{z}} \rangle \overset{(1.)}{=} \langle \nabla\psi, \nabla\phi \rangle \overset{(2.)}{=} 0,$$

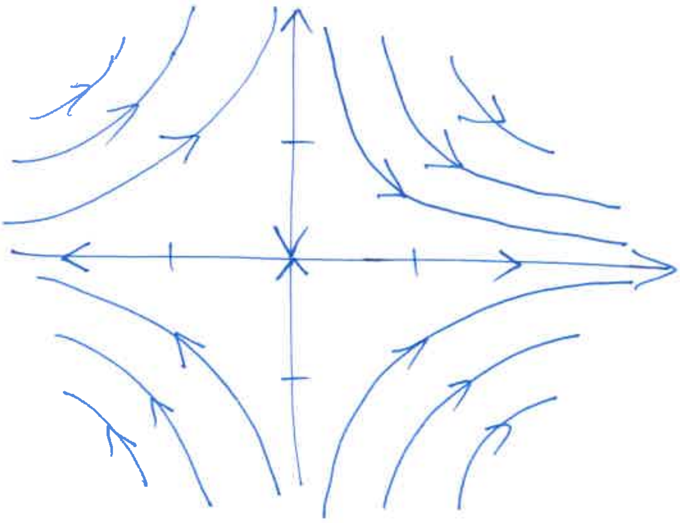
kde $\langle z, w \rangle := \mathrm{Re}(z\bar{w})$, $z, w \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ je Euklid. skalární součin v $\mathbb{R}^2$.

VP4

Př. 1 $V(z) = \bar{z} = (x, -y)$

$f(z) = z$, $F(z) = \frac{z^2}{2}$, $\phi = \frac{x^2 - y^2}{2}$

$\psi = x \cdot y = c \in \mathbb{R}$ hyperboly



Př. 2 $V(z) = \pm \frac{1}{\bar{z}} = \pm \frac{z}{|z|^2}$ $\boxed{\text{ZDROJ/VÝPUSŤ v 0}}$

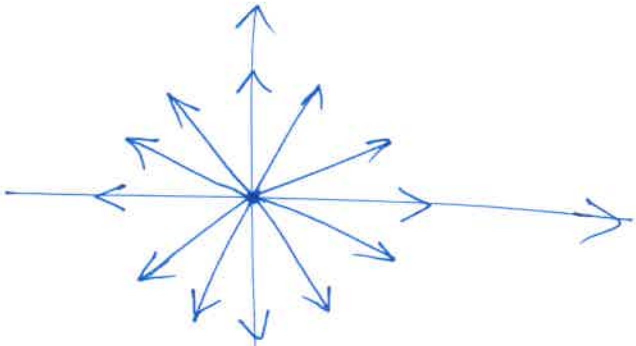
ZŘÍDLO

PRAMEN

Na $\mathbb{C}_-$ je $F = \pm \log$

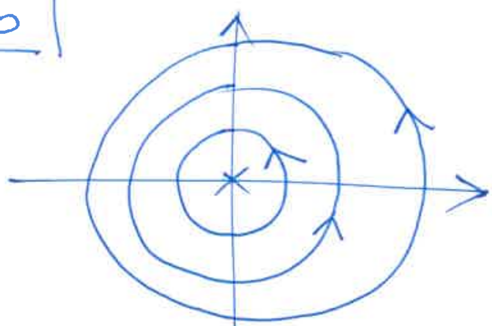
$\phi = \pm \log|z|$

$\psi = \pm \arg$



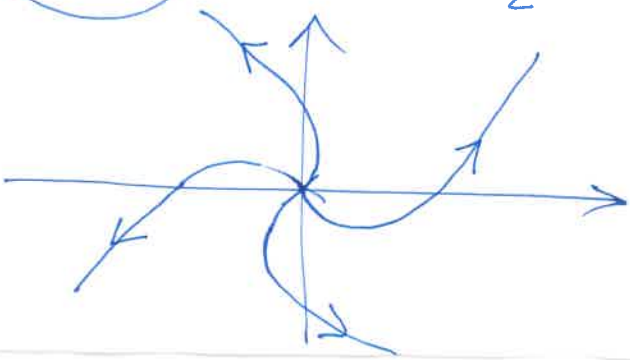
Př. 3 $V(z) = \pm \frac{i}{\bar{z}}$ $\boxed{\text{VÍR v 0}}$

Na $\mathbb{C}_-$ je $\phi = \pm \arg$, $\psi = \mp \log|z|$



Př. 4 $V(z) = \frac{a + ib}{\bar{z}}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0 \neq b$

$\boxed{\text{VÍROZDROJ v 0}}$

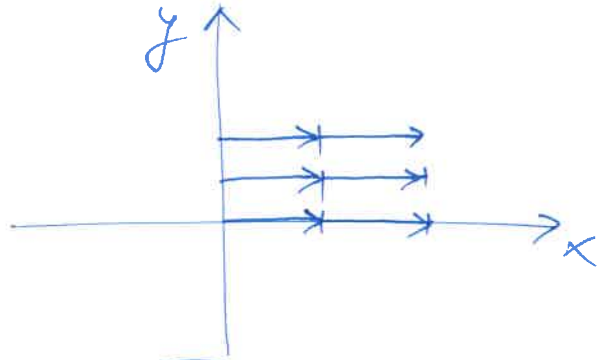


Př. 5 $\quad V(z) := \bar{z}^k$

$F(z) := \dfrac{z^{k+1}}{k+1}$, je-li $k \in \mathbb{Z}$ a $k \neq -1$

$\boxed{k=0}$ $\quad F(z) = z$, $\phi(x,y) = x$, $\psi(x,y) = y$

konstantní proudění



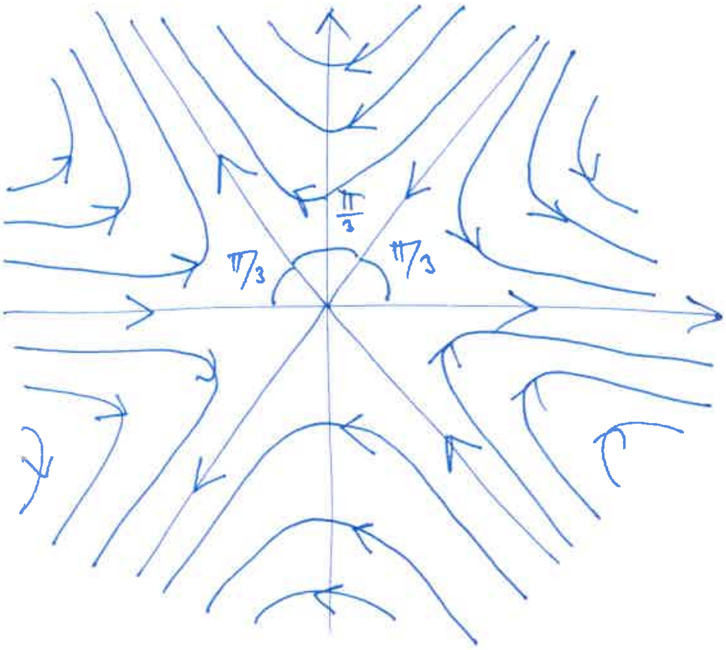
$\boxed{k=1}$ $\quad$ Př. 1

$\boxed{k=2}$ $\quad F(z) = \dfrac{z^3}{3} = \dfrac{r^3}{3} e^{i3\varphi}$, $\quad \phi = \dfrac{r^3}{3} \cdot \cos(\varphi \cdot 3)$

$\psi = \dfrac{r^3}{3} \sin(\varphi \cdot 3)$

$\psi = 0 \qquad 3 \cdot \varphi = m \cdot \pi, \ m \in \mathbb{Z}$

$\varphi_m = m \cdot \pi/3, \ m = 0, \dots, 5$



atd. pro $\boxed{k \geq 2}$

$\boxed{k=-1}$ viz Př. 2, Př. 3

$\boxed{k=-2}$ $F(z) = -\frac{1}{z} = -\frac{\bar{z}}{|z|^2}$

VP6

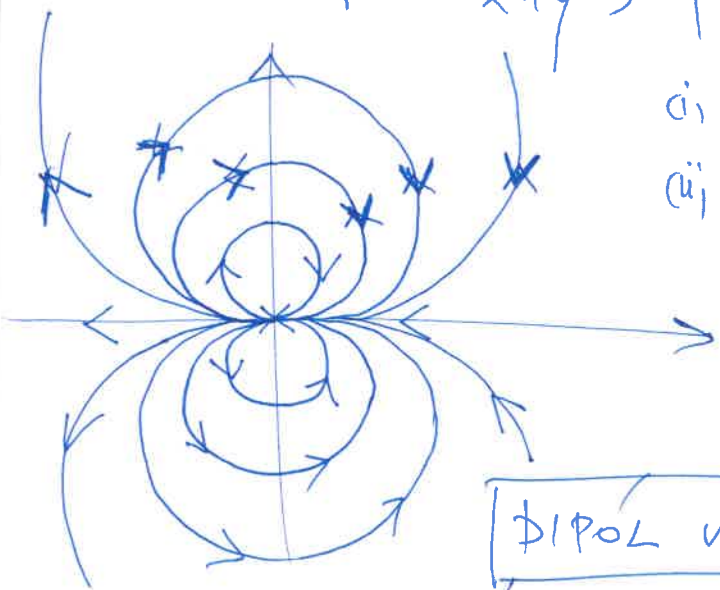
$\phi = -\frac{x}{x^2+y^2}, \quad \psi = \frac{y}{x^2+y^2} = c \in \mathbb{R}$

(i) $c=0: \quad y=0$

(ii) $c \neq 0: \quad c = \frac{1}{2d}$

$2dy = x^2+y^2$

$x^2+(y-d)^2 = d^2$

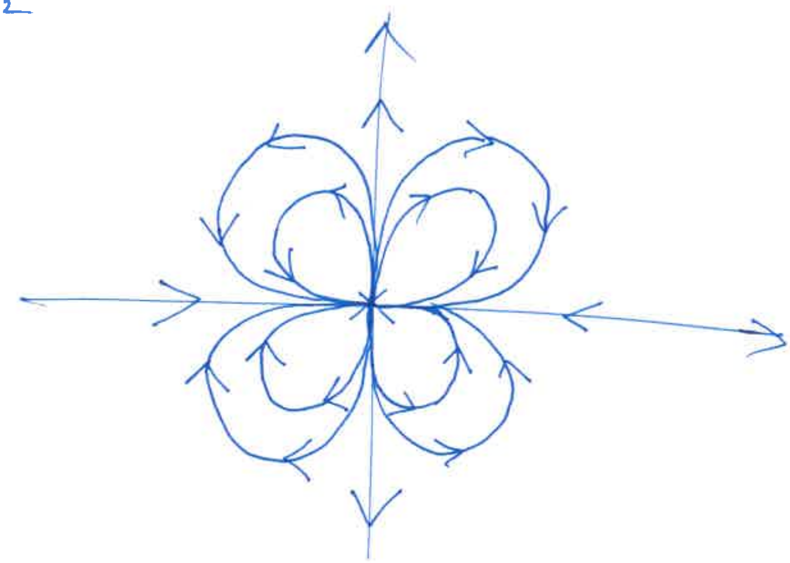


DIPOL V 0

$\boxed{k=-3}$ $F(z) = -\frac{1}{2z^2} = -\frac{\bar{z}^2}{2|z|^4} = -\frac{1}{2|z|^4}(x^2-y^2-2ixy)$

$\psi = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$

KVADRUPOL V 0

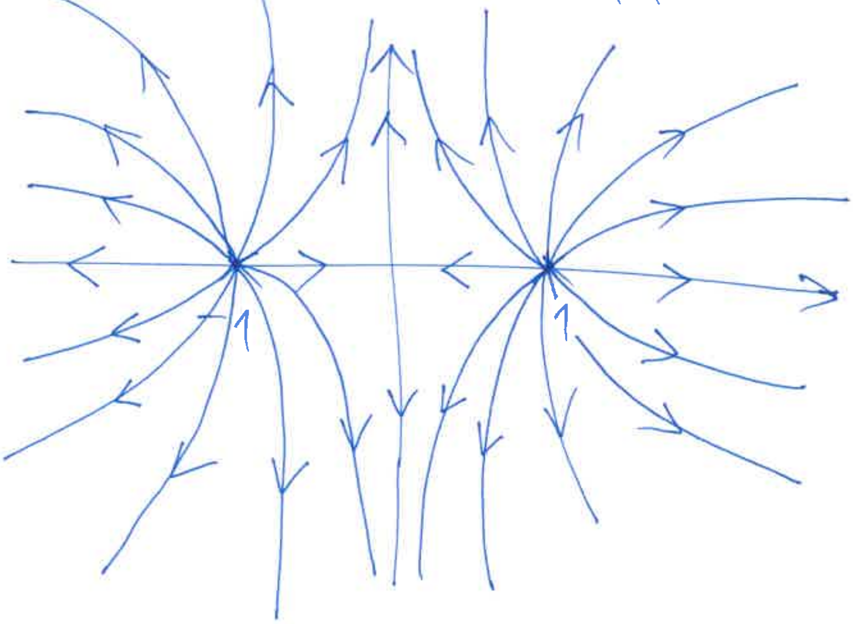


atd. pro $\boxed{k \leq -3}$

VP 7

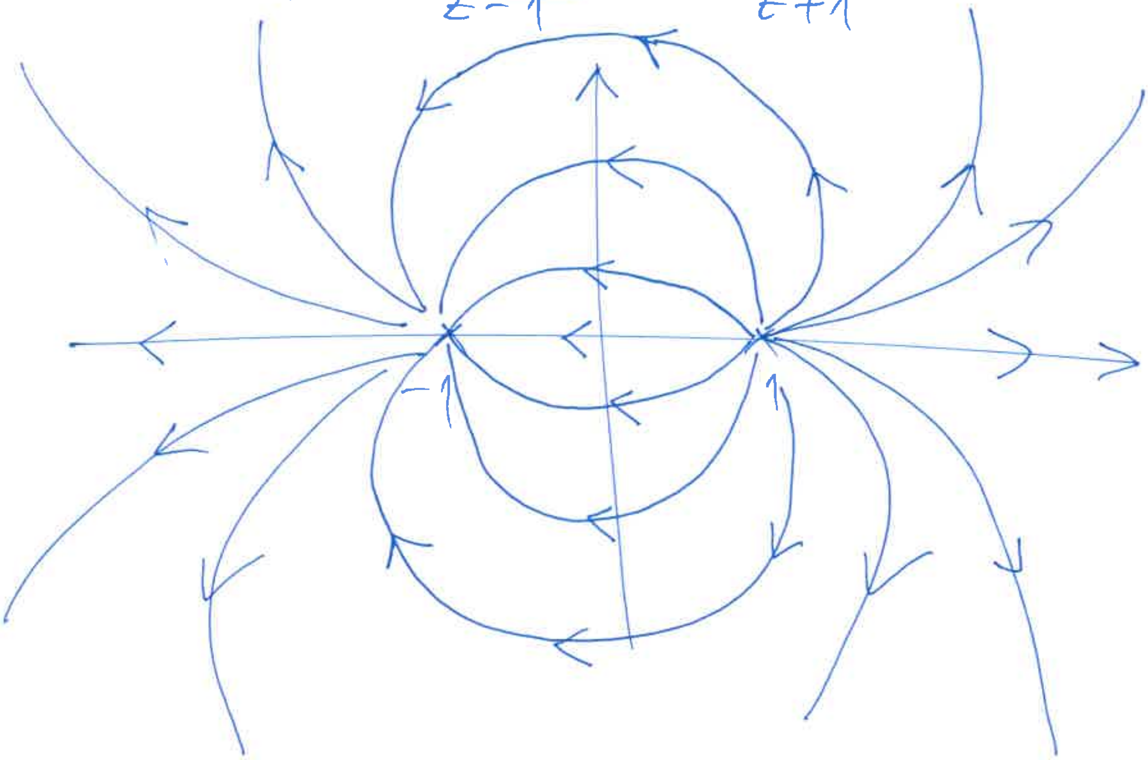
Př 6 2 stejně silné zdroje

$$V(z) := \frac{1}{\overline{z-1}} + \frac{1}{\overline{z+1}}$$



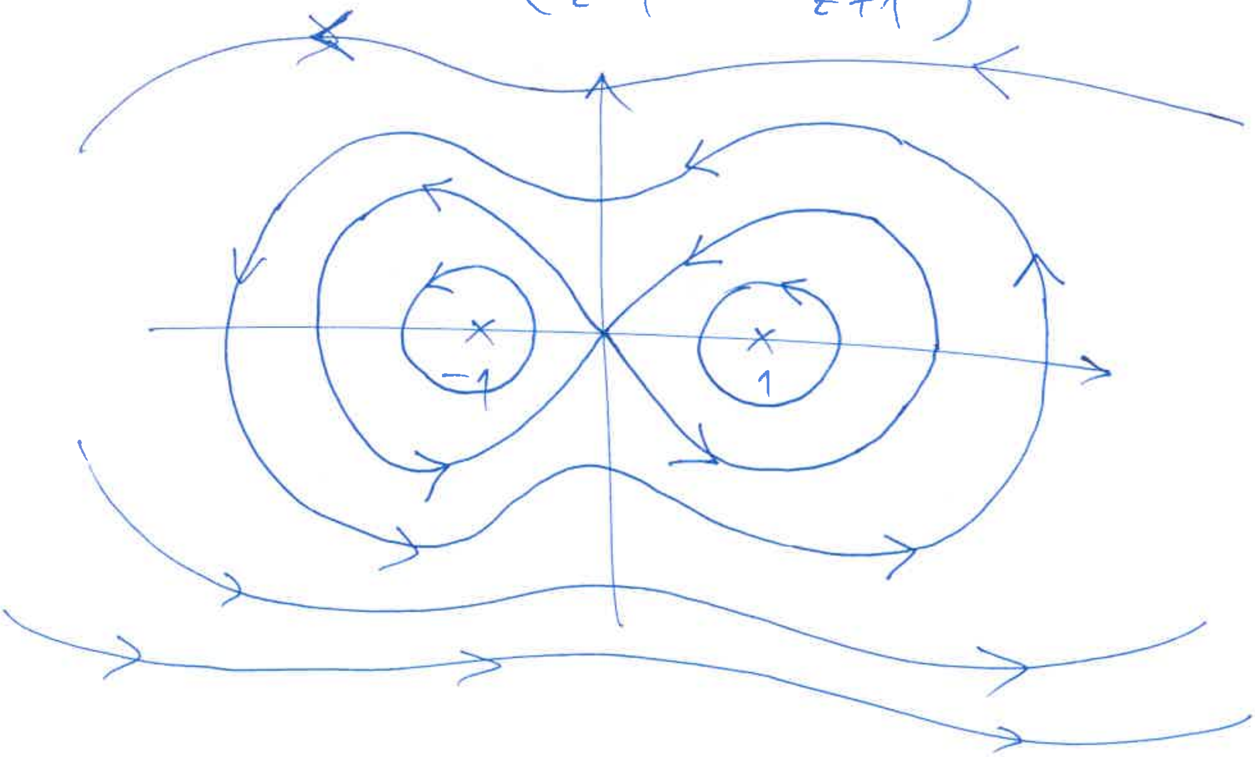
Př 7 1 zdroj a 1 výpusť, stejně silné

$$V(z) := \frac{1}{\overline{z-1}} - \frac{1}{\overline{z+1}}$$

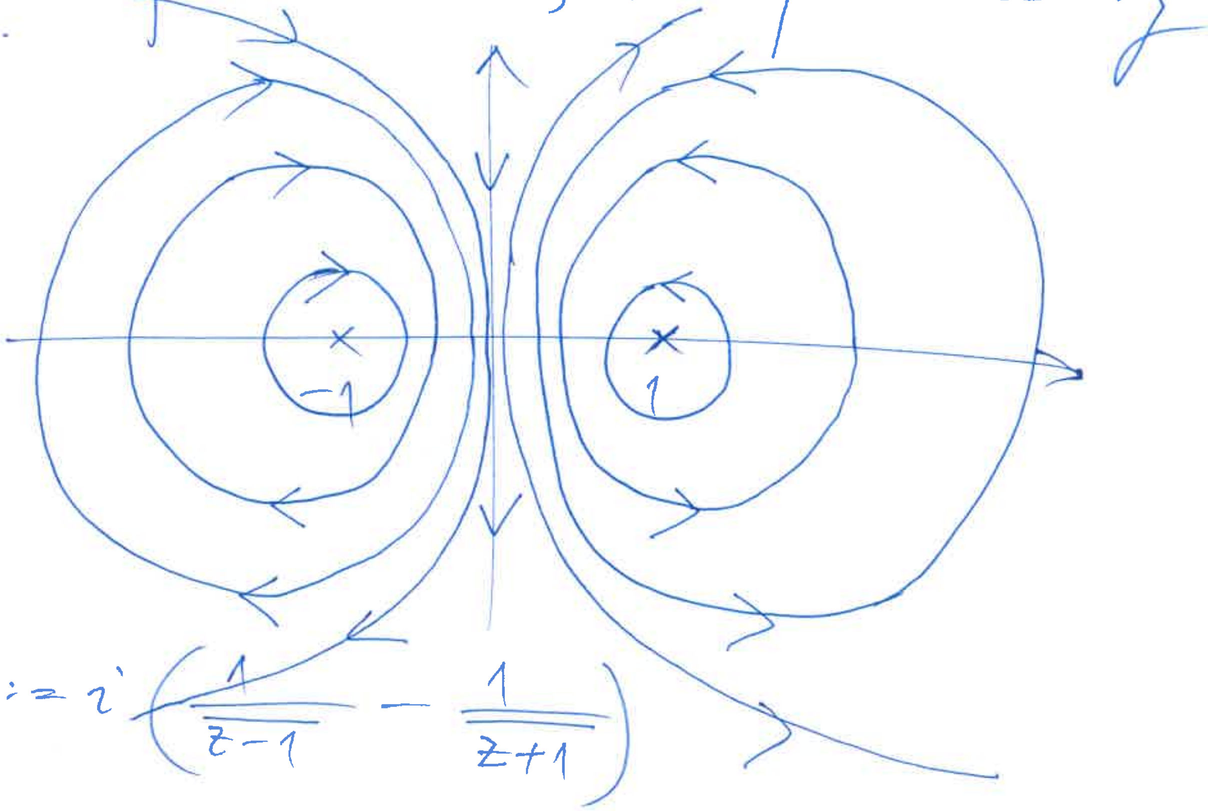


Př. 8   2 stejně orientované a silné víry   VP8

$$V(z) = i\cdot\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}\right)$$



Př. 9   2 opačně orient., ale stejně silné víry



$$V(z) := i\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)$$

Význam křivkového integrálu

Máme $f := \bar{V} \in \mathcal{H}(G)$! Nechť $\gamma : [a,b] \to G$ je uzavřená regulární křivka. Potom

$$(*)\quad \int_\gamma f = \int_a^b (V_1 - iV_2)(\gamma_1' + i\gamma_2') = \int_a^b (V_1\gamma_1' + V_2\gamma_2')$$

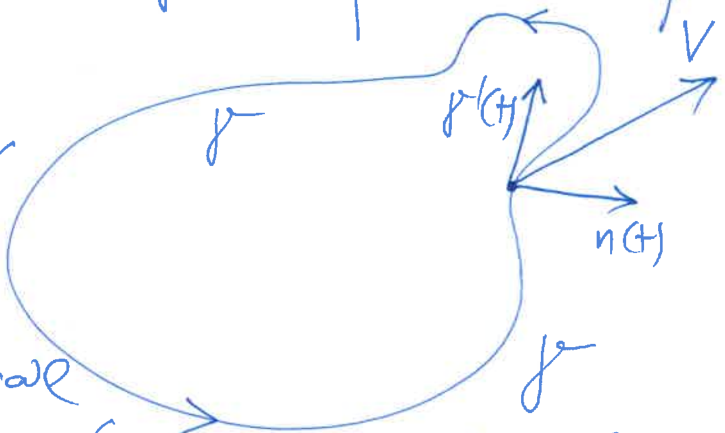
$$+\, i \cdot \int_a^b (V_1\gamma_2' - V_2\gamma_1'), \text{ kde } V_j(t) = V_j(\gamma(t)).$$

$\boxed{\text{POZOROVÁNÍ 2}}$ Z $(*)$ dostaneme, že

(i) $\operatorname{Re} \int_\gamma f = \int_a^b \langle V, \gamma' \rangle \overset{\text{ozn.}}{=:} C(V, \gamma)$ a

(ii) $\operatorname{Im} \int_\gamma f = \int_a^b \langle V, n \rangle \overset{\text{ozn.}}{=:} T(V, \gamma)$, kde

$n(t) := (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t)) = -i \cdot \gamma'(t)$ je normálový vektor ke γ v čase t.



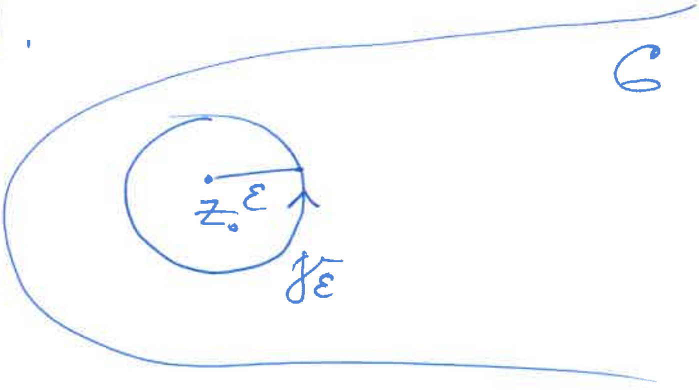
Pozn: (i) $C(V, \gamma)$ je křivkový integrál 2. druhu (viz Pozn. 1); $C(V,\gamma)$ je integrál tečné složky V podél γ a nazývá se cirkulace V podél γ.

(ii) Zřejmě $T(V,\gamma) = C(iV, \gamma)$ je integrál normálové složky V podél γ a nazývá se tok V ~~podél~~ přes γ.

$\boxed{\text{POZOROVÁNÍ 3}}$

1. Pole V je nevírové na G, právě když pro každé $z_0 \in G$ a $\varepsilon > 0$ dost malé je $C(V, \gamma_\varepsilon) = 0$, kde $\gamma_\varepsilon(t) := z_0 + \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

2. Pole V je nezřídlové na G, právě když pro každé $z_0 \in G$ a $\varepsilon > 0$ dost malé je $T(V, \gamma_\varepsilon) = 0$.



Důkaz: 1. Z Greenovy věty (viz Geom 1) platí

$$C(V, \gamma_\varepsilon) = \int_{U(z_0, \varepsilon)} \operatorname{rot} V \qquad \text{(Gr)}.$$

Z (Gr) plyne $\boxed{\Rightarrow}$. Ukažme $\boxed{\Leftarrow}$ sporem.

?? Nechť $z_0 \in G$ a např. $\operatorname{rot} V(z_0) > 0$. Ze spojitosti $\operatorname{rot} V > 0$ na okolí $\overline{U(z_0, \varepsilon)} \subset G$.

Z (Gr) dostaneme, že $C(V, \gamma_{\varepsilon'}) > 0$ $\forall \varepsilon' \in (0, \varepsilon]$, což je spor. ↯

2. Užijeme 1. pro iV. Skutečně $\operatorname{rot}(iV) = \operatorname{div} V$ a $C(iV, \gamma) = T(V, \gamma)$. ▨

Pozn: Užijeme-li Greenovu větu pro iV, dostaneme tzv. Gaussovu větu v $\mathbb{R}^2$

$$T(V, \gamma) = \int_{\operatorname{Int} \gamma} \operatorname{div} V,$$

je-li γ Jordanova křivka v $\mathbb{R}^2$ a $\operatorname{Int} \gamma$ její vnitřek.

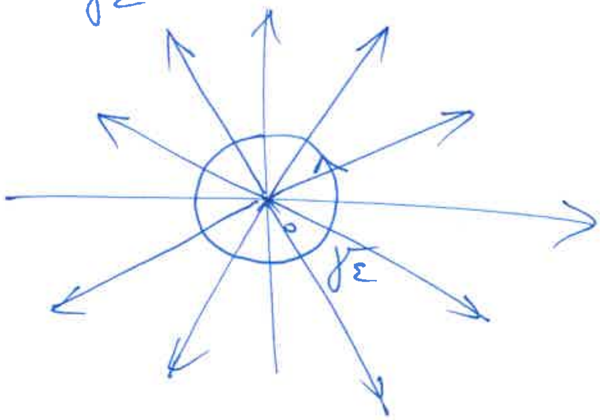
Př. 2* $\boxed{\text{ZDROJ / VÝPUSŤ v } 0}$

$$f(z) = \pm \frac{1}{z}$$

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f = \pm 2\pi i, \quad \text{tzn.} \quad C(V, \gamma_\varepsilon) = 0$$

$$T(V, \gamma_\varepsilon) = \pm 2\pi$$

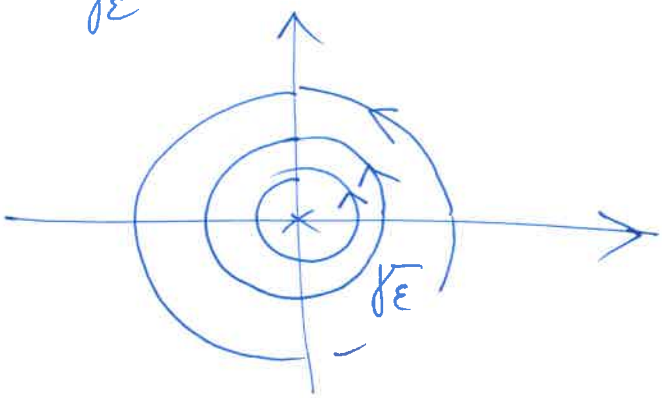
vydatnost, síla toku a jeho orientace



Př. 3* $\quad f(z) = \mp \frac{i}{z} \quad \boxed{\text{VÍR v } 0}$

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f = \pm 2\pi, \quad \text{tzn.} \quad C(V, \gamma_\varepsilon) = \pm 2\pi$$

velikost a orientace cirkulace

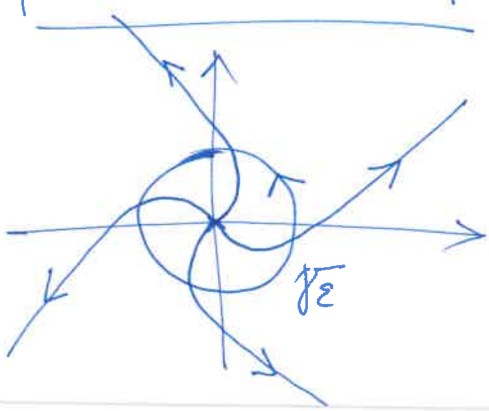


Př. 4* $\quad f(z) = \frac{a - ib}{z}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0 \neq b$

$\boxed{\text{VÍROZDROJ v } 0}$

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f = (a - ib) \cdot 2\pi i$$

$C(V, \gamma) = 2\pi b$, $T(V, \gamma) = 2\pi a$



UKA: více, ZT

$$\int_\gamma f = 0$$

pro každou uzavřenou křivku γ v G, pokud f má v G primitivní funkci. Tedy

$\boxed{\text{POZOROVÁNÍ 4}}$ Má-li V komplexní potenciál, potom $C(V,\gamma) = 0 = T(V,\gamma)$ pro každou uzavřenou křivku γ v G.

Pozn: Platí to i obráceně, je-li $G \subset \mathbb{C}$ navíc např. konvexní oblast (bude v UKA).

hvězdovitá

jednoduše souvislá