3. cvičení

CR-rovnice : ex. $f'(z_0) \in \mathbb{C} \iff$ ex. $df(z_0)$ a v z_0 platí

[Ko, 106–126] (CR) $\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = \dfrac{\partial f_2}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = -\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$.

Př. Ve kterých bodech $z \in \mathbb{C}$ mají následující funkce komplexní derivaci?

(i) $e^{\bar{z}}$ (ii) $|z|$ (iii) $|z|^2$ (iv) $|z|^2 + i\,\mathrm{Re}(z^2) =: f(z)$

$[\emptyset, \emptyset, \{0\}, x+y=0]$

(iv) $f_1(x,y) = x^2 + y^2$ tř. C^∞ na $\mathbb{R}^2$ $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$f_2(x,y) = x^2 - y^2$

(CR) $\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = 2x = -2y = \dfrac{\partial f_2}{\partial y}$ $\iff$ $x + y = 0$

$\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = 2y = -2x = -\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$

Př. Ukažte, že v polárních souřadnicích na $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, tj.

$$x = r\cdot\cos\varphi,\quad y = r\cdot\sin\varphi,\quad r \in (0, +\infty),\ \varphi \in (-\pi, \pi),$$

mají (CR) tvar

$$r\cdot\frac{\partial f_1}{\partial r} = \frac{\partial f_2}{\partial \varphi},\quad r\cdot\frac{\partial f_2}{\partial r} = -\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}$$ [Ko, 109]

Např. $\dfrac{\partial f_1}{\partial r} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} \overset{(CR)}{=}$

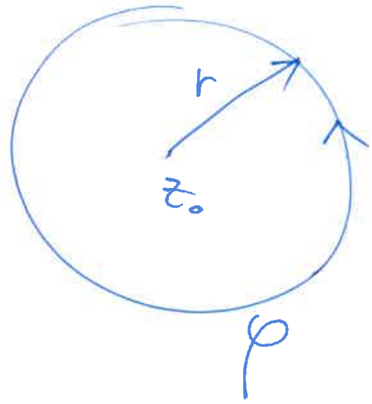
$= \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\cdot\cos\varphi - \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\cdot\sin\varphi = \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial f_2}{\partial \varphi}$.

Harmonicky sdružená funkce* ← (co se stihne) | CV3 2

Křivkový integrál [Ko, 181–198]

DEF.
$$\int_\varphi f(z)\,dz := \int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$
$z=\varphi(t)$
$dz=\varphi'(t)\,dt$

! **Př.** (určitě udělat) Je-li $z_0\in\mathbb{C}$ a $r>0$, potom
$$\int_\varphi (z-z_0)^n\,dz = 0, \text{ je-li } n\in\mathbb{Z} \text{ a } n\neq -1,$$
$$= 2\pi i, \text{ je-li } n=-1,$$
kde $\varphi(t) := z_0 + re^{it}$, $t\in[-\pi,\pi]$



Př. Spočti $\int_\varphi f(z)\,dz$ pro

(i) $f(z) := \operatorname{Re} z$ a $\varphi := [0; 1+i]$ … úsečka z 0 do $1+i$

(ii) $f(z) := \operatorname{Im} z$ a φ je kladně orient. horní polokružnice $|z|=1$, $\arg z\in[0,\pi]$

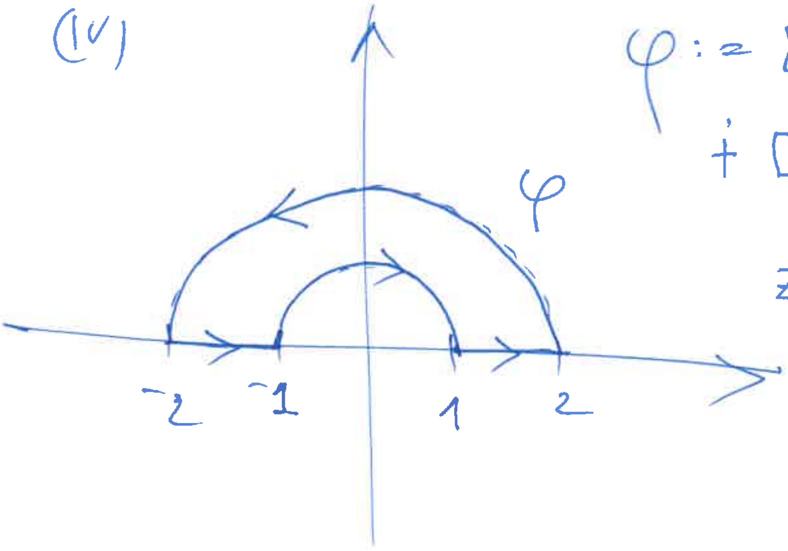
(iii) $f(z) := |z|$ a $\varphi := [0; 2-i]$

(iv) $f(z) := \dfrac{z}{\bar z}$ a φ je klad. orient. obvod horního polomezikruží mezi kružnicemi $|z|=1$ a $|z|=2$

$\left[\dfrac{1+i}{2};\ -\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\sqrt5\,(2-i)}{2};\ \dfrac{4}{3}\right]$

Cv 3
3

(iv)



$$\varphi := [-2;-1] \dotplus (\dot{-}\varphi_1) \dotplus [1;2] \dotplus \varphi_2, \text{ kde}$$

$$z = \varphi_r(t) := r e^{it}, \quad t \in [0, \pi]$$

$$\int_\varphi f = 2 + \int_{\varphi_2} f - \int_{\varphi_1} f = 2 - \frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{4}{3},$$

protože
$$\int_{\varphi_r} f = \int_0^\pi e^{2it} \cdot i \cdot r \cdot e^{it}\, dt = ir \int_0^\pi e^{3it}\, dt =$$
$$dz = i r e^{it}\, dt$$
$$= \frac{r}{3}\left[e^{3it}\right]_0^\pi = -\frac{2}{3} r .$$

x

Rovinné vektorové pole*

Harmonicky sdružené funkce

K zadané funkci $u: G \to \mathbb{R}$ na otevřené $G \subset \mathbb{C}$ najděte $v: G \to \mathbb{R}$ tak, aby $f := u + iv$ byla holomorfní na G, pokud taková v existuje.

a) $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$, $G = \mathbb{C}$ b) $u := \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $G := \mathbb{C}\setminus\{0\}$

c) $u := \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$, $G = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $G = \mathbb{C}_-$ d) $u := \sin x \cosh y$, $G = \mathbb{C}$

[$2xy+y$; $-\dfrac{y}{x^2+y^2}$; v c) užijte polární (CR); $\cos x \cdot \sinh y$]
na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ v neexistuje,
na $\mathbb{C}_-$ je $v = \arg$

a) Existuje-li taková v, potom z (CR)

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x+1 \implies v(x,y) = (2x+1)\cdot y + C(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = +2y \implies v(x,y) = 2yx + D(y)$$

Potom $D(y) = y + C(x)$

$D(y) - y = C(x)$ je konstantní

Stačí položit $C(x) \equiv 0$, $D(y) := y$

__Pozn:__ (i) Nutnou podmínkou pro existenci v je, že u je na G __harmonická__, tzn. $u \in \mathcal{C}^2(G)$ a

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ na } G \quad (\text{z (CR)}).$$

(ii) Je-li $G \subset \mathbb{C}$ __konvexní__ oblast a u je harmonická na G, potom taková v existuje.
[bude v KA] __hvězdovitá__
__jednoduše souvislá__