5. cvičení

Cauchyho věta: Na hvězdovité oblasti $G \subset \mathbb{C}$ má každá $f \in H(G)$ primitivní funkci.

Př. Pomocí CV vypočti

! (i) $(N) \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$ Dirichlet

(ii) $(N) \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\, dt = (N) \int_0^{+\infty} \cos(t^2)\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$

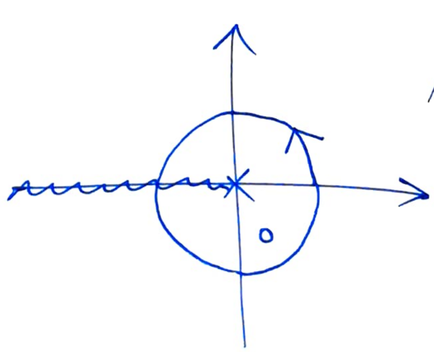
Fresnel, optika

Pozn: (i), (ii) konvergují jen jako Newtonovy integrály, nikoli Lebesgueovy

Viz [Ves], příklad 5.4.17, 5.4.15

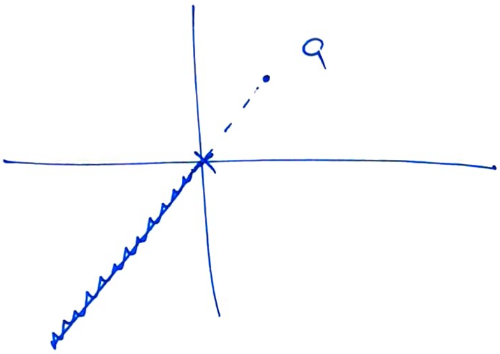
[Ves] Veselý, KA pro učitele

! PF k $1/z$: Víme, že $\frac{1}{z} \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ nemá PF na $\mathbb{C} \setminus \{0\} =: \mathbb{C}^\times$ (proč?). Na $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ má $\frac{1}{z}$ PF $\log z$, protože



$$\log' z = \frac{1}{z}.$$

Př. Nechť $a \in \mathbb{C}^\times$ a $\Omega_a := \mathbb{C} \setminus \{ta \mid t \in (-\infty, 0]\}$.



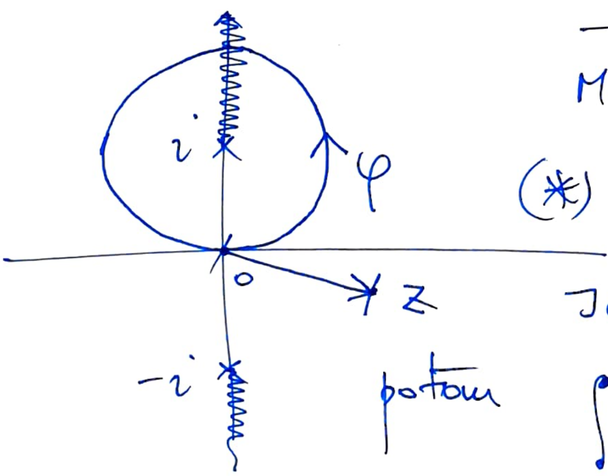
Protože $\Omega_a \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitá oblast, $\frac{1}{z}$ má na Ω_a PF. Najděte ji.

$[F(z) := \log(z/a)]$

Př.* <u>Rozšíření arctg z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$</u>

(i) $f(z) := \dfrac{1}{1+z^2}$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, ale nemá tam PF. Proč?

—— x ——



Máme

(*) $$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right).$$

Je-li $\varphi(t) := i + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, potom

$$\int_\varphi f = \pi \cdot \mathrm{ind}_\varphi\, i = \pi \neq 0,$$

kde $$\mathrm{ind}_\varphi(\pm i) := \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{dz}{z \mp i} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}.$$

(ii) Protože $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{is \mid s \in \mathbb{R},\ |s| \geq 1\}$ je <u>hvězdovitá oblast</u> se středem hvězdovitosti 0, má f na Ω PF. Najděte ji.

—— x ——

Z předchozího víme, že

$$F(z) := \int_{[0;z]} \frac{dw}{1+w^2}, \quad z \in \Omega.$$

Pro každé $z \in \Omega$ máme

$$F(z) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2i}\left(\int_{[0;z]} \frac{dw}{w-i} - \int_{[0;z]} \frac{dw}{w+i} \right).$$

Zřejmě na $\Omega_\pm := \mathbb{C} \setminus \{\pm is \mid s \geq 1\}$ má $\frac{1}{z \mp i}$ PF $\log((z \mp i)/(\mp i)) = \log(1 \pm iz)$, tudíž $\forall z \in \Omega$:

$$F(z) = \frac{1}{2i}\left(\log(1+iz) - \log(1-iz) \right)$$

$$= \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) + K(z)\pi,$$

kde $K: \underset{\text{oblast}}{\Omega} \to \mathbb{Z}$ a $K(0)=0$. Protože K je zřejmě spojitá, $K \equiv 0$ na Ω. Tedy

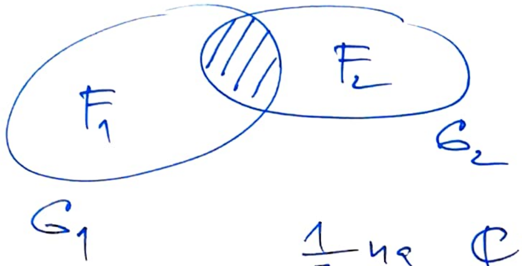
$$F(z) = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right), \quad z \in \Omega.$$

<u>Pozn:</u> Platí, že $F(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, protože $F(0)=0$ a $\frac{dF}{dx}(x) = F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

CVT 4

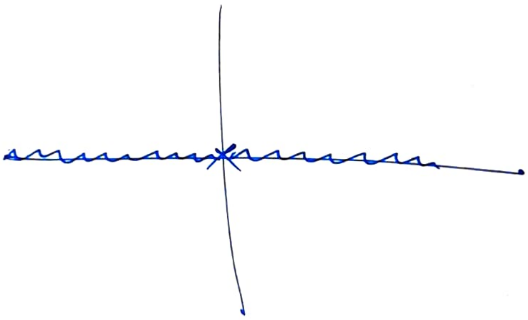
SLEPOVÁNÍ PF *

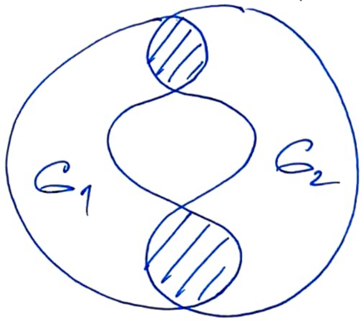
Nechť $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ jsou otevřené.
Nechť f má na G_j PF F_j pro $j = 1, 2$.



Kdy má f PF na $G_1 \cup G_2$?

(1) Obecně **NE**, např. pro $\frac{1}{z}$ na $\mathbb{C} \setminus \{0\} = (\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]) \cup (\mathbb{C} \setminus [0, +\infty))$





(2) **ANO**, je-li $G_1 \cap G_2$ oblast.
Skutečně, na $G_1 \cap G_2$ je pak $F_2 = F_1 + c$ pro nějaké $c \in \mathbb{C}$. Potom

$$F := F_1 + c \text{ na } G_1, \quad := F_2 \text{ na } G_2$$

je PF k f na $G_1 \cup G_2$

———— × ————

$\boxed{\text{OTÁZKA 1}}$ Charakterizujte oblasti $G \subset \mathbb{C}$ s vlastností

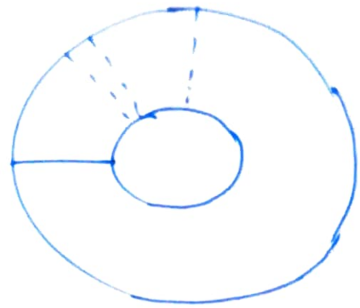
- (PF) každá $f \in \mathcal{H}(G)$ má na G PF.
-

CV5 Γ

(i) Víme, že hvězdovité oblasti mají (PF).

(ii) Existují oblasti s (PF), které nejsou hvězdovité? Cv.

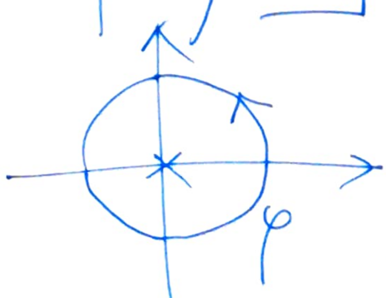
(iii) Jde o tzv. jednoduše souvislé oblasti.



$\boxed{\text{OTÁZKA 2}}$ Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast. Najdi všechny $f \in \mathcal{H}(G)$, které na G mají PF.

Cv. (i) Ukažte, že $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{\times})$ má PF na $\mathbb{C}^{\times}$, platí-li $\int_{\varphi} f = 0$ pro jednotkovou kružnici $\varphi(t) := e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

[Pro studenty na promyšlení.]



(ii) Co platí pro $G = \mathbb{C} \setminus K$, kde K je konečná?

Dirichletův integrál

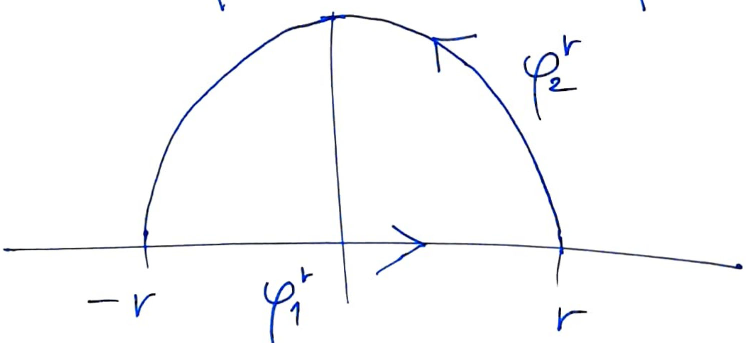
Spočti $I := (N)\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

——— x ———

Uvažme funkci $f(z) := \frac{e^{iz}-1}{z}$, $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} = \mathbb{C}^\times$,

$:= i$, $z = 0$.

Potom je f spojitá na $\mathbb{C}$ a holomorfní na $\mathbb{C}^\times$. Pro $r>0$ definujme $\varphi^r := \varphi_1^r + \varphi_2^r$, kde $\varphi_1^r := [-r, r]$ a $\varphi_2^r(t) := r\,e^{it}$, $t \in [0,\pi]$.



Z Cauchyho vět pro každé $r>0$ platí, že

(1) $$0 = \int_{\varphi^r} f = \int_{\varphi_1^r} f + \int_{\varphi_2^r} f.$$

Dále platí, že (2) $$\int_{\varphi_1^r} f = \int_{-r}^{r} \frac{e^{it}-1}{t}\,dt =$$

$$= \overbrace{\int_{-r}^{r} \underbrace{\frac{\cos t - 1}{t}}_{\text{lichá}}\,dt}^{0} + i\cdot\int_{-r}^{r} \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{\text{sudá}}\,dt = 2i\,F(r),$$

kde $F(r) := \int_0^r \frac{\sin t}{t}\,dt$ je PF k $\frac{\sin t}{t}$ na $\mathbb{R}$, $F(0+) = F(0) = 0$. Máme

Dir 2

limita zprava 0

(3) $$\int_{\varphi_2^r} f = \int_{\varphi_2^r} \frac{e^{iz}-1}{z}\,dz = \int_0^\pi \frac{e^{ire^{it}}-1}{r\cdot e^{it}}\, i\cdot re^{it}\,dt$$

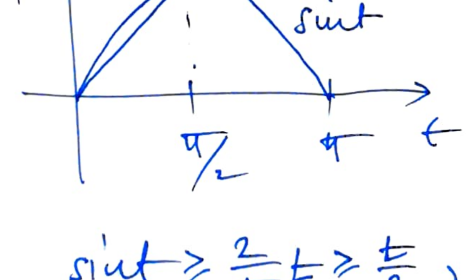
$$= i\underset{\substack{\downarrow\,(?)\\ 0}}{\int_0^\pi e^{ire^{it}}\,dt} - \pi i \longrightarrow -\pi i.$$

Z (1) a (2) je $2iF(r) - \pi i \longrightarrow 0$ pro $r \to \infty$, tj. $I = F(+\infty-) = \frac{\pi}{2}$.

Konečně (?) platí, protože

$$\left|\int_0^\pi e^{ire^{it}}\right| \le \int_0^\pi e^{-r\sin t}\,dt = 2\cdot\int_0^{\pi/2} e^{-r\cdot\sin t}\,dt$$

$|e^{ire^{it}}| = e^{-r\sin t}$



$\sin t \ge \frac{2}{\pi}t \ge \frac{t}{2}$, $t \in [0, \pi/2]$

$$\le 2\cdot\int_0^{+\infty} e^{-rt/2}\,dt = 2\cdot\left[-\frac{2}{r}e^{-rt/2}\right]_{t=0}^{+\infty} = \frac{4}{r} \longrightarrow 0 \text{ pro } r \to +\infty.$$

∎

Fresnelovy integrály

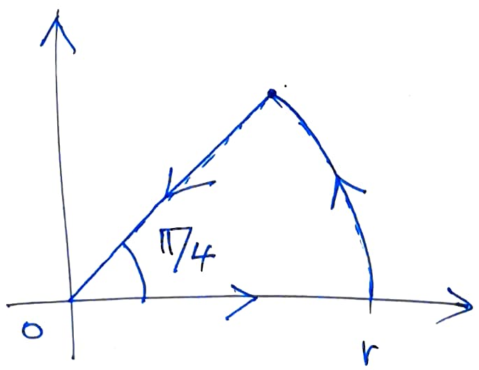
Spočti: $\displaystyle \int_0^{+\infty} \underbrace{\sin(t^2)}_{\overset{!!}{I_2}}\,dt \overset{(1)}{=} \int_0^{+\infty} \underbrace{\cos(t^2)}_{\overset{!!}{I_1}}\,dt \overset{(1)}{=} \sqrt{\frac{\pi}{8}}$,

pokud známe Laplaceův integrál

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Uvažme funkci $f(z) := e^{iz^2}$, $z \in \mathbb{C}$. Zřejmě $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Pro každé $r>0$ definujme

$$\varphi^r := \varphi_1^r \dotplus \varphi_2^r \dotplus (\dot{-}\varphi_3^r),\ \text{kde}$$



$\varphi_1^r := [0; r]$,

$\varphi_2^r := re^{it}$, $t \in [0, \pi/4]$,

$\varphi_3^r(t) := t \cdot e^{i\pi/4}$, $t \in [0, r]$.

Potom z Cauchyho věty dostaneme

$$(1)\quad 0 = \int_{\varphi^r} f = \int_{\varphi_1^r} f + \int_{\varphi_2^r} f - \int_{\varphi_3^r} f.$$

Máme, že Fro 2

(2) $$\int_{\varphi_1^r} f = \int_0^r e^{it^2}\,dt = \underbrace{\int_0^r \cos(t^2)\,dt}_{\overset{!!}{F_1(r)}} + i\underbrace{\int_0^r \sin(t^2)\,dt}_{\overset{!!}{F_2(r)}},$$

kde F_1 je PF k $\cos(t^2)$ a F_2 je PF k $\sin(t^2)$.

Dále platí

(3) $$\int_{\varphi_3^r} f = e^{i\pi/4}\int_0^r e^{-t^2}\,dt \xrightarrow[r\to+\infty]{} e^{i\pi/4}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Protože $\int_{\varphi_2^r} f \xrightarrow{?} 0$ pro $r\to+\infty$, dostaneme

z (1)–(3), že

(4) $$F_1(r) + i F_2(r) - e^{i\pi/4}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \longrightarrow 0 \text{ pro } r\to+\infty.$$

Protože $e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, z (4) plyne, že

$$I_1 = F_1(+\infty-) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} = F_2(+\infty-) = I_2.$$

Konečně ? platí, protože

$$\left|\int_{\varphi_2^r} f\right| = \left|\int_0^{\pi/4} \exp(i r^2 e^{2it})\cdot i\cdot r\cdot e^{it}\,dt\right| \le$$

Fr 3

$$\leq r \cdot \int_0^{\pi/4} \exp(-r^2 \cdot \sin(2t))\, dt \overset{(*)}{\leq}$$

$$\leq r \cdot \int_0^{+\infty} \exp(-r^2 \cdot t)\, dt = \frac{1}{r} \longrightarrow 0 \quad \text{pro } r \to +\infty,$$

kde $(*)$ plyne z odhadu $\sin(2t) \geq \frac{4}{\pi} t \geq t$, $t \in [0, \pi/4]$.