7. cvičení

- Laurentovy řady – zavedení a vlastnosti
- Příklady: Kopáček, 291 – 314

Najděte všechny Laurentovy rozvoje kolem z_0 následujících funkcí

(i) $\dfrac{1}{z^2-3z+2}$, $z_0=0$

(ii) $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$, $z_0=i$ [294]

(iii) cotg v $P(0,\pi)$ (jinak těžko) několik prvních členů

(iv) $z^2 \cdot \sin\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$, $z_0=1$ [298]

(v) $\sin\left(\dfrac{z}{1-z}\right)$, $z_0=1$

(vi) $(z^2+z+1)\cdot e^{1/z}$, $z_0=0$

(vii) $\exp\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$, $z_0=1$, $z_0=0^{*}$ [296]

(viii) $\exp\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$, $z_0=0$

(ix) $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)\cdot(z^2+1)}$, $z_0=0$, $z_0=2$ [293]

Laurentovy řady

Nechť $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Potom

$$(L) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}}_{(H)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}_{(R)}$$

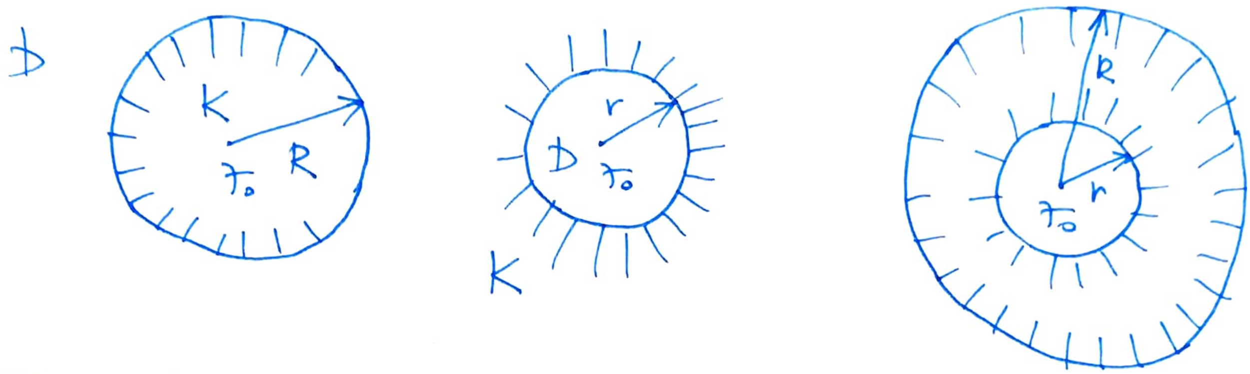
je Laurentova řada s koeficienty $\{a_n\}$ a středem z_0. Řada (R) je regulární část (L) a řada (H) je hlavní část (L). Řekneme, že (L) konverguje, pokud obě její části (H) i (R) konvergují.

Př. $\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Vlastnosti (L)

1. Konvergence: Ex. jediné $R, r \in [0, +\infty]$ tak, že (i) řada (R) konverguje absol. a lokálně stejnoměrně na $|z-z_0| < R$ a diverguje na $|z-z_0| > R$;

(ii) řada (H) konverguje absol. a lokálně stejnoměrně na $|z - z_0| > r$ a diverguje na $|z - z_0| < r$.



(2) SOUČET: Nechť $0 \leq r < R \leq +\infty$ (toto vždy neplatí!). Položme

$$P(z_0, r, R) := \{ z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R \}.$$

mezikruží

Označme-li součet (L) jako f, potom na $P(z_0, r, R)$ je f holomorfní, řadu (L) tam derivujeme "člen po členu", atd.

Pozn: $P(z_0, R) = P(z_0, 0, R)$

DŮKAZ: (1) Číslo R je poloměr konvergence mocninné řady (R). Pro $w = \frac{1}{z - z_0}$ je řada (H) rovna mocninné řadě (*) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$.

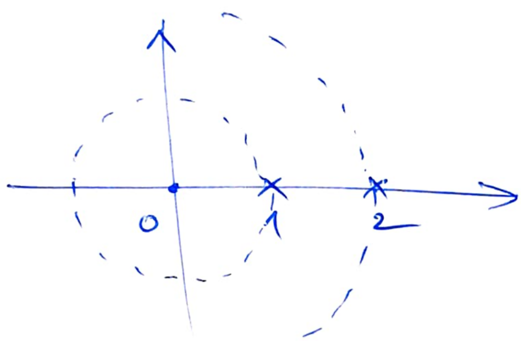
Číslo $\frac{1}{r}$ je poloměr konvergence (*).

(2) Plyne opět z Weierstrassovy věty. ▨

$\boxed{\text{CÍL}}$ Ukážeme, že $f \in \mathcal{H}(P(z_0, r, R))$, právě když existuje jediná (L), která má na $P(z_0, r, R)$ součet f.

PFI Najdi všechny Laurentovy rozvoje kolem $z_0 = 0$ funkce

$$f(z) := \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{(z-1)\cdot(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$



1) v $U(0,1)$: $(1.1) + (2.1)$

2) v $P(0,1,2)$: $(1.2) + (2.1)$

3) v $P(0,2,+\infty)$: $(1.2) + (2.2)$, kde

(1.1) $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$

(1.2) $\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$, $|z| > 1$

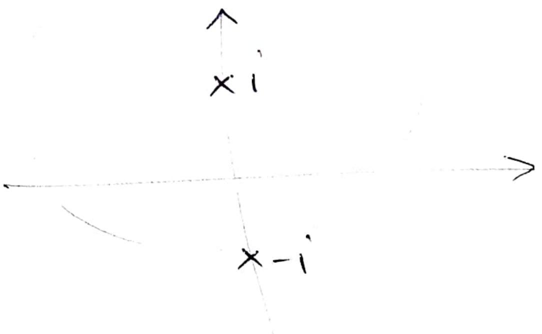
(2.1) $\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$, $|z| < 2$

(2.2) $\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$, $|z| > 2$

Příkl. $\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$ rozviňme $P(i,2)$:

$$\frac{1}{(z+i)^2} = \frac{1}{((z-i)+2i)^2} = \frac{1}{(2i)^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{z-i}{2i}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{(2i)^2}} \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(-1)^{n-1}\frac{(z-i)^{n-1}}{(2i)^{n+1}},$$



$|z-i|<2$

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{4(z-i)^2} + \frac{2}{8i(z-i)} + \sum_{n=3}^{+\infty} n\cdot(-1)^{n-1}\frac{(z-i)^{n-3}}{(2i)^{n+1}},$$

$0<|z-i|<2$

---

na $P(i,2,+\infty)$:

$$\frac{1}{(z+i)^2} = \frac{1}{(z-i)^2}\,\frac{1}{\left(1+\frac{2i}{z-i}\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(-1)^{n-1}\frac{(2i)^{n-1}}{(z-i)^{n+1}},$$

$|z-i|>2$

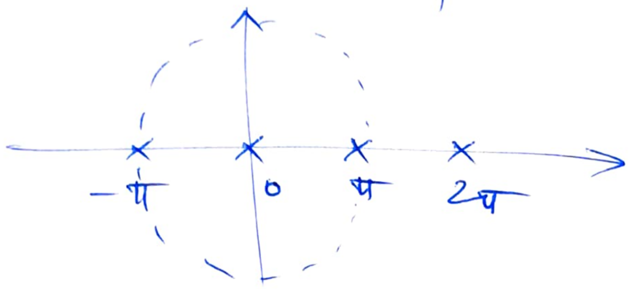
$$\frac{1}{(z^2+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(-1)^{n-1}\frac{(2i)^{n-1}}{(z-i)^{n+3}}, \quad |z-i|>2,$$

Pozn: Pro $|q|<1$ platí $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$

$$\left(\frac{1}{1-q}\right)' = \frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot q^{n-1} \quad \text{atd.}$$

Při (i) $\cot g\, z \overset{\text{def.}}{:=} \dfrac{\cos z}{\sin z}$ je holomorfní na

$\mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, protože $\sin z = 0 \iff z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$



(ii) Najděte několik prvních členů LR $\cot g$ na $P(0,\pi)$:

$$\cot g\, z = \frac{1}{z} \cdot \frac{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \dots}{1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \dots} =$$

$\cap$

$\mathcal{H}(U(0,\pi))$,
protože jmenovatel
je nenulový na $U(0,\pi)$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \dots\right) : \left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots\right) = \underline{\underline{\frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} + \dots}},\quad 0 < |z| < \pi$$

$$\begin{array}{l} -\left(1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \dots\right) \\ \hline -\frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{30} + \dots \\ -\left(-\frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{18} + \dots\right) \\ \hline -\frac{z^4}{45} + \dots \end{array}$$

$-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$

$\frac{1}{24} - \frac{1}{120} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$

$\frac{1}{30} - \frac{1}{18} = \frac{3-5}{90} = -\frac{1}{45}$

$\boxed{\text{Úloha 3.1}}$ Laurentův rozvoj $f(z) = \sin(z/(1-z))$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, kolem 1.

$$f(z) = \sin\left(-1 + \frac{1}{1-z}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(1+n\pi/2)}{n!} \frac{1}{(z-1)^n}$$

protože

$$g(w) = \sin(-1+w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, \quad w \in \mathbb{C}$$

$g(0) = -\sin(1)$

$g'(0) = \cos(1)$

$g' = \cos(-1+w)$

$g'' = -\sin(-1+w)$

$g^{(2k)}(0) = (-1)^{k+1} \sin(1)$

$g^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cos(1)$

$$\boxed{g^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot \sin(1+n\pi/2)} \Leftarrow$$

Pozn: $\sin(z+\pi) = -\sin z$, $\cos(z+\pi) = -\cos z$

$\sin(z+\pi/2) = \cos z$

Př.* $f(z) = e^{\left(z + 1/z\right)}$ holomorfní na $P := \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Laurentův rozvoj f na P:

$$f(z) = e^z \cdot e^{1/z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{z^m}\right) =$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,m!} z^{n-m} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\,(m+k)!}\right) z^k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n+k)!}\right) z^{-k}$$

$k = n - m \geq 0$, $n = m + k$

$-k = n - m < 0$, $m = n + k$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m!)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\,(m+k)!}\right) \times \left(z^k + \frac{1}{z^k}\right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

x

Př.* Laurentův rozvoj $f(z) = \exp\left(\frac{1}{1-z}\right)$, $|z|>1$, kolem 0.

$$\exp w = \sum_{n=0}^\infty \frac{w^n}{n!} = 1 + w + \frac{w^2}{2} + \dots + \frac{w^n}{n!} + \dots$$

$$w = \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{z^{n+1}}, \quad |z|>1$$

$$w' = \frac{1}{(1-z)^2} = +\sum_{n=0}^\infty \frac{n+1}{z^{n+2}}$$

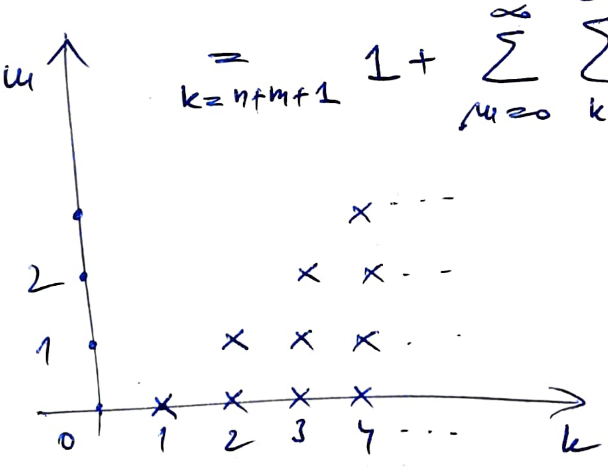
$$\vdots$$

$$w^{(m)} = (-1)^{m+1}\sum_{n=0}^\infty \frac{(n+1)\cdots(n+m)}{z^{n+m+1}} = \frac{m!}{(1-z)^{m+1}} = m!\, w^{m+1}$$

Tedy máme, že

$$f(z) = 1 + \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}\left(\sum_{n=0}^\infty \frac{(n+1)\cdots(n+m)}{m!\, z^{n+m+1}}\right) =$$

$$\underset{k=n+m+1}{=} 1 + \sum_{m=0}^\infty \sum_{k=m+1}^\infty \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}\,\frac{(k-m)\cdots(k-1)}{m!\, z^k} =$$



$$= 1 + \sum_{k=1}^\infty \left(\sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}\binom{k-1}{m}\right)\frac{1}{z^k},$$

$|z|>1$.