9. cvičení

Cv 9
1

Výpočet reziduí

Věta Nechť $P := P(z_0, r, R)$ je mezikruží, $f \in \mathcal{H}(P)$ a φ je uzavřená křivka v P.
Potom $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$, $z \in P$ a

$$\int_\varphi f = 2\pi i \cdot a_{-1} \cdot \operatorname{ind}_\varphi z_0.$$

DŮKAZ: Máme

$$\int_\varphi f = \int_\varphi \underbrace{\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n}_{\text{konv. stejnoměrně na } \langle\varphi\rangle} dz = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \int_\varphi (z-z_0)^n dz$$

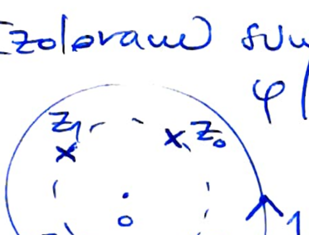
$\int_\varphi (z-z_0)^n dz =$ 0 pro $n \neq -1$ [Proč?]; $2\pi i \operatorname{ind}_\varphi z_0$ pro $n = 1$

$$= 2\pi i \cdot a_{-1} \cdot \operatorname{ind}_\varphi z_0. \quad \blacksquare$$

Př. Spočti $I := \int_\varphi \frac{z^3 dz}{2z^4+1}$, kde $\varphi(t) := e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ (×)

[369]

(i) Izolované singularity: $z^4 = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} e^{\pi i}$



$z_k = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} e^{i\alpha_k}$, kde

$\alpha_k := \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi/2$, $k = 0, 1, 2, 3$

jednoduché póly

CV 9
2

(ii) Na $|z| > 1/\sqrt[4]{2}$ máme

$$f(z) = \frac{z^3}{2z^4} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2z^4}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1} \cdot z^{4n+1}},$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad \int_{\varphi} f = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\operatorname{ind}_{\varphi} 0}_{=1} = \underline{\underline{\pi i}}.$$

(Př 7) Spočt. $I := \int_{\varphi} \underbrace{\exp(\sin(1/z))}_{= f(z)} \, dz$,

kde φ je jednot. kružnice, viz (×).

(i) f má v 0 podstat. sing.: Ano, pro $z_k := \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}$ je $f(z_k) = \exp((-1)^k)$, což nemá v $\$$ limitu.

$z_k \to 0$

(ii) Nechť $\exp(\sin z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$. Potom

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{1}{z^n} = b_0 + \frac{b_1}{z} + \cdots, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\text{a} \quad \operatorname{res}_0 f := b_1 = (\exp(\sin z))'\Big|_{z=0} = e^{\sin 0} \cdot \cos 0$$

$$= \underline{\underline{1}} \quad \text{a} \quad I = \underline{\underline{2\pi i}}.$$

Označení: Nechť $f \in \mathcal{H}(P(z_0))$ a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z \in P(z_0).$$

Potom $\operatorname{res}_{z_0} f := a_{-1}$ je reziduum f v z_0.

Pravidla pro výpočet reziduí: Nechť $s \in \mathbb{C}$.

(1.) Je-li f holomorfní fce na okolí s a g má v s jednoduchý pól, potom

$$\operatorname{res}_s (f \cdot g) = f(s) \cdot \operatorname{res}_s g$$

(2.) Jsou-li f, g holomorfní fce na okolí s, $g(s) = 0$ a $g'(s) \neq 0$, potom

$$\operatorname{res}_s \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(s)}{g'(s)}.$$

(3.) Má-li f v s pól násobnosti $p \in \mathbb{N}$, potom

$$\operatorname{res}_s f = \frac{1}{(p-1)!} \cdot \lim_{z \to s} \left((z-s)^p f(z)\right)^{(p-1)}$$

Důkaz: (1.) Na $P(s)$ máme

$$f(z) = a_0 + a_1 \cdot (z-s) + a_2 (z-s)^2 + \dots,$$
$$g(z) = \frac{b_{-1}}{z-s} + b_0 + b_1 \cdot (z-s) + \dots, \quad \text{tudíž}$$

$$f(z) \cdot g(z) = \frac{a_0 \cdot b_{-1}}{z-s} + (a_0 b_0 + a_1 b_{-1}) + \dots$$

(2.) Na $P(s)$ máme

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_0 + a_1(z-s)+\cdots}{b_1(z-s)+\cdots} = \frac{a_0}{b_1}\,\frac{1}{z-s}+\cdots,$$

kde $a_0 = f(s)$ a $b_1 = g'(s)$.

(3.) Na $P(s)$ máme

$$f(z) = \frac{\overset{\neq 0}{a_{-p}}}{(z-s)^p}+\cdots+\frac{a_{-1}}{(z-s)}+a_0+\cdots$$

$$(z-s)^p\cdot f(z) = a_{-p}+\cdots+a_{-1}\cdot(z-s)^{p-1}+\cdots$$

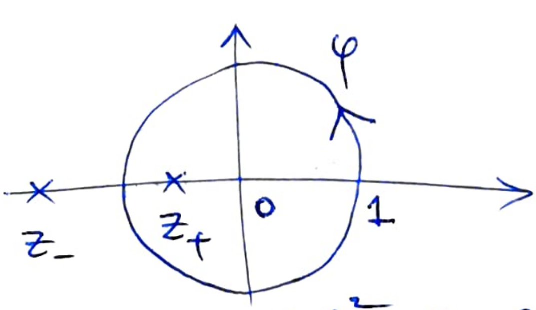
$$\left((z-s)^p\cdot f(z)\right)^{(p-1)} = (p-1)!\,a_{-1}+\tilde{a}_0\cdot(z-s)+\cdots,$$

tudíž $\lim\limits_{z\to s}\left((z-s)^p\cdot f(z)\right)^{(p-1)} = (p-1)!\,a_{-1}$. ■

(Př.) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+4z+1)^2} = \dfrac{z}{(z-z_+)^2\cdot(z-z_-)^2}$

$z^2+4z+1=0$

$z_\pm = \dfrac{-4\pm\sqrt{12}}{2} = -2\pm\sqrt{3}$ jsou dvojnásobné póly f



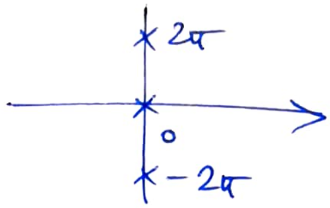
Podle pravidla (3) je

$$\operatorname{res}_{z_+} f = \left(\frac{z}{(z-z_-)^2}\right)'\Bigg|_{z=z_+} =$$

$$= \frac{(z_+-z_-)^2 - z_+\cdot 2\cdot(z_+-z_-)}{(z_+-z_-)^4} = -\frac{z_++z_-}{(z_+-z_-)^3} = \frac{4}{2^3\cdot 3\cdot\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{6\cdot\sqrt{3}}$$ a $\displaystyle\int_\varphi f = \frac{\pi i}{3\sqrt{3}}$, kde φ je jednot. kružnice (x).

Př. $f(z) := \dfrac{z^2 \cdot e^z}{(1-\cos z)^2}$



α_9
$\sqrt{}$

(i) Izolované singularity: $z_k := 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\cos z = \cos(z - z_k) = 1 - \dfrac{(z-z_k)^2}{2} + \dfrac{(z-z_k)^4}{24} - \dots,$

2π-period.

$$1 - \cos z = (z-z_k)^2 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{(z-z_k)^2}{24} + \dots\right)}_{\downarrow \text{ pro } z \to z_k \quad \frac{1}{2}} \sim (z-z_k)^2,$$

tudíž $f(z) \sim \dfrac{z^2}{z^4} = \dfrac{1}{z^2}$ pro $z \to 0$ ... pól násobnosti 2,

$\sim \dfrac{1}{(z-z_k)^4}$ pro $z \to z_k$, $k \neq 0$

... pól násobnosti 4.

(ii) $\operatorname{res}_0 f = \underline{\underline{4}}$ a $\displaystyle\int_\varphi f = \underline{\underline{8\pi i}}$, kde φ je jednod. kružnice $(\times)$.

———— x ————

1. způsob: Laurentův rozvoj f na $P(0, 2\pi)$

$$f(z) = \left(z^2 + z^3 + \dots\right) : \left(\frac{z^4}{4} - \frac{z^6}{24} + \dots\right) = \frac{4}{z^2} + \frac{4}{z} + \dots$$

$$\begin{array}{l} -\left(z^2 - \frac{z^4}{6} + \dots\right) \\ \hline z^3 + \frac{z^4}{6} + \dots \end{array}$$

$$(1-\cos z)^2 = \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \dots\right)^2 = \frac{z^4}{4} - \frac{z^6}{24} + \dots$$

2. způsob: Pomocí pravidla ③ příliš složité ?!

Dcv.

Cv 9
6

Dobrovolný dopoledne, Pří 344–357

U zadaných funkcí určete typ všech izolovaných singularit a spočtěte příslušné rezidua.

Př. $f(z) = z^3 \cdot \cos \frac{1}{(z-2)}$

(i) 2 je podstatná sing. f (Proč?)

(ii) Máme $\cos \frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\,(z-2)^{2n}}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$,

$z^3 = ((z-2)+2)^3 = (z-2)^3 + 6(z-2)^2 + \underbrace{3 \cdot 2^2}_{12}(z-2) + 8,$

$\operatorname{res}_2 f = -\frac{1}{2} \cdot 12 + \frac{1}{24} = -\underline{\underline{\frac{143}{24}}},$

protože $\cos \frac{1}{z-2} = 1 - \frac{1}{2(z-2)^2} + \frac{1}{24(z-2)^4} - \dots$

Př. $f(z) = \sin \frac{z}{z+1}$

(i) -1 je podst. sing. f (Proč?)

(ii) Na $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ máme

$f(z) = \sin\left(1 - \frac{1}{z+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(z+1)^n}$, kde

$\sin(1-w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$, $w \in \mathbb{C}$ a

$a_0 = \sin(1)$, $a_1 = (\sin(1-w))'\Big|_{w=0} = -\cos(1)$, tedy

$\underline{\underline{\operatorname{res}_{-1} f = -\cos 1}}$