ÚVOD DO KOMPLEXNÍ ANALÝZY

- MA: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ spojitost, diferencovatelnost
- KA: $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$
- UKA: $n = m = 1$

Historie

- MA: 17. stol., Newton, Leibnitz
- KA: základy v 19. stol., A. Cauchy (1789 – 1857)
  B. Riemann (1826 – 1866)
  K. Weierstrass (1815 – 1897)

Komplexní čísla

- 16. stol. (Cardano): řešení kubických rovnic

$$z^2 + 1 = 0$$

$z^2 = -1$ nemá řešení v $\mathbb{R}$

$z = \pm i$, kde $\boxed{i^2 = -1}$,

i je tzv. imaginární jednotka

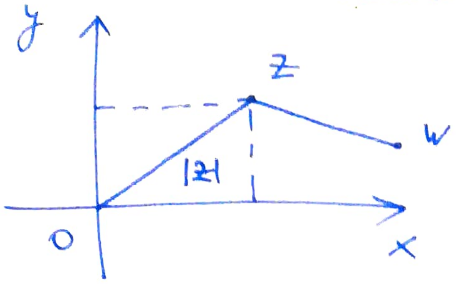
- obecný tvar: $z = x + iy$ pro $x, y \in \mathbb{R}$
- 18./19. stol. (Gauss, Hamilton, ...):

$$z = x + iy \cong (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

bod roviny

$\boxed{\mathbb{R}^2}$

- reálný vektorový prostor dim 2
- Euklidovská norma a metrika:



$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}, \quad z=(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$\rho(z,w) := |z-w|, \quad z,w\in\mathbb{R}^2$$

Dohoda Prostor $\mathbb{C}$ je prostor $\mathbb{R}^2$, v němž definujeme navíc

(i) <u>násobení</u>:

$$(x,y)\cdot(u,v) = (xu-yv,\ xv+yu)$$

(ii) ztotožníme $(x,0)\cong x$, neboli $\boxed{\mathbb{R}\subset\mathbb{C}}$

(iii) značíme $\boxed{i := (0,1)}$

<u>Vlastnosti $\mathbb{C}$</u> Nechť $z=(x,y)\in\mathbb{C}$.

1. Potom $z = x + i\cdot y$ a $(\pm i)^2 = -1$

[Např. $z = (x,0)+(0,y) = (x,0)+(0,1)\cdot(y,0)$
$= x + iy$]

2. Násobení v $\mathbb{C}$ zahrnuje násobení v $\mathbb{R}$ i násobení skalárem v $\mathbb{R}^2$

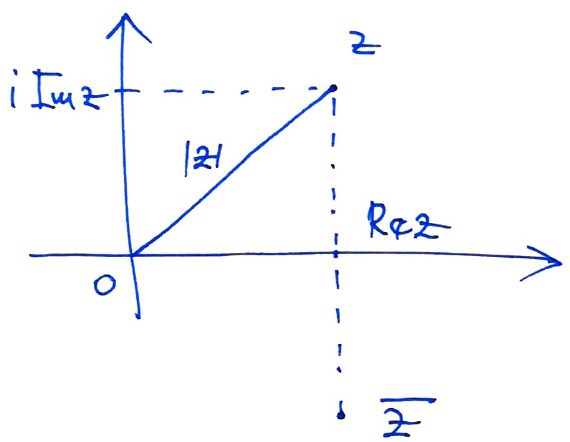
Značení: Nechť $z = x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Potom

$\bar{z} := x - iy$ je komplexně sdružené č. k z,

$\operatorname{Re} z := x$ je reálná část z,

$\operatorname{Im} z := y$ je imaginární část z,

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ je modul nebo absolutní hodnota z



3. $|z|^2 = z\bar{z}$, $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$, $|zw| = |z| \cdot |w|$

$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$, $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$

4. $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, je-li $z \neq 0$

5. $\mathbb{C}$ je těleso

$\boxed{\text{Pozor!}}$ $\mathbb{C}$ nelze rozumně uspořádat

?? $i > 0 \Rightarrow -1 = i^2 > 0$ ↯↯

$i < 0$ —||—

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

1. $\mathbb{R}^2$ je reálný vektorový prostor dim 2
- báze: $(1,0), (0,1)$
- obecné <u>$\mathbb{R}$-lineární zobrazení</u> $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ má tvar

matice L

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

2. $\mathbb{C}$ je komplexní vektorový prostor dim 1
- báze: 1
- obecné <u>$\mathbb{C}$-lineární zobrazení</u> $L: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

má tvar $Lz = wz$, $z \in \mathbb{C}$, kde $w \in \mathbb{C}$.

Nechť $z = x + iy$, $w = a + ib$. Protože $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, máme $Lz = (a+ib)(x+iy) = (ax - by, bx + ay)$

$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

POZOROVÁNÍ $\mathbb{R}$-lineární zobrazení $(*)$ je $\mathbb{C}$-lineární, právě když $\boxed{d = a, \; c = -b}$

<u>Pozn.</u> $\mathbb{C}$-lineární zobrazení jsou velmi speciální $\mathbb{R}$-lineární zobrazení

<u>Úmluva</u>: Nebude-li řečeno něco jiného, funkce znamená komplexní funkci komplexní proměnné.

Na $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se musíme vždy dívat jako na $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, protože $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

—— × ——

Nechť f je funkce z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$.

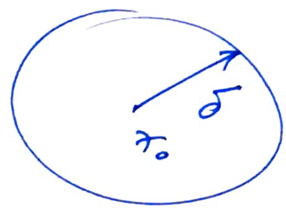
<u>Spojitost, limita</u> (jako v MA)

<u>Označení</u>: Pro $z_0 \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$ značíme

$U(z_0, \delta) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta \}$ ... okolí (kruh)

$P(z_0, \delta) := U(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ ... prstencové okolí

[Pokud δ není důležité, budeme často psát $U(z_0)$, $P(z_0)$.]



Potom definujeme

(i) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$, pokud $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$:

$$z \in P(z_0, \delta) \implies f(z) \in U(L, \varepsilon)$$

(ii) f je spojitá v z_0, pokud

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Diferencovatelnost

1. R-diferencovatelnost (jako v MA)

Definice Funkce f je v z_0 R-diferenc., pokud existuje R-lineární zobrazení $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takové, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - L(h)}{|h|} = 0.$$

Pozn: Potom $df(z_0) := L$ je tzv. totální diferenciál f v z_0 a platí, že

$$df(z_0)h := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} h, \quad h \in \mathbb{R}^2,$$

Jacobiho matice

kde $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$.

2. $\mathbb{C}$-diferencovatelnost

Definice Řekneme, že funkce f je v z_0 <u>$\mathbb{C}$-diferencovatelná</u>, pokud existuje konečná limita

$$f'(z_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}.$$

Číslo $f'(z_0)$ nazýváme <u>komplexní derivací</u> f v z_0.

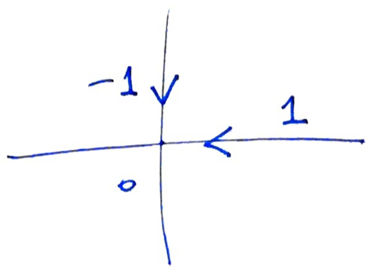
Pozn: Jako pro reálné funkce reálné proměnné platí $(f\pm g)'$, $(f\cdot g)'$, $(f/g)'$, $(f\circ g)'$

Př. (i) $(z^n)' = n\cdot z^{n-1}$, $z\in\mathbb{C}$ a $n\in\mathbb{N}$

(ii) $f(z)=\bar{z}$ není nikde v $\mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-diferenc., ale $f(x,y)=(x,-y)$ je všude $\mathbb{R}$-diferenc.

Skutečně, máme

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\bar{h}}{h} \text{ neex.}$$



VĚTA (Cauchy–Riemannova)

Nechť f je funkce definovaná na okolí $z_0 \in \mathbb{C}$, NTJE:*)

1. Existuje $f'(z_0)$.
2. Existuje $df(z_0)$ a $df(z_0)$ je $\mathbb{C}$-lineární.
3. Existuje $df(z_0)$ a v z_0 platí tzv. Cauchy–Riemannovy podmínky

$$(CR) \quad \boxed{\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}}$$

kde $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$.

DŮKAZ: 2. $\Leftrightarrow$ 3. plyne z pozorování pro lineární zobrazení

1. $\Leftrightarrow$ 2.: Z definice $w = f'(z_0)$ znamená, že

$$(1) \quad 0 = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - wh}{h}.$$

Po vynásobení výrazu v limitě $h/|h|$ dostaneme, že

$$(2) \quad 0 = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - wh}{|h|},$$

což je ekvivalentní tomu, že $df(z_0)h = wh$, $h \in \mathbb{C}$.

Z (2) plyne (1) vynásobením $|h|/h$. ▨

---

*) NTJE = následující tvrzení jsou ekvivalentní

Pozn: (i) Existuje-li $f'(z_0)$, potom

$df(z_0)h = f'(z_0)h$, $h \in \mathbb{C}$ a $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.

(ii) Platí, že (CR) $\Longleftrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$

⌈ (i) $df(z_0)\,1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) + i\,\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) =: \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$

(ii) zřejmé. ⌋

Př. $f(z) = \bar{z}$ $\qquad \frac{\partial f_1}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$

$f(x,y) = (x,-y) \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = -1$

Máme, že $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, ale v žádném $z_0 \in \mathbb{C}$ nesplňuje (CR), proto není nikde $\mathbb{C}$-difer.