Minule: $\int_\varphi f$, PF: $F' = f$

Víme: Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a f je spojitá na G.

NTJE: (1.) f má na G primitivní funkci F, tj. $F' = f$ na G

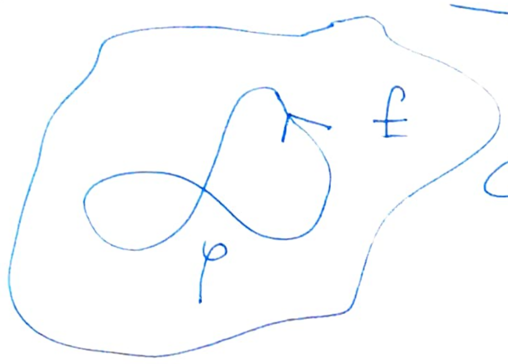
(2.) $\int_\varphi f = 0$ pro každou uzavřenou křivku φ v G.

Je-li G navíc hvězdovitá, potom (1.) $\Leftrightarrow$ (2*.), kde

(2*.) $\int_{\partial\Delta} f = 0$ pro každý trojúhelník $\Delta \subset G$.

$4 \leq 3{,}0$

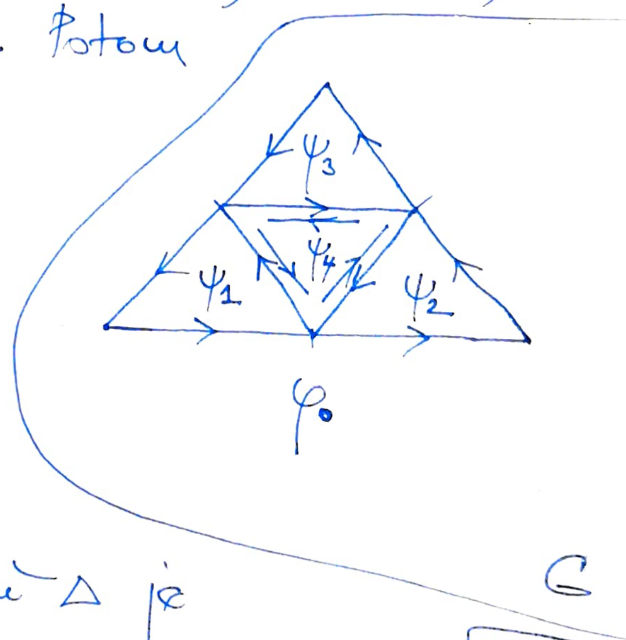
Pozn: Cauchyho věta – Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f \in \mathcal{H}(G)$ a φ je uzavřená křivka v G.



Za jakých podmínek na G a φ je $\int_\varphi f = 0$?

VĚTA (GOURSATOVO LEMMA aneb "Cauchyho věta pro Δ") Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f \in \mathcal{H}(G)$ a Δ je trojúhelník v G. Potom

$$\int_{\partial\Delta} f = 0.$$



OBR.

DŮKAZ: Označme $\varphi_0 := \partial\Delta$.

Sporem: Předpokládejme, že $\left|\int_{\varphi_0} f\right| =: K > 0$. Trojúhe Δ je nedegenerovaný. V Δ vedeme středové příčky a označme $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ obvody čtyř vzniklých trojúhelníků jako na $\boxed{\text{OBR.}}$ Potom

$$\int_{\varphi_0} f = \int_{\psi_1} f + \int_{\psi_2} f + \int_{\psi_3} f + \int_{\psi_4} f.$$

Ex. $j_1 = 1, \dots, 4$ tak, že $\left| \int_{\psi_{j_1}} f \right| \geq \frac{K}{4}$ a $V(\psi_{j_1}) = \frac{V(\varphi)}{2}$.

Označme $\varphi_1 := \psi_{j_1}$. Indukcí sestrojíme posloupnost (uzavřených) trojúhelníků $\Delta_0 := \Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$ s obvody $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ takových, že

$$(1) \qquad \left| \int_{\varphi_j} f \right| \geq \frac{K}{4^j} \quad \text{a} \quad V(\varphi_j) = \frac{V(\varphi)}{2^j}.$$

Máme, že $\bigcap_{j=0}^{\infty} \Delta_j = \{z_0\} \subset G$, protože $\underset{\text{průměr}}{\operatorname{diam}}(\Delta_j) \to 0$.

kompaktu

Položme

$$\varepsilon(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0), \quad z \in G \setminus \{z_0\};$$

$$:= 0, \quad z = z_0.$$

Potom ε je spojitá na G a máme pro $j \in \mathbb{N}_0$

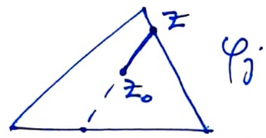
$$(2) \qquad \int_{\varphi_j} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\varphi_j} \underbrace{\Big(f(z_0) + \overset{\text{polynom}}{f'(z_0)(z - z_0)}\Big)}_{\text{má PF na } \mathbb{C}} dz}_{= 0} + \int_{\varphi_j} \varepsilon(z)(z - z_0)\,dz.$$

Pro každé $j \in \mathbb{N}_0$ z (1), (2) dostaneme

$$\frac{K}{4^j} \le \left|\int_{\varphi_j} f\right| \overset{(2)}{=} \left|\int_{\varphi_j} \varepsilon(z)(z-z_0)\,dz\right| \le$$

$$\le V^2(\varphi_j)\max_{\langle\varphi_j\rangle}|\varepsilon| = \frac{V^2(\varphi)}{4^j}\cdot\max_{\langle\varphi_j\rangle}|\varepsilon| .$$

protože $|z-z_0| \le V(\varphi_j)$



Z předchozího tedy máme (po vynásobení 4^j)

$$0 < K \le V^2(\varphi)\cdot\max_{\langle\varphi_j\rangle}|\varepsilon| \longrightarrow 0,\ \text{protože}$$

ε je spojitá v z_0 a $\varepsilon(z_0)=0$. To je ale spor. ∎

Pozn: Ukážeme si, že $f \in \mathcal{H}(G)$, pokud má f na G primitivní funkci.

VĚTA (Cauchyho věta pro hvězdovité oblasti)
Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitá oblast a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom f má na G primitivní funkci.

Ekvivalentně: Platí, že

$$\int_{\varphi} f = 0$$

pro každou uzavřenou křivku φ v G.

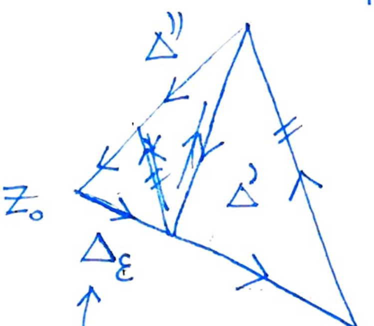
DŮKAZ: z Goursatova lemmatu a dodatku k větě o existenci PF ∎

Pozn: Goursatovo lemma a tedy i předchozí věta platí i pro funkci f, která je spojitá na G a holomorfní na $G \setminus \{z_0\}$ pro nějaké $z_0 \in G$.

⌈ Skutečně, nechť Δ je nedegenerovaný trojúhelník v G. Potom

(i) Nechť $z_0 \notin \Delta$. Potom $\int_{\partial\Delta} f = 0$.

(ii) Nechť z_0 je vrchol Δ. Potom

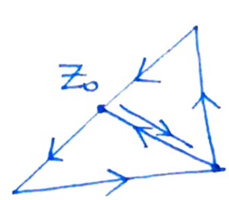


$$\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta_\varepsilon} f + \underbrace{\int_{\partial\Delta'} f}_{\overset{(i)}{=}\,0} + \underbrace{\int_{\partial\Delta''} f}_{=\,0}, \text{ tudíž}$$

trojúhelník podobný s Δ, poměr stran roven ε

$$\left|\int_{\partial\Delta} f\right| = \left|\int_{\partial\Delta_\varepsilon} f\right| \leq \varepsilon \cdot V(\partial\Delta) \cdot \max_{\Delta} |f| \xrightarrow{\text{pro } \varepsilon \to 0+} 0$$

Tedy $\int_{\partial\Delta} f = 0$.



(iii) Nechť z_0 leží uvnitř strany Δ.

(iv) Nechť z_0 leží uvnitř Δ.

VĚTA (o derivování integrálu podle komplexního parametru) Nechť φ je křivka v $\mathbb{C}$ a $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Nechť $F(z,s)$ a komplexní derivace $\frac{\partial F}{\partial s}(z,s)$ jsou spojité komplexní funkce na $\langle\varphi\rangle \times \Omega$. Pro každé $s \in \Omega$ položme

$$\phi(s) := \int_\varphi F(z,s)\,dz.$$

Potom $\phi \in \mathcal{H}(\Omega)$ a $\phi'(s) = \int_\varphi \frac{\partial F}{\partial s}(z,s)\,dz$, $s \in \Omega$.

DŮKAZ: Pro $s = s_1 + i s_2 = (s_1, s_2) \in \Omega$ máme

$$\phi(s) = \int_\alpha^\beta F(\varphi(t), s_1, s_2)\cdot\varphi'(t)\,dt,$$

pokud $\varphi : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{C}$.

Podle vět o spojitosti a derivování integrálu závislého na reálných parametrech

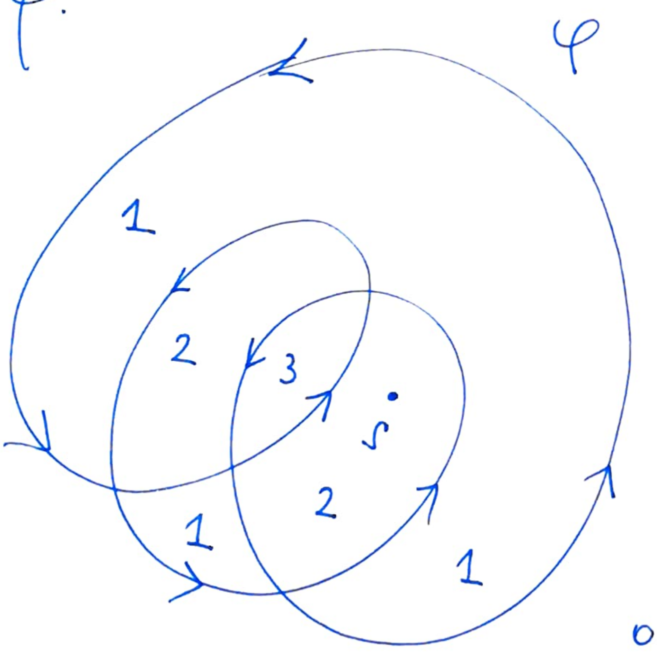
$$\frac{\partial \phi}{\partial s_j}(s) = \int_\varphi \frac{\partial F}{\partial s_j}(z,s)\,dz, \quad s \in \Omega \text{ a } j = 1,2$$

jsou spojité a splňují CR-podmínky, protože $\frac{\partial F}{\partial s_j}$ jsou takové. Z CR-věty dostaneme zbytek. ∎

DEF. Nechť φ je uzavřená křivka v $\mathbb{C}$ a $s \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$. Potom číslo

$$\operatorname{ind}_\varphi s := \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{dz}{z-s}$$

nazveme **indexem** bodu s vzhledem ke křivce φ.



Pozn: Ukážeme si, že $\operatorname{ind}_\varphi s$ se rovná počtu oběhů φ kolem s v kladném smyslu (tzn. proti směru hodinových ručiček)

VĚTA (o základních vlastnostech indexu)

Nechť φ je uzavřená křivka v $\mathbb{C}$ a $G := \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$.

Potom G je otevřená, funkce $s \mapsto \mathrm{ind}_\varphi s$ je konstantní na každé komponentě G a na jediné její neomezené komponentě je nulová.

DŮKAZ: (i) Podle předchozí věty je

$$\phi(s) := \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{dz}{z-s}, \quad s \in G$$

holomorfní a pro každé $s \in G$ je

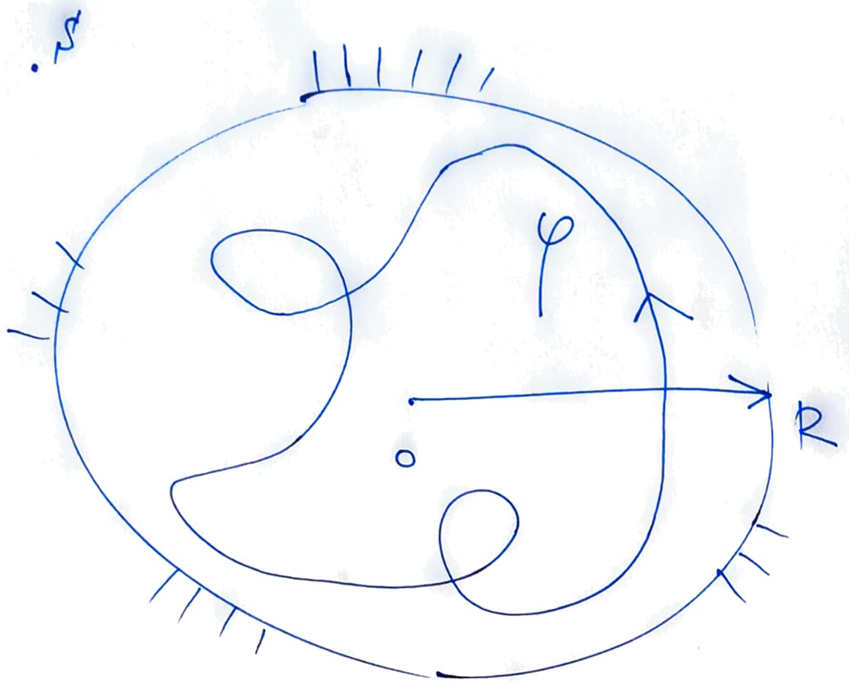
$$\phi'(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{dz}{(z-s)^2} = 0,$$

protože $f(z) := \dfrac{1}{(z-s)^2}$ má PF na $\mathbb{C} \setminus \{s\}$.

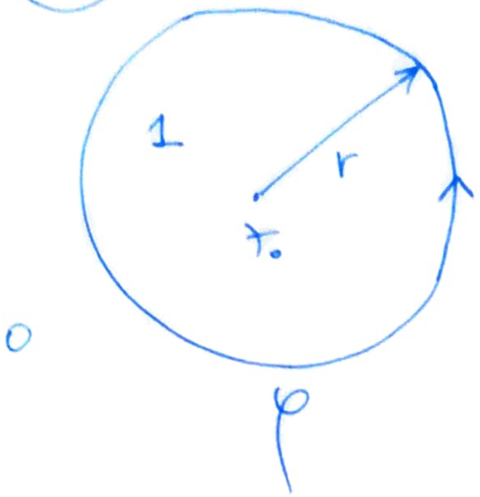
Tedy ϕ je konstantní na každé komponentě G.

(ii) Vol $R>0$, aby $\langle\varphi\rangle \subset U(0,R)$ (kompakt). Potom $\mathbb{C} \setminus U(0,R)$ je obsaženo v jediné neomezené komponentě G_0 množiny G. Navíc pro $s \in \mathbb{C} \setminus U(0,R)$ je funkce $g(z) := \dfrac{1}{z-s}$, $z \in U(0,R)$ holomorfní a dle Cauchyho věty pro hvězdovitou oblast $U(0,R)$ je $\phi(s) = 0$. ∎

OBR pro (ii) :



Pr. Nech $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a $\varphi(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.



Potom $\operatorname{ind}_\varphi s = 1$, $|s - z_0| < r$;

$= 0$, $|s - z_0| > r$.

⌈ Spočítajme len, že

$$\operatorname{ind}_\varphi z_0 = \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\int_\varphi \frac{dz}{z - z_0}}_{= 2\pi i} = 1.$$

Zbytok z predchozí vety. ⌋