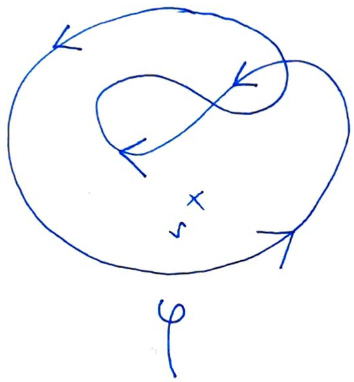
Minule

Cauchyho věta: Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitá oblast a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom $\int_\varphi f = 0$ pro každou uzavřenou φ v G.

Index: $\operatorname{ind}_\varphi s := \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{dz}{z-s}, \; s \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$



VĚTA (Cauchyův vzorec pro kruh)

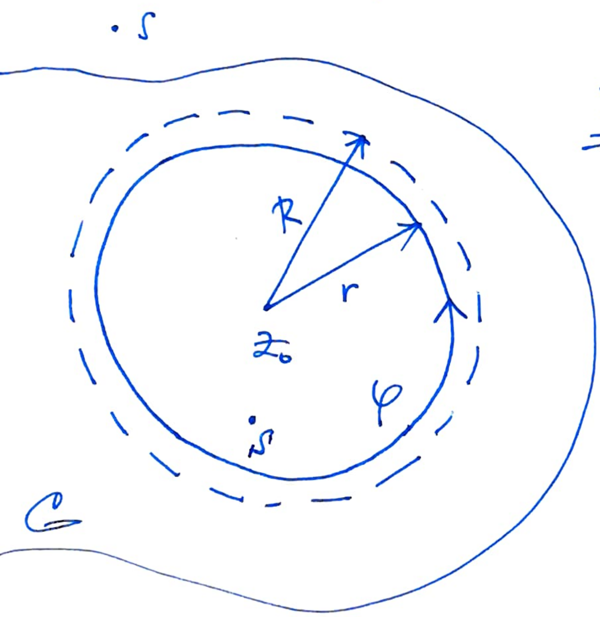
Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f \in \mathcal{H}(G)$.

Nechť $\overline{U(z_0, r)} \subset G$ a $\varphi(t) := z_0 + re^{it}, \; t \in [0, 2\pi]$ (*).

Potom platí

$$(CV_z) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z-s}\, dz = f(s), \quad |s - z_0| < r;$$

$$= 0, \quad |s - z_0| > r.$$



DŮKAZ: (i) Ex. $R > r$ tak, že $U(z_0, R) \subset G$. Nechť $|s - z_0| < r$.

Definujme

$$h(z) := \frac{f(z) - f(s)}{z - s}, \quad z \neq s \text{ a } z \in G;$$

$$:= f'(s), \quad z = s.$$

Potom $h \in \mathcal{H}(U(z_0, R) \setminus \{s\})$ a spojitá na hvězdovité oblasti $U(z_0, R)$. Potom z Cauchyho vět

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi h = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z-s}\, dz - f(s) \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{dz}{z-s}}_{\substack{\| \\ \operatorname{ind}_\varphi s = 1 \\ \text{minule}}}.$$

(ii) Nechť $|s-z_0|>r$. Volme $R' \in (r, |s-z_0|)$, aby $U(z_0,R') \subset G$. Potom $g(z) := f(z)/(z-s)$ je holomorfní na $U(z_0,R')$ a z Cauchyho věty je

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-s}\,dz = 0. \quad ▨$$

DŮSLEDEK: Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom f má komplexní derivace všech řádů všude na G. Nechť $\overline{U(z_0,r)} \subset G$ a φ je jako v $(*)$. Potom

$$(CV_z^{(k)}) \qquad \frac{k!}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{(z-s)^{k+1}}\,dz = f^{(k)}(s), \quad |s-z_0|<r$$
$$\text{a } k=0,1,2,3,\dots$$

Zde $f^{(0)} := f$ a k-tá komplexní derivace $f^{(k)}$ je definována jako $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$, má-li pravá strana smysl.

DŮKAZ: Z věty o derivování integrálu dle komplexního parametru a (CV_z), protože

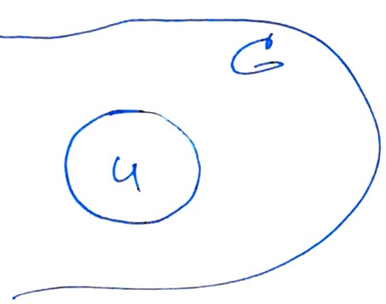
$$\frac{d^k}{ds^k}\left(\frac{1}{z-s}\right) = \frac{k!}{(z-s)^{k+1}}, \quad z \neq s. \quad ▨$$

<u>VĚTA</u> (MORERA) Nechť f je spojitá funkce na otevřené $G \subset \mathbb{C}$. Potom $f \in \mathcal{H}(G)$, právě když

(△) $\int_{\partial \triangle} f = 0$ pro každý trojúhelník $\triangle \subset G$.

<u>DŮKAZ</u>: $\boxed{\Longrightarrow}$ Goursatovo lemma

$\boxed{\Longleftarrow}$ Nechť $U := U(z_0, R)$ je libovolný kruh v G.



Protože f je spojitá na U, U je hvězdovitá oblast a

$$\int_{\partial \triangle} f = 0$$

pro každý trojúhelník $\triangle \subset U$, má f na U primitivní funkci F, ~~tzn~~ tzn. $f = F'$ na U. Protože $F \in \mathcal{H}(U)$, máme $f' = F''$ na U, tudíž f je holomorfní na U. Protože U byl <u>libovolný</u> kruh v G, je $f \in \mathcal{H}(G)$. ∎

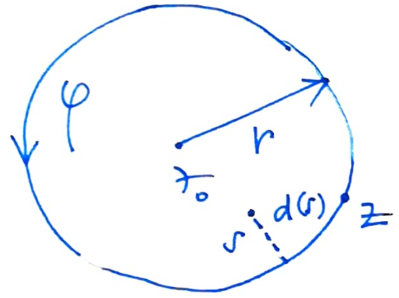
<u>POZN</u>: Zřejmě platí, že $f \in \mathcal{H}(G)$, pokud má f na G primitivní funkci.

VĚTA (Cauchyho odhady)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in (0, +\infty)$ a f je holomorfní funkce na otevřené množině obsahující $\overline{U(z_0, r)}$. Potom pro každé $k = 0, 1, 2, \dots$ je

(CO$_1$) $\forall s \in U := U(z_0, r)$: $\displaystyle |f^{(k)}(s)| \leq \frac{(k!)\, r}{(d(s))^{k+1}} \max_{\partial U} |f|$,

kde $\displaystyle d(s) := \underbrace{\mathrm{dist}}_{\text{vzdálenost}}(s, \partial U) \overset{\text{def.}}{:=} \min_{z \in \partial U} |s - z|$.



(CO$_2$) $\forall s \in U(z_0, r/2)$: $\displaystyle |f^{(k)}(s)| \leq \frac{k!\, 2^{k+1}}{r^k} \max_{\partial U} |f|$,

(CO$_3$) $\displaystyle |f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k} \max_{\partial U} |f|$.

DŮKAZ: (CO$_1$) dostaneme z (CV$_2^{(k)}$), protože

$$|f^{(k)}(s)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{(z-s)^{k+1}}\, dz \right| \leq \frac{k!}{\cancel{2\pi}} \cdot \cancel{2\pi} r \cdot \frac{1}{(d(s))^{k+1}} \max_{\partial U} |f|$$

a $|z - s| \geq d(s)$, $z \in \partial U = \langle \varphi \rangle$, kde $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. (CO$_2$) plyne z (CO$_1$), protože $d(s) \geq \frac{r}{2}$ $\forall s \in U(z_0, r/2)$. (CO$_3$) plyne z (CO$_1$), protože $d(z_0) = r$. ▨

VĚTA (LIOUVILLE) Je-li f holomorfní a omezená na $\mathbb{C}$, potom je f konstantní.

DŮKAZ: Ukážeme, že $f' = 0$ na $\mathbb{C}$.

Označme $M := \sup_{\mathbb{C}} |f| < +\infty$. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$.

Z (Co_3) dostaneme pro každé $r > 0$

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{r} \max_{\partial U(z_0,r)} |f| \leq \frac{M}{r} \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0,$$

tudíž $f'(z_0) = 0$. ■

DŮSLEDEK (Základní věta algebry)

V $\mathbb{C}$ má polynom stupně aspoň 1 vždy aspoň 1 kořen.

DŮKAZ: Nechť $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, kde $a_j \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$ a $n \geq 1$. $\boxed{\text{Polož } f := \frac{1}{p}.}$

Sporem: Předpokládejme, že $p \neq 0$ na $\mathbb{C}$. ②

Potom f je holomorfní a omezená na $\mathbb{C}$, tudíž dle LIOUVILLEOVY VĚTY je f i p konstantní. Tedy $p' = 0$ a $0 = p^{(n)} = n! \, a_0$, což je spor.

Omezenost f: Máme

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{z^n \cdot \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n}\right)} \right| \leq \frac{1}{r^n} \cdot \underbrace{\frac{1}{|a_0| - \frac{|a_1|}{r} - \dots - \frac{|a_n|}{r^n}}}_{\to 0}$$

pro $r = |z| \to +\infty$.

Ex. $r_0 \in (0, +\infty)$ tak, že $|f(z)| \leq 1$, je-li $|z| > r_0$. Funkce f je omezená na $\overline{U(0, r_0)}$, protože je tam spojitá. ▨

LEMMA: Nechť φ je křivka v $\mathbb{C}$, f_n jsou spojité funkce na $\langle\varphi\rangle$ pro $n = 1, 2, 3, \dots$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle\varphi\rangle$. Potom f je spoj. na $\langle\varphi\rangle$ a $\int_\varphi f_n \to \int_\varphi f$.

DŮKAZ: Máme

$$\left| \int_\varphi f_n - \int_\varphi f \right| = \left| \int_\varphi (f_n - f) \right| \leq V(\varphi) \cdot \max_{\langle\varphi\rangle} |f_n - f| \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

▨

VĚTA (WEIERSTRASS)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f_n \in \mathcal{H}(G)$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na G. Potom $f \in \mathcal{H}(G)$ a

$$f_n^{(k)} \overset{loc}{\rightrightarrows} f^{(k)} \quad \text{na } G$$

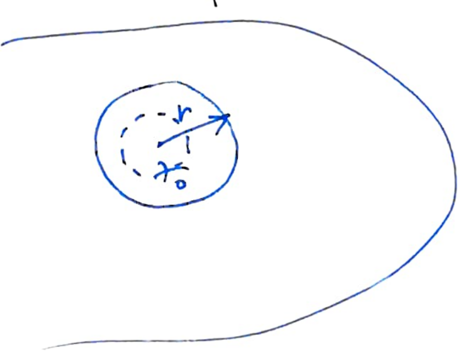
pro každé $k \in \mathbb{N}$.

DŮKAZ: 1. Zřejmě je f spojitá. Nechť Δ je trojúhelník v G. Potom

$$0 = \int_{\partial\Delta} f_n \xrightarrow{\text{LEMMA}} \int_{\partial\Delta} f = 0.$$

Z Morerovy věty je $f \in \mathcal{H}(G)$.

2. Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $z_0 \in G$. Volme $r > 0$, aby $\overline{U(z_0, r)} \subset G$. Potom z ($CO_2$) máme: $\forall s \in U(z_0, r/2)$



$$\underbrace{\left| f_n^{(k)}(s) - f^{(k)}(s) \right|}_{= (f_n - f)^{(k)}(s)} \leq \frac{k!\, 2^{k+1}}{r^k} \underbrace{\max_{\partial U(z_0, r)} |f_n - f|}_{\to 0 \text{ pro } n \to +\infty}$$

▨