Mocninné řady

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Potom

(Ř) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad (z \in \mathbb{C})$

je <u>mocninná řada</u> o středu z_0 s koeficienty $\{a_n\}_0^{\infty}$.

Vlastnosti:

① **Konvergence** (na cvičení)

Ex. jediné $R \in [0, +\infty]$ takové, že

(a) řada (Ř) <u>konverguje absolutně</u> a <u>lokálně stejnoměrně</u>*) na $U(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$;

(b) řada (Ř) <u>diverguje</u> pro $|z - z_0| > R$.

Číslo R se nazývá <u>poloměr konvergence</u> (Ř) a platí, že

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$ kde položíme $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$.

② Označíme-li součet (Ř) na $U(z_0, R)$ jako f, potom je $f \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$ a

Pozn: *) Zde $U(z_0, +\infty) = \mathbb{C}$.

$\forall k \in \mathbb{N}_0 \ \forall z \in U(z_0, R)$:

$$(\square) \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (z-z_0)^{n-k};$$

speciálně $a_k = f^{(k)}(z_0) / k!$

<u>Pozn:</u> MŘ derivujeme "člen po členu", tj. můžeme zaměnit $\sum$ a komplex derivaci.

<u>DŮKAZ</u>: ① <u>Lokálně stejnoměrná konvergence</u>: Nechť $\rho \in (0, R)$. Potom (R°) konvergují stejnoměrně na $\overline{U(z_0, \rho)}$, protože $\forall z \in \overline{U(z_0, \rho)}$: $|a_n (z-z_0)^n| \le |a_n| \rho^n$ a $\sum_0^{+\infty} |a_n| \rho^n < +\infty$ (tm. (R°) konvergují abs. např. v $z_0 + \rho$).

② Pro $s_N(z) := \sum_{n=0}^{N} a_n (z-z_0)^n$ platí, že $s_N \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $U(z_0, R)$ a z <u>Weierstrassovy věty</u> $\forall k \in \mathbb{N}$: $s_N^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{N} a_n \cdot n \cdots (n-k+1) \cdot (z-z_0)^{n-k} \overset{loc}{\rightrightarrows} f^{(k)}(z)$, $z \in U(z_0, R)$, tudíž $(\square)$.

Dosadíme-li do $(\square)$ $z = z_0$, dostaneme

$$f^{(k)}(z_0) = a_k \cdot (k!).$$

Věta (o rozvoji holomorfní fce na kruhu do mocninné řady)

Nechť $R \in (0,+\infty]$ a $f \in \mathcal{H}(U(z_0,R))$.

Potom existuje jediná mocninná řada

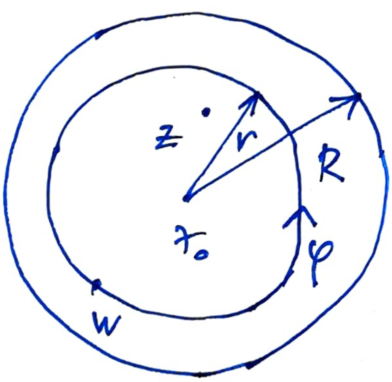
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

která má na $U(z_0,R)$ součet f. Navíc platí, že $a_n = f^{(n)}(z_0)/(n!)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

DŮKAZ: (i) jednoznačnost: zřejmé z toho, že

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

(ii) existence: Nechť $z \in U(z_0,R)$. Volme $r>0$, aby $|z-z_0| < r < R$. Potom z (CVr) je



(1) $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi} \frac{f(w)}{w-z}\,dw, \quad \text{kde}$$

$$\varphi(t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in [0,2\pi].$$

Pro každé $w \in \langle \varphi \rangle$ máme

(2) $$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\cdot \frac{1}{1-\underbrace{\frac{z-z_0}{w-z_0}}_{|\dots|<1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \quad \text{stejnoměrně pro } w \in \langle \varphi \rangle.$$

Dosadí (2) do (1). Potom

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}}_{\text{stejn. na } \langle\varphi\rangle} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} f(w)\, dw =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw}_{= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \text{ z } (CV_2^{(n)})} . \blacksquare$$

Př. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$, protože $\exp \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ a $\exp^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$.

VĚTA (o nulovém bodě)

Nechť f je holomorfní funkce na okolí $z_0 \in \mathbb{C}$ a $f(z_0) = 0$. Potom buď

(1.) existuje $r > 0$, že $f = 0$ na $U(z_0, r)$,

anebo

(2.) existuje $r > 0$, že $f \neq 0$ na $P(z_0, r) := U(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

V případě (2.) existuje jediné $p \in \mathbb{N}$ takové, že

(○) $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(p-1)}(z_0) = 0$, $f^{(p)}(z_0) \neq 0$.

Číslo p nazýváme <u>násobnost nulového bodu</u> z_0 funkce f.

Navíc z_0 je nulový bod f násobnosti p, právě když existuje $r > 0$ a $g \in \mathcal{H}(U(z_0, r))$ tak, že $\forall z \in U(z_0, r)$:

(△) $g(z) \neq 0$ a $f(z) = (z - z_0)^p g(z)$.

DŮKAZ: Máme, že $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $z \in U(z_0, R)$. Pokud nenastane (1.), potom ex. $n \in \mathbb{N}$, že $0 \neq a_n = f^{(n)}(z_0)/(n!)$. Zvolme nejmenší $p \in \mathbb{N}$, aby $a_p \neq 0$. Potom platí (o) a $\forall z \in U(z_0, R)$:

$$f(z) = a_p (z-z_0)^p + \dots = (z-z_0)^p \cdot \underbrace{\sum_{n=p}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-p}}_{\overset{\text{def}}{=} g(z)} ,$$

Protože $g(z_0) = a_p \neq 0$, existuje $R > r > 0$, že $g \neq 0$ na $U(z_0, r)$ a $f(z) = (z-z_0)^p g(z) \neq 0$ na $P(z_0, r)$. Obrácené tvrzení plyne snadno. $\blacksquare$

VĚTA (o jednoznačnosti pro holomorfní fce)

Nechť $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f, g \in \mathcal{H}(G)$.

NTJE:

1. $f = g$ na G;
2. množina $M := \{z \in G \mid f(z) = g(z)\}$ má v G hromadný bod, tj. existuje $z_0 \in G$ takový, že $M \cap P(z_0, r) \neq \emptyset$ $\forall r > 0$;
3. existuje $z_0 \in G$, že $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$.

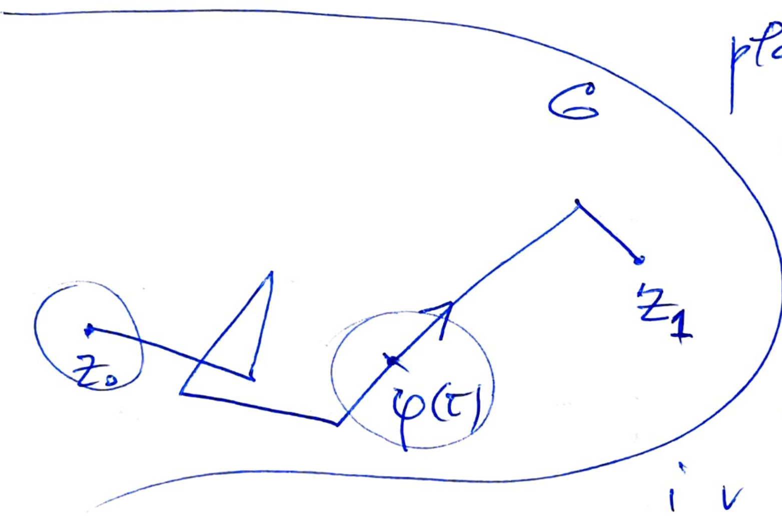
DŮKAZ: BÚNO (= BEZ ÚJMY NA OBECNOSTI) $g \equiv 0$ na G (jinak uvažme $f - g$).

1. $\Rightarrow$ 2., 2. $\Rightarrow$ 3.: Nechť $z_0 \in G$ je hromadný bod $M := \{z \in G \mid f(z) = 0\}$, zřejmě $f(z_0) = 0$, z věty o nulovém bodě je $f \equiv 0$ na nějakém okolí z_0, tudíž platí 3.

(3.) $\Rightarrow$ (1.): Ukážeme, že $\forall z \in G$:

(*) $f^{(k)}(z) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$.

<u>Sporem</u>: Předpokládejme, že ex. $z_1 \in G$, pro který (*) neplatí. Protože G je oblast, ex. lomená čára $\varphi : [a,b] \to G$ z bodu z_0 do z_1. Položme $\tau := \inf\{t \in [a,b] \mid (*) \text{ neplatí v } \varphi(t)\}$. Z věty o nulovém bodě plyne $a < \tau \leq b$. Ze spojitosti všech $f^{(k)}$ zjevně (*) platí i v $\varphi(\tau)$. Proto $a < \tau < b$, ale to není možné z věty o nulovém bodě. $\lightning$

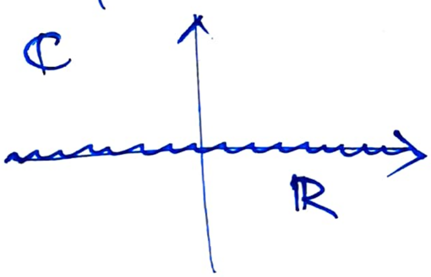


$\blacksquare$

Př. Vzoreček

$$\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

dostaneme z věty o jednoznačnosti, protože obě strany rovnosti jsou celé funkce a víme, že rovnost platí na $\mathbb{R}$ (tzn. platí (2.))



<u>Pozn:</u> Podobně lze řadu vzorečků bez počítání zobecnit z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$!

VĚTA (Princip maxima modulu)

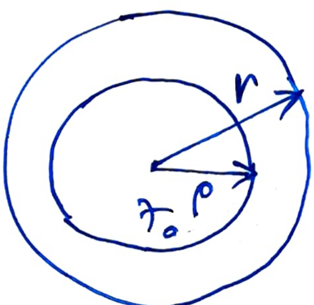
Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je <u>oblast</u> a $f \in \mathcal{H}(G)$.

Potom je f konstantní na G, pokud $|f|$ nabývá v G <u>lokálního maxima</u>, tzn. existuje $z_0 \in G$ a $r > 0$ takové, že

$$\forall z \in \underset{G}{\underset{\cap}{U(z_0,r)}}: \ |f(z)| \leq |f(z_0)|. \qquad (+)$$

DŮKAZ: Nechť platí $(+)$. Potom

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z \in U(z_0,r).$$



Pro $0 < \rho < r$ platí, že

$$|a_0|^2 = |f(z_0)|^2 \overset{(+)}{\geq} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})|^2 \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n e^{int} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m} \rho^m e^{-imt} \right) dt$$

$$|f(z)|^2 = f(z) \cdot \overline{f(z)}$$

[obě řady konvergují stejnoměrně a absolutně pro $t \in [0,2\pi]$, tudíž i jejich součin]

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \cdot \overline{a_m}\, \rho^{n+m} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}\, dt}$$

$$\frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(n-m)t}}{i(n-m)} \right]_{t=0}^{2\pi} = 0, \text{ je-li } n \neq m \qquad 1, \text{ je-li } n = m$$

$= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n}$. Neboli $|a_0|^2 \geq |a_0|^2 + |a_1|^2 \rho^2 + \dots$, tudíž $0 = a_1 = a_2 = \dots$ Dostáváme, že $f = a_0$ na $U(z_0, r)$ a z věty o jednoznačnosti $f = a_0$ na G. $\blacksquare$