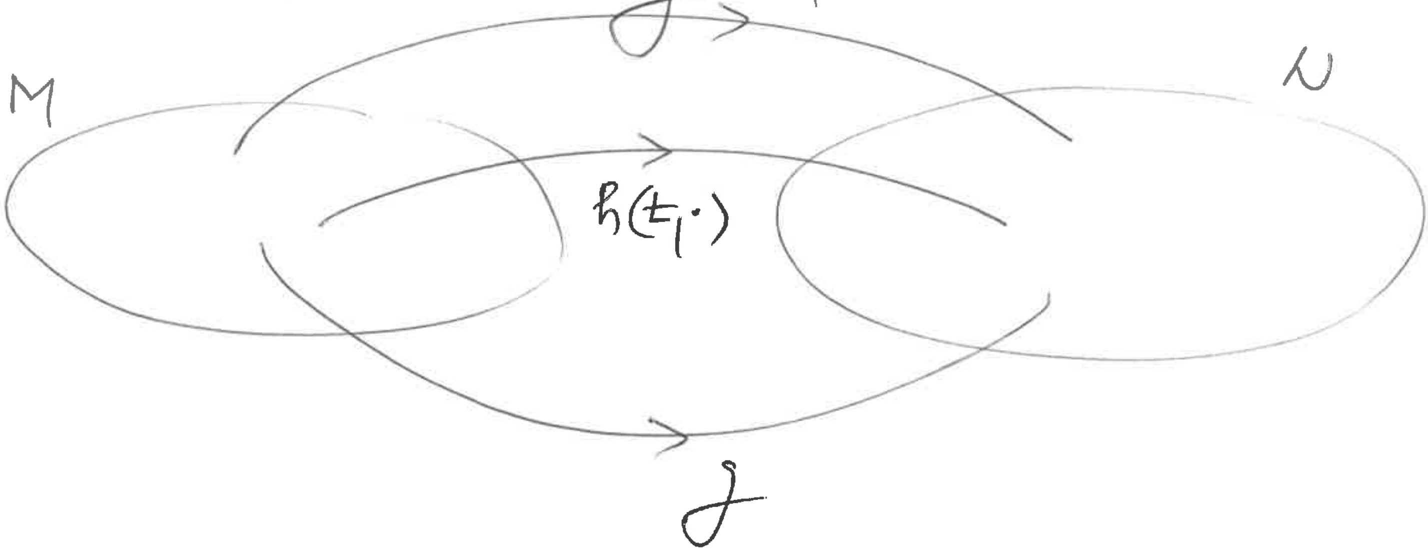
DEF. Nechť M, N jsou hladké variety a f, g jsou hladká zobrazení M do N. Řekneme, že f, g jsou (hladce) homotopické, pokud existuje hladké zobrazení

$h: \langle 0,1\rangle \times M \longmapsto N$ takové, že

$\forall x \in M: \; h(0,x) = f(x)$ a $h(1,x) = g(x)$.

Pozn: $h(t,\cdot)$, $t \in \langle 0,1\rangle$ jsou "hladké deformace" zobrazení f na g.



VĚTA (o homotopii) Jsou-li f a g homotopická zobrazení variety M do variety N, potom $f_k^* = g_k^*$ pro $k = 0, \dots, n$

jakožto zobrazení $H^k(N) \longrightarrow H^k(M)$,

nikoli $\mathcal{E}^k(N) \longrightarrow \mathcal{E}^k(M)$.

DRY

Nechť M je hladká varieta. Potom $\langle 0,1\rangle$ chápeme jako varietu s okrajem a $\langle 0,1\rangle\times M$ jako kartézský součin variet.

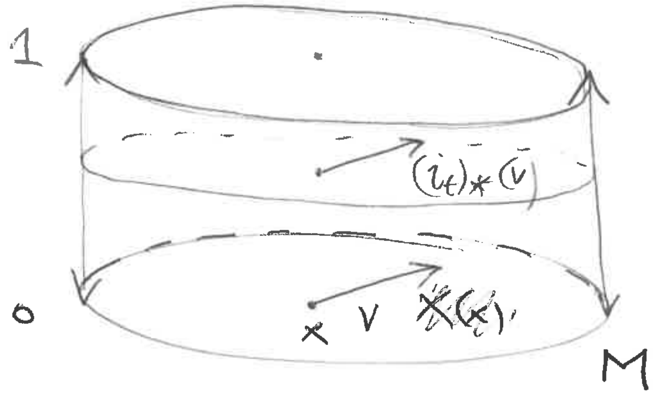
(i) Nechť (U,φ) je mapa na M. Potom

$$(\langle 0,1\rangle\times U, \phi), \text{ kde } \phi(t,x) := (t,\varphi(x)),$$

je mapa na $\langle 0,1\rangle\times M$. Zde

$\phi : \langle 0,1\rangle\times U \longrightarrow \mathbb{R}^{1+n}$ a označme

$\phi = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$.

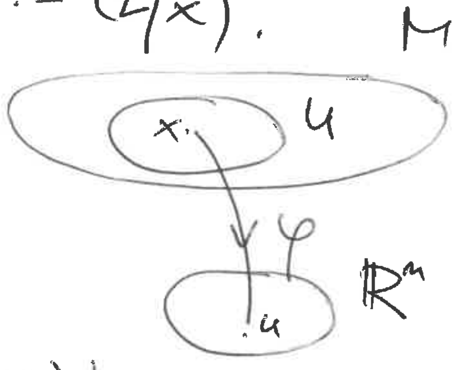


(ii) Označme pro každé $t\in\langle 0,1\rangle$ vnoření

$$i_t : M \longmapsto \langle 0,1\rangle\times M,\quad i_t(x) := (t,x).$$

Nechť $v\in T_xM$. Potom

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x_i},$$



kde $\forall f\in \mathcal{E}_x$: $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_x := \left.\frac{\partial (f\circ\varphi^{-1})}{\partial u_i}\right|_u$, je-li $u=\varphi(x)$.

<u>LÉPE</u>: $\left.\frac{\partial f}{\partial u_i}\right|_x :=$

Potom $(i_t)_* v \in T_{(t,x)}(\langle 0,1\rangle \times M)$ a

DRJ

$$(i_t)_* v = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i},$$

kde $\left.\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_i}\right|_{(t,x)} := \left.\frac{\partial}{\partial u_i} f(t, \varphi^{-1}(\cdot))\right|_u$, je-li

$u = \varphi(x)$ a $f \in \mathcal{E}_{(t,x)}$. LEPE: $\left.\frac{\partial f}{\partial \tilde{u}_i}\right|_{(t,x)} :=$

(iii) Definujme $P: \mathcal{E}^k(\langle 0,1\rangle \times M) \longrightarrow \mathcal{E}^{k-1}(M)$ jako

$$(P\eta)(v_1, \dots, v_{k-1}) := \int_0^1 \eta\left(\frac{\partial}{\partial t}, (i_t)_* v_1, \dots, (i_t)_* v_{k-1}\right) dt,$$

kde $v_1, \dots, v_{k-1} \in T_x M$ a $\frac{\partial}{\partial t}$ je souřadnicové pole na $\langle 0,1\rangle \times M$ definované $\forall f \in \mathcal{E}_{(t,x)}$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{(t,x)} := \left.\frac{d}{ds} f(s,x)\right|_{s=t}$$

(iv) Nechť $\eta \in \mathcal{E}^k(\langle 0,1\rangle \times M)$ a na $\langle 0,1\rangle \times U$ je

$$\eta = \sum_{|I|=k} a_I(t,x)\, d\tilde{x}_I + \sum_{|I|=k-1} b_I(t,x)\, dt \wedge d\tilde{x}_I,$$

kde $d\tilde{x}_I = d\tilde{x}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\tilde{x}_{i_k}$, $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ jsou prvky I a $d\tilde{x}_j := d\phi_j$.

DRG

Nechť $v_1, \dots, v_{k-1} \in T_x M$ a $x \in \mathcal{U}$.
Potom $\eta\left(\frac{\partial}{\partial t}, (i_t)_* v_1, \dots, (i_t)_* v_{k-1}\right) =$

$$= \sum_{|I|=k-1} b_I(t,x)\, d\tilde{x}_I\left((i_t)_* v_1, \dots, (i_t)_* v_{k-1}\right)$$

$$= \sum_{|I|=k-1} b_I(t,x)\, dx_I(v_1, \dots, v_{k-1}), \text{ tudíž}$$

$$\boxed{P\eta = \sum_{|I|=k-1} \left(\int_0^1 b_I(t,x)\, dt\right) dx_I \text{ na } \mathcal{U}.}$$

zde $dx_j = d\varphi_j$.

<u>LEMMA</u>: Pro každé $\eta \in \mathcal{E}^k(\langle 0,1\rangle \times M)$ platí

$$I(d\eta) = i_1^*\eta - i_0^*\eta - d(P\eta).$$

<u>DŮKAZ</u>: Díky linearitě všech operátorů P, d, i_0^*, i_1^* stačí dokázat pro η takové, že $\operatorname{supp}\eta \subset \langle 0,1\rangle \times \mathcal{U}$ pro nějakou mapu $(\mathcal{U},\varphi)$ na M. Skutečně, jinak užijeme rozklad jednotky $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ na M podřízený danému atlasu na M. Víme, že $\eta = \sum_{\alpha\in A} f_\alpha \eta$ a tudíž stačí dokázat pro všechna $f_\alpha\eta$. Dále se stačí omezit na η tvaru:

1. $\eta = a(t,x)\, d\tilde{x}_I$, kde $|I| = k$, nebo | DR7

2. $\eta = b(t,x)\, dt \wedge d\tilde{x}_I$, kde $|I| = k-1$.

---

1. Podle (iv) je $P\eta = 0$ a

$$d\eta = \frac{\partial a}{\partial t} dt \wedge d\tilde{x}_I + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial \tilde{x}_i} d\tilde{x}_i \wedge d\tilde{x}_I,$$

$$P(d\eta) = \left(\int_0^1 \frac{\partial a(t,x)}{\partial t} dt \right) dx_I =$$

$$= \left(a(1,x) - a(0,x) \right) dx_I =$$

$$= i_1^* \eta - i_0^* \eta.$$

2. Protože $i_0^*(dt) = 0 = i_1^*(dt)$, je $i_1^* \eta = 0 = i_0^* \eta$.

Dále je $P\eta = \left(\int_0^1 b(t,x)\, dt \right) dx_I$ a

$$d(P\eta) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial \tilde{x}_i}(t,x) \right) dx_i \wedge dx_I.$$

Protože $d\eta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b}{\partial \tilde{x}_i} \underbrace{d\tilde{x}_i \wedge dt}_{= -dt \wedge d\tilde{x}_i} \wedge d\tilde{x}_I,$

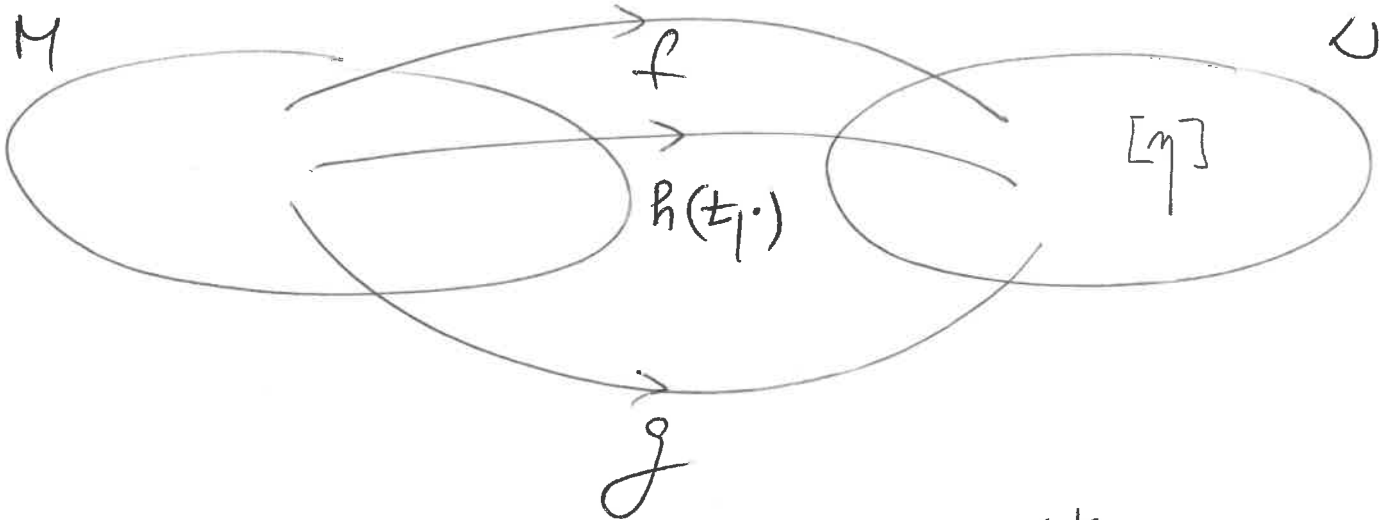
dostaneme

$$P(d\eta) = -\sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial \tilde{x}_i}(t,x)\, dt \right) dx_i \wedge dx_I. \quad \blacksquare$$

DŮKAZ VĚTY O HOMOTOPII:

Nech $f, g: M \to N$ sú hladké zobrazenia, ktoré sú homotopické, tzn. ex. hladké $h: \langle 0, 1\rangle \times M \to N$ také, že $\forall x \in M$:

$$f(x) = h(0, x) \quad \text{a} \quad g(x) = h(1, x).$$



Nech $[\eta] \in H^k(N)$, tzn. $\eta \in \mathcal{E}^k(N)$ a $d\eta = 0$. Ukážeme, že $[f^*\eta] = [g^*\eta] \in H^k(M)$. Pretože $f = h \circ i_0$ a $g = h \circ i_1$, máme

$$g^*\eta - f^*\eta = i_1^*(h^*\eta) - i_0^*(h^*\eta) \overset{\text{LEMMA}}{=}$$

$$= P(\underbrace{d(h^*\eta)}_{= h^*(d\eta) = 0}) + \underbrace{d(P(h^*\eta))}_{\text{exaktná}}.$$

$\blacksquare$

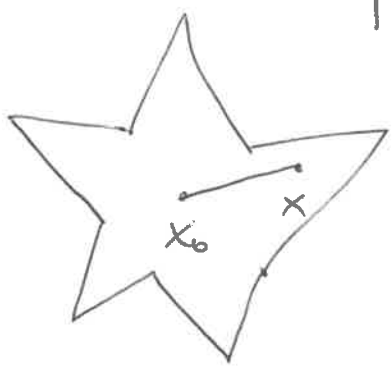
DŮSLEDEK 1: Nechť $f: M \to N$ | DR 9

je hladké zobrazení mezi varietami, které je homotopické s konstantním zobrazením. Potom $f_k^* = 0$ pro každé $k > 0$.

DŮKAZ: Nechť $f: M \to N$ je konstantní zobrazení. Potom zřejmě pro každé $x \in M$ je tečné zobrazení $f_*(x) = 0$, tudíž i kotečné zobrazení $f^*(x)$ a indukované zobrazení f_k^* pro $k > 0$. Potom důsledek plyne z věty o homotopii. ∎

DEF. Řekneme, že varieta M je *jednoduše souvislá*, pokud identita $Id: M \to M$ je homotopická s konstantním zobrazením.

Př. Nechť oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je *hvězdovitá*, tzn. existuje $x_0 \in \Omega$ takový, že pro každý $x \in \Omega$ leží úsečka mezi x_0 a x celá v Ω. Potom Ω je *jednoduše souvislá*. Stačí uvážit

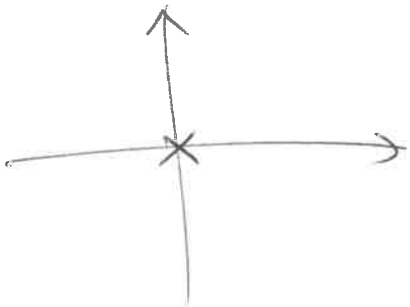


$$h(t,x) := (1-t)x_0 + tx, \quad t \in \langle 0,1 \rangle \text{ a } x \in \Omega.$$

DŮSLEDEK 2: Je-li M jednoduše souvislá varieta, potom $H^k(M) = 0$ pro všechna $k > 0$.

POINCARÉHO LEMMA

Při: Oblast $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ není jednoduše souvislá, protože $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \neq 0$.



Pozn: I pro variety se definují homologie $H_k(M)$ pomocí komplexu

$$C_0(M) \xleftarrow{\partial} C_1(M) \xleftarrow{\partial} \dots \xleftarrow{\partial} C_n(M),$$

kde $C_k(M)$ je prostor všech k-řetězců v M a ∂ je operátor hranice. Opět $H^k_{DR}(M) \simeq (H_k(M))^*$.
duální