Lieovy grupy

DEF. Lieova grupa G je grupa a zároveň hladká varieta taková, že grupové operace

* násobení: $G \times G \longrightarrow G$
$(a, b) \longrightarrow a \cdot b$

* inverze: $G \longrightarrow G$
$a \longrightarrow a^{-1}$

jsou hladké. Pozn: Na $T_e G$ máme tzv. Lieovu algebru G.

Př. (i) $GL(n) := \{A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$
obecná lineární grupa, násobení matic

(ii) $SL(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A = 1\}$
speciální lineární grupa

(iii) $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^t A = E\}$
ortogonální grupa ← transponovaná A, jednotková matice

(iv) $SO(n) := \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$
$\det A = \pm 1$ $\quad > 0$
speciální ortogonální grupa

Většinou tyto maticové grupy chápeme jako podprostory $\mathbb{R}^{n \times n} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ s Euklidovskou topologií

Maticové operace

① **Násobení**: $A \cdot B = C$ s prvky

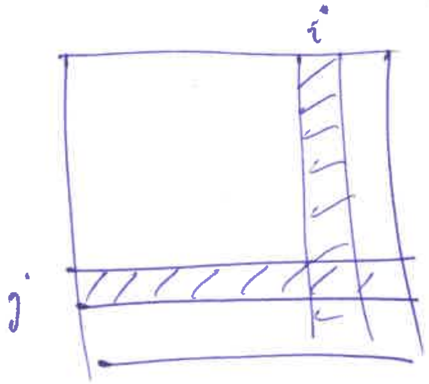
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

② **Inverze**: Z Cramerova pravidla víme

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A),$$

kde $B := \operatorname{adj}(A)$ je adjungovaná matice k A, tzn. matice s prvky $b_{ij} = (-1)^{i+j} \underbrace{\det(A(j|i))}_{(j|i)\text{ - minor } A}$.

zde $A(j|i)$ je matice A bez j-tého řádku a i-tého sloupce.



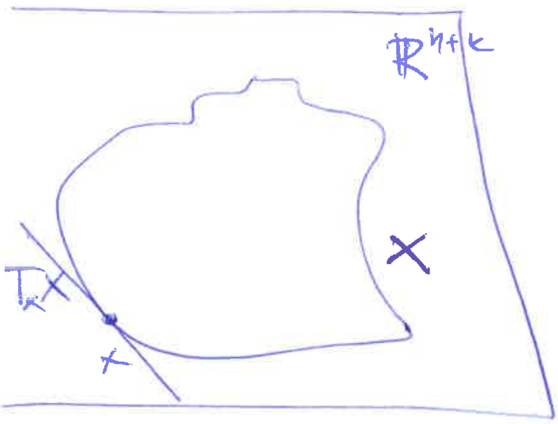
Př. $\boxed{GL(n)}$ je hlad. varieta dim n^2, protože $GL(n)$ je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^{n\times n}$. Skutečně, $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ je spojitá, dokonce hladká. Máme totiž

$$\det A := \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}.$$

- Navíc $T_E GL(n) \simeq \boxed{\mathbb{R}^{n\times n} =: gl(n)}$ s komutátorem je Lieova algebra.
  A
- Grupové operace jsou hladké, viz ①, ② na str. $\boxed{\text{LIE } 1,1}$.

<u>Připomenutí</u>: Hladké plochy zadané implicitně

Nechť $\phi : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ je hladká, $X := \{x \in \mathbb{R}^{n+k} \mid \Phi(x) = 0\}$ a hodnost $D\phi$ na X je všude k. Potom X je hladká plocha v $\mathbb{R}^{n+k}$ dim n a $\forall x \in X$:



$$T_x X = \operatorname{Ker} D\phi(x),$$

kde $D\phi(x) : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ je lineární.
$\overset{\shortparallel}{\Phi_*(x)}$

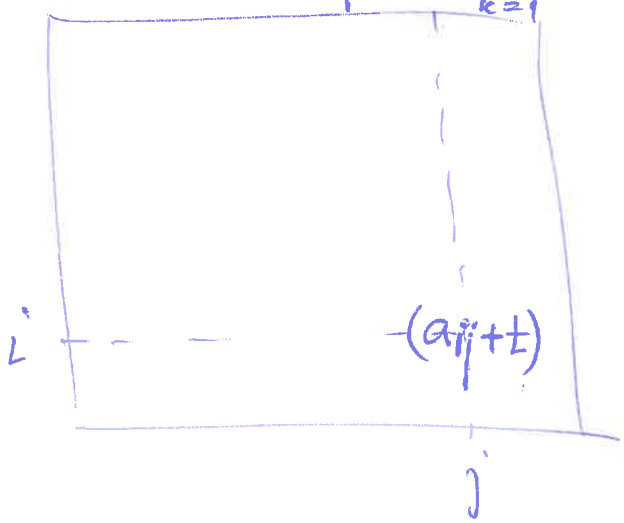
Př. $G := \boxed{SL(n)}$ je hladká plocha v $\mathbb{R}^{n^2}$ dim (n^2-1), protože $\phi := \det - 1 : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ je hladká funkce a $\nabla\phi \neq 0$ na G.

Skutečně, nechť $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in G$. Potom

$$\frac{\partial\phi}{\partial a_{ij}}(A) = \frac{d}{dt}\left(\det(A + tE_{ij})\right)\Big|_{t=0} \overset{?}{=} \det(\underbrace{A(i,j)}_{(i,j)-\text{minor } A}) \cdot (-1)^{i+j},$$

kde E_{ij} je matice $n\times n$ s 1 na místě ij a 0 jinde a $A(i,j)$ je matice A bez i-tého řádku a j-tého sloupce.

Rovnost ? plyne z rozvoje det dle j-tého sloupce $\det(A + tE_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j}(a_{kj} + \delta_{ki}t) \cdot \det(A(k,j))$.

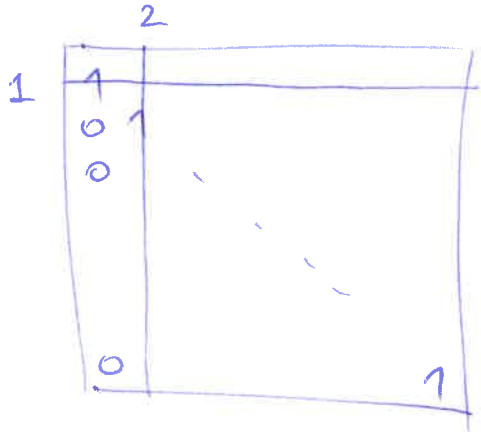


Protože $\det A \neq 0$, ex. i,j taková, že

$$\frac{\partial\phi}{\partial a_{ij}}(A) = (-1)^{i+j}\det(A(i,j)) \neq 0.$$

Máme, že $D\Phi(E)B = \mathrm{tr}\, B$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, **LIE 4**

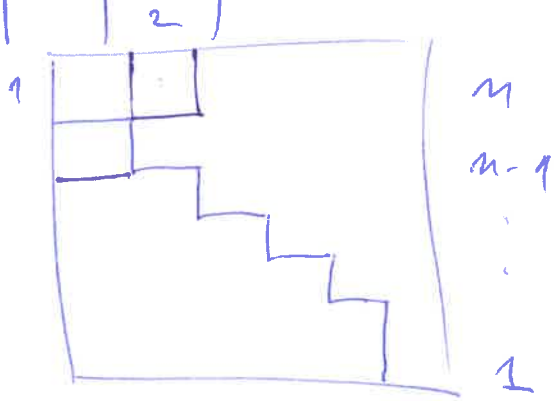
protože $$\frac{\partial \phi}{\partial a_{ij}}(E) = (-1)^{i+j}\det(E(i|j)) = (-1)^{i+j}\delta_{ij} = \delta_{ij}$$ a



$$D\phi(E)B = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} =: \mathrm{tr}\, B,$$ tj. stopa B

Tedy $T_E G = \boxed{\{B\in\mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathrm{tr}\, B = 0\} \overset{def}{=:} sl(n)}$ s komutátorem je Lieova algebra.

Pr. $G := \boxed{O(n)}$ je hladká (plocha v $\mathbb{R}^{n\times n}$) varieta dim $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$. Skutečně, označme $S(n,\mathbb{R})$ množinu všech symetrických matic v $\mathbb{R}^{n\times n}$, tj. $S(n,\mathbb{R}) := \{A\in\mathbb{R}^{n\times n} \mid A^t = A\}$ ($a_{ji} = a_{ij}$). Potom $S(n,\mathbb{R})$ je podprostor $\mathbb{R}^{n\times n}$ dimenze $k := \frac{n(n+1)}{2}$



$k = n + (n-1) + \cdots + 1$

Zobrazení je $\phi : \mathbb{R}^{n\times n} \to S(n,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^k$,
definované jako $\phi(A) := A^t A - E$,
hledáme a $\forall B \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$D\phi(A)(B) = \frac{d}{dt}\left(\left((A+tB)^t(A+tB) - E\right)\right)\Big|_{t=0}$$

$$= B^t A + A^t B.$$

[LÉPE: s místo t ?]

Nechť $A \in O(n)$. Potom $D\phi(A) : \mathbb{R}^{n\times n} \to S(n,\mathbb{R})$
je na, protože $\forall C \in S(n,\mathbb{R})$:

$$D\phi(A)\left(\tfrac{1}{2}AC\right) = \tfrac{1}{2}\underbrace{C^t}_{=C}\underbrace{A^tA}_{=E} + \underbrace{A^tA}_{=E}C\cdot\tfrac{1}{2} = C.$$

Protože $D\phi(E)(B) = B^t + B$, máme

$$T_E G = \boxed{\{B \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid B^t = -B\} =: o(n)}$$

antisymetrické matice

s komutátorem je Lieova algebra.

Př. $G := \boxed{SO(n)}$ je otevřená podmnožina $O(n)$, proto je G stejně jako $O(n)$ hladká, navíc dim. $n(n-1)/2$ a $T_E G = o(n)$.
Skutečně, $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \underbrace{\det A > 0}_{\det A = \pm 1}\}$.

Cv. $O(n)$ a $SO(n)$ jsou kompaktní.