Grassmannovy variety

Nechť V je vektorový prostor dimenze n. Potom na

$$G_k(V) := \{L \mid L \text{ je } k\text{-dimenz. podprostor } V\}$$

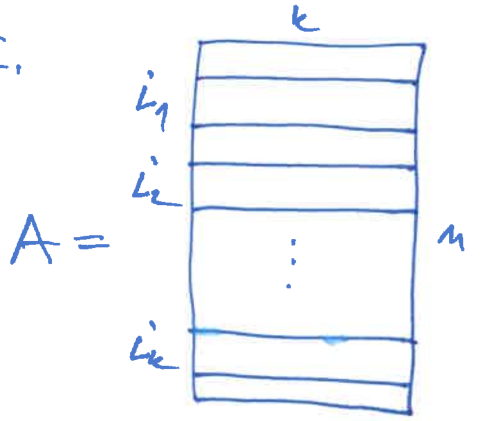
existuje přirozená struktura hladké variety dimenze $(n-k)\cdot k$, je-li $k=0,1,\dots,n$. Speciálně, $\mathbb{R}P_n := G_1(\mathbb{R}^{n+1})$ je reálný projektivní prostor dimenze n.

NÁVOD: $\boxed{\text{BÚNO}}$ Nechť $V=\mathbb{R}^n$ (jinak zvolíme bázi V).

(i) Množina $U := \{\overset{\text{matice}}{A\in\mathbb{R}^{n\times k}} \mid \overset{\text{hodnost}}{\operatorname{rank} A = k}\}$ je otevřená v $\mathbb{R}^{n\times k}$, protože $U=\{A\in\mathbb{R}^{n\times k}\mid \phi(A)\neq 0\}$, kde $\phi:\mathbb{R}^{n\times k}\to\mathbb{R}$, $\phi(A):=\det(A^TA)$ je spojitá, dokonce hladká. Skutečně, máme

$$\det(A^TA) = \underbrace{\sum_I (\det A_I)^2}_{\text{Cauchy–Binet}},$$

kde $I\subset\{1,\dots,n\}$, $|I|=k$ a A_I je podmatice A typu $k\times k$ složená z řádků A indexovaných I.



$I=\{i_1,\dots,i_k\}$

Zřejmě $U = \bigcup\limits_{|I|=k} U_I$, kde $U_I := \{A \in U \mid \det A_I \neq 0\}$

(ii) Pro $A \in U$ označme $\langle A \rangle$ k-dimenz. podprostor $\mathbb{R}^n$ generovaný sloupci A_j, tj. tvoří bázi $\langle A \rangle$. Zřejmě $\langle A \rangle = \langle A' \rangle$, právě když ex. regulární $k\times k$-matice B taková, že $A' = B \cdot A$ ← (Všude opačné pořadí!)

Potom $G_k(\mathbb{R}^n) \simeq U/_\sim$, kde $A \sim A' \iff \langle A \rangle = \langle A' \rangle$.

(iii) Mapy: Nechť $|I| = k$. Položme $\langle U_I \rangle := \{\langle A \rangle \mid A \in U_I\}$. Nechť $L \in \langle U_I \rangle$ a $L = \langle A \rangle$ pro nějakou "bázi" $A \in U_I$. Potom zřejmě $\langle A \rangle = \langle A_I^{-1} A \rangle$, kde $(A_I^{-1}A)_I = E$ je jednotková matice a $(A_I^{-1}A)_{I^c}$ je matice $(n-k)\times k$ nezávislá na volbě "báze" A podprostoru L. Zde $I^c := \{1, \dots, n\} \setminus I$.

$$A_I^{-1}A = \begin{array}{c|cccccc|}
 & & & k & & & \\
\hline
 & & & & & & \\
i_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\
 & & & & & & \\
i_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\
 & & & \vdots & & & \\
i_k & 0 & \cdots & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & \\
\hline
\end{array} \; n \qquad I = \{i_1, \dots, i_k\}$$

Spec. je-li $I = \{1, \dots, k\}$, pak

$$A_I^{-1}A = \begin{array}{|c|l}
\multicolumn{1}{c}{k} & \\
\hline
E & k \\
\hline
 & n-k \\
\hline
\end{array}$$

Gra2

Položme $\varphi_I(L) := (A_I^{-1}A)_{I^c}$.

Potom $\varphi_I : \langle U_I \rangle \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}^{(n-k)\times k}$ a $(\langle U_I \rangle, \varphi_I)$ je mapa na $G_k(\mathbb{R}^n)$.

(iv) <u>Přechodová zobrazení</u> $\varphi_I \circ \varphi_J^{-1}$ jsou difeomorfismy na $\mathbb{R}^{(n-k)\times k}$?

Např. uvažme speciální případ $\boxed{n=3,\ k=2}$.

Potom $\varphi_{12}(L) = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^{1\times 2} = \mathbb{R}^2$, kde sloupce $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ tvoří bázi L.

Podobně $\varphi_{23}(L) = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$, kde sloupce $B := \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tvoří bázi L.

Potom $\varphi_{23} \circ \varphi_{12}^{-1}(c_1, c_2) = \left(-\frac{c_2}{c_1}, \frac{1}{c_1}\right)$, $c_1 \neq 0$, protože

$$A_{23}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{c_2}{c_1} & \frac{1}{c_1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad AA_{23}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{c_2}{c_1} & \frac{1}{c_1} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hom°

Výpočet de Rhamovy kohomologie

Nechť X je hlad. varieta. Potom

$$H^k(X) := \underbrace{\{\alpha \in \mathcal{E}^k(X) \mid d\alpha = 0\}}_{\substack{\text{uzavřené} \\ \parallel \\ \mathcal{E}^k_{cl}(X)}} \Big/ \underbrace{\{\alpha \in \mathcal{E}^k(X) \mid \exists \beta \in \mathcal{E}^{k-1}(X)\ \alpha = d\beta\}}_{\substack{\text{exaktní} \\ \parallel \\ \mathcal{E}^k_{ex}(X)}}.$$

- S. Donaldson: Riemann surfaces, ... [Don]
  SEE [§ 7.2, pp. 67–70]
- D. Barden, C. Thomas: An Introduction to Differential Manifolds, ...
  [BT]

  [Chapter 6]

Př 7) Nechť $X = \mathbb{R}^2$. Potom $H^0(X) = \mathbb{R}$, $\overset{(i)}{H^1(X) = 0}$, $\overset{(ii)}{H^2(X) = 0}$. $\boxed{H^1_{dom}}$

(i)* $\omega = p\,dx + q\,dy$ je <u>uzavřená</u> $\iff q_x = p_y$, kde $q_x := \frac{\partial q}{\partial x}$

Skutečně, $d\omega = p_y\, dy\wedge dx + q_x\, dx\wedge dy =$

$$= (q_x - p_y)\, dx\wedge dy \quad (**)$$

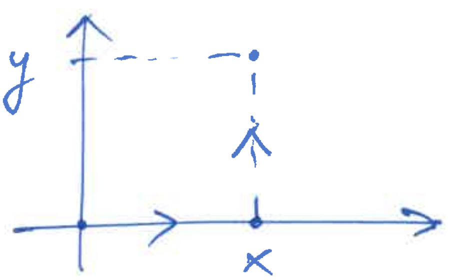
* ω je <u>exaktní</u>, tj. ex. $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ taková, že

$\omega = df \iff p = f_x,\ q = f_y$

$\boxed{\text{Fakt}}$ ω je uzavřená $\iff$ ω je exaktní

<u>Důkaz</u>: $\boxed{\Leftarrow}$ viz; $\boxed{\Rightarrow}$ Nechť ω je uzavřená, tzn. $q_x = p_y$. Položme

$$f(x,y) := \int_0^x p(t,0)\,dt + \int_0^y q(x,s)\,ds.$$



Potom $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ a $f_y = q$.

Dále $f_x(x,y) = p(x,0) + \int_0^y \underset{\substack{\| \\ p_y}}{q_x}(x,s)\,ds$

$$= \cancel{p(x,0)} + \underline{p(x,y)} - \cancel{p(x,0)}.$$

(ii) ~~If~~ Je-li $g \in \mathcal{C}^\infty(X)$, potom $g = q_x - p_y$ např. pro $p \equiv 0$ a

$$q(x,y) := \int_0^x g(s,y)\,ds.$$

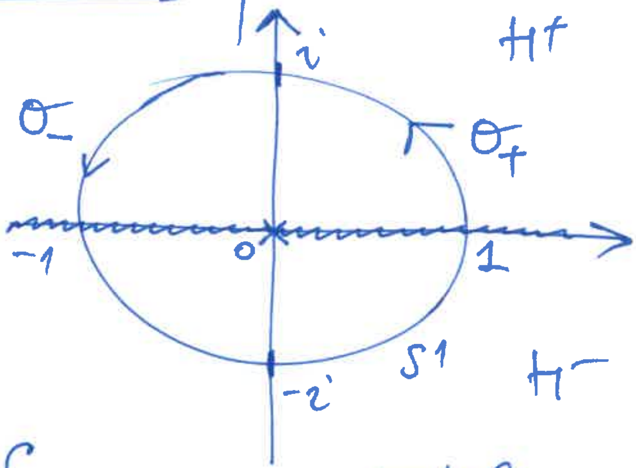
Potom $H^2(X) = 0$ z $(**)$.

Hom 1/2

Př. Nechť $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, $z = x + iy = (x,y)$

(i) Víme, že $\omega := \frac{x}{x^2+y^2}\,dy - \frac{y}{x^2+y^2}\,dx \in \mathcal{E}^1(X)$
je uzavřená, ale <u>není</u> <u>exaktní</u>, protože

$$\int_{S^1} \omega = 2\pi$$



(ii) Nechť $\alpha \in \mathcal{E}^1(X)$ <u>je uzavřená</u>. Potom $\int_{S^1} \alpha = 0$, právě když
α je <u>exaktní</u>, tzn. $\alpha = df$ pro nějakou $f \in \mathcal{E}^\infty(X)$.

<u>Důkaz</u>: $\boxed{\Leftarrow}$ Máme, že $\int_{S^1} \alpha = \int_{S^1} df \underset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S^1} f = 0$. $\partial S^1 = \emptyset$

$\boxed{\Rightarrow}$ Položme $U := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a $V := \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$.
Potom $X = U \cup V$ a $U \cong \mathbb{R}^2 \cong V$, protože např.
$(x,y) = \phi(r,\theta) := (r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta)$ je difeomorfismus $(0,+\infty) \times (-\pi,\pi) \cong \mathbb{R}^2$ na U.

Protože $H^1(\mathbb{R}^2) = 0$, potom ex. $f_U \in \mathcal{E}^\infty(U)$, $f_V \in \mathcal{E}^\infty(V)$
takové, že $\alpha = df_U$ na U a $\alpha = df_V$ na V.
Tady $d(f_U - f_V) = 0$ na $U \cap V = H^+ \cup H^-$, kde
$H^\pm := \{z \in \mathbb{C} \mid \pm \operatorname{Im} z > 0\}$ jsou horní/dolní poloroviny.

Hom 1,3

Proto ex. $c^\pm \in \mathbb{R}$ takové, že $f_u - f_v = c^\pm$ na $H^\pm$. Platí ale, že $c^+ = c^-$, protože

$$0 = \int_{S^1} \alpha = \int_{\substack{\sigma_+ \\ \cap \\ U}} \alpha + \int_{\substack{\sigma_- \\ \cap \\ V}} \alpha = \int_{\sigma_+} df_u + \int_{\sigma_-} df_v \overset{\text{Stokes}}{=}$$

$$= f_u(i) - f_u(-i) + f_v(-i) - f_v(i) = c^+ - c^-.$$

Stačí položit $f := f_u$ na U,
$\qquad := f_v + c^+$ na V.

Potom $f \in \mathcal{E}^\infty(X)$ a $\alpha = df$ na X. ▨

(iii) $H^1(X) = \{ c[\omega] \mid c \in \mathbb{R} \} \simeq \mathbb{R}$, kde $[\omega] := \{ \omega + df \mid f \in \mathcal{E}^\infty(X) \}$.

Navíc $I([\alpha]) := \int_{S^1} \alpha$, $\alpha \in \mathcal{E}^1_{cl}$ je příslušný izomorfismus.

———— x ————

Skutečně, nechť $\alpha \in \mathcal{E}^1(X)$ je uzavřená a $c := \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \alpha$. Potom $\int_{S^1} (\alpha - c\omega) = 0$, tudíž $\alpha - c\omega$ je exaktní na X.

Pozn: Nechť $X := S^1 \times \mathbb{R}$ je válcová plocha. Zřejmě $X \simeq S^1 \times (0,1) \simeq \mathbb{C} \setminus \{0\} \simeq \mathbb{C}/\sim$, kde $(x,y) \sim (x, y+2\pi)$. Např. $\phi([z]) := \exp z$, $z \in \mathbb{C}$ je difeomorfismus $\mathbb{C}/\sim$ na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Proto $H^1(X) \simeq \mathbb{R}$.

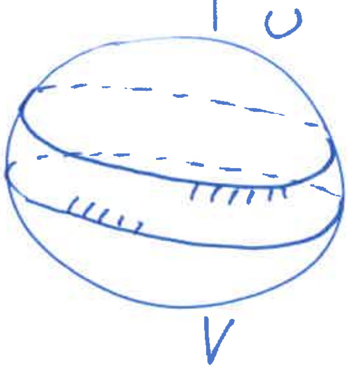
Hom^{1,7}

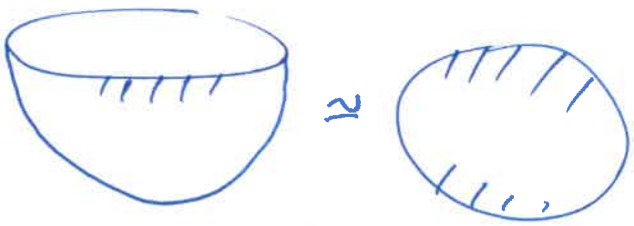
$\boxed{\text{OTÁZKA}}$ Jak vypadá $H^1(\mathbb{C} \setminus K)$, kde $K \subset \mathbb{C}$ je konečná?

Př.) Nechť $X = S^2$. Potom $H^0(X) = \mathbb{R}$, $H^1(X) \overset{(i)}{=} 0$, Hom

$$H^2(X) \overset{(ii)}{=} \mathbb{R}.$$

(i) Nechť $S^2 = U \cup V$, kde U a V jsou prodloužené otevřené horní a dolní polosféra, které se protínají v otevřeném pásu kolem rovníku.*) Potom $U \simeq \mathbb{R}^2$ a $V \simeq \mathbb{R}^2$, protože difeom.




$\simeq \mathbb{R}^2$.

Nechť $\alpha \in \mathcal{E}^1(S^2)$ a $d\alpha = 0$. Podle předchozího příkladu je $H^1(\mathbb{R}^2) = 0$, tzn. ex. f_U, f_V hladké funkce na U, V takové, že $\alpha = df_U$ na U a $\alpha = df_V$ na V. Potom $d(f_U - f_V) = 0$ na otevřeném souvislém pásu $U \cap V$, tudíž ex. $c \in \mathbb{R}$ tak, že $f_U = f_V + c$ na $U \cap V$. Položme $f := f_U$ na U,

$$:= f_V + c \text{ na } V.$$

Potom $f \in \mathcal{E}^\infty(S^2)$ a $df = \alpha$ na S^2.

*) LÉPE: Vezmu $U := S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ a $V := S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$. Potom $U \simeq \mathbb{R}^2 \simeq V$, viz stereograf. projekce.

(ii) Na S^2 máme přirozenou strukturu orientované Riemannovy variety. Nechť ω je příslušná forma objemu na S^2. Uvažme lineární zobrazení $I: \mathcal{E}^2(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, $I(\alpha) := \int_{S^2} \alpha$. Potom α) $I(\omega) = \text{povrch } S^2 \neq 0$,

β) $\forall \beta \in \mathcal{E}^1(S^2): \ I(d\beta) = \int_{S^2} d\beta \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S^2} \beta = 0$, protože $\partial S^2 = \emptyset$.

[γ] $I(\alpha) = 0 \iff \alpha = d\beta$ pro nějakou $\beta \in \mathcal{E}^1(S^2)$
α uzavřená (vždy!)

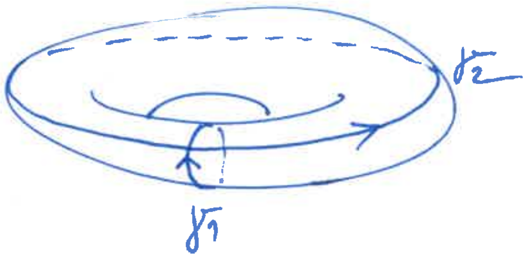
[$\boxed{\Leftarrow}$ viz B]; $\boxed{\Rightarrow}$ těžší (?)

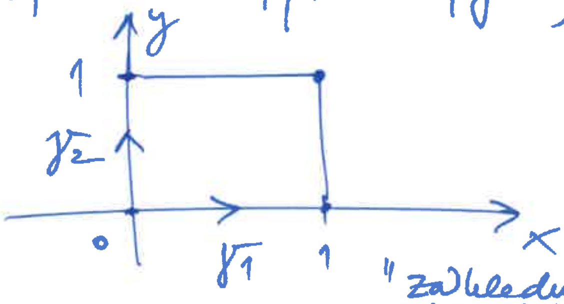
Potom $I : H^2(S^2) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}$, $I([\alpha]) := \int_{S^2} \alpha$, $\alpha \in \mathcal{E}^2(S^2)$ je izomorfismus. Skutečně, I je dobře definováno (z B), je na (z α) a prosté (z γ). Skutečně, to snadno plyne.

Pozn: Platí, že $H^n(X) = \mathbb{R}$, je-li X kompaktní, souvislá a orientov. varieta dim n a $\partial X = \emptyset$.

———×———

(Př) Víme, že torus $T^2 \simeq S^1 \times S^1 \simeq \mathbb{R}^2/\sim$, kde
$(x,y) \sim (x+1,y) \sim (x,y+1)$.





„zalepení krabice"

Nechť $X := \mathbb{R}^2/\sim$. Položme $\gamma_1(t) := [(t,0)]$, $t \in [0,1]$,
$\gamma_2(t) := [(0,t)]$, —||— .

Definujme $\phi(\alpha) := \left(\int_{\gamma_1} \alpha, \int_{\gamma_2} \alpha \right)$, $\alpha \in \mathcal{E}^1_{cl}(X)$.

a) Potom $\phi : \mathcal{E}^1_{cl}(X) \to \mathbb{R}^2$ je na a

b) $\phi(\alpha) = 0$ a α je uzavřená $\iff$ α je exaktní.

Z a), b) plyne, že $\Phi([\alpha]) := \phi(\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{E}^1_{cl}(X)$ uzavřená je izomorfismus $H^1(X)$ na $\mathbb{R}^2$, tzn. $\boxed{H^1(X) \simeq \mathbb{R}^2}$

Víme, že $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ lze ztotožnit s $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, | Tvrz.

která je dvojitě periodická, tzn. $f(x,y) = f(x+1,y) = f(x,y+1)$, $x,y \in \mathbb{R}$. Snadno si rozmyslíme, že $\alpha \in \mathcal{E}^1(X)$ lze ztotožnit s $\alpha = p\,dx + q\,dy$ na $\mathbb{R}^2$ pro nějaké $p,q \in \mathcal{C}^\infty(X)$.

Dále $d\alpha = 0$, právě když $q_x = p_y$ a

$$\alpha = df \text{ pro nějakou } f \in \mathcal{C}^\infty(X) \iff p = f_x,\ q = f_y.$$

Pozor dx, dy jsou uzavřené na X, ale nikoli exaktní.
Skutečně, např. $\int_{\gamma_1} dx = \int_0^1 dt = 1$, $\int_{\gamma_2} dy = 0$.

Platí tedy a), protože $\phi(dx) = (1,0)$ a
$\phi(dy) = (0,1)$.

ad b) $\boxed{\Leftarrow}$ Stokes; elementárně: Nechť $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ a $\alpha = df$. Potom např. $\int_{\gamma_1} \alpha = \int_{\gamma_1} df = f(1,0) - f(0,0)$ $= 0$, protože f je dvojitě periodická.

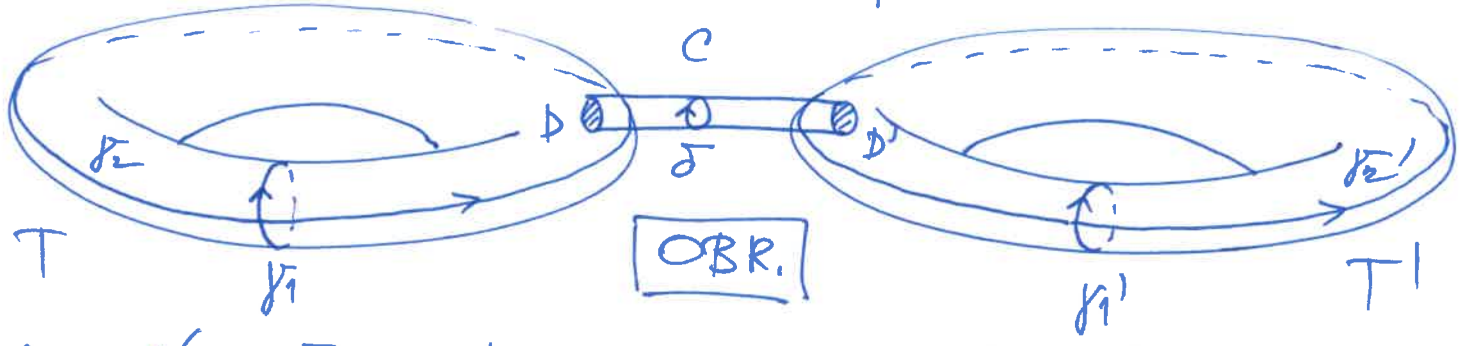
$\boxed{\Rightarrow}$ Nechť α je uzavřená, tzn. $q_x = p_y$. Položme

$$f(x,y) := \int_0^x p(t,0)\,dt + \int_0^y q(x,s)\,ds.$$

Potom $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, $f_y = q$ a $f_x = p$, viz $\boxed{\text{Tvrz } 1}$.
Navíc $f(x+1,y) = \int_0^{x+1} p(t,0)\,dt + \int_0^y q(x+1,s)\,ds = f(x,y)$,
protože $\int_0^1 p(t,0)\,dt = \int_{\gamma_1} \alpha = 0$. Podobně $f(x,y+1) = f(x,y)$. ∎

Torus

Př.: Nechť $X := T^2 \# T^2$ je souvislý součet 2 kopií toru T a T'. Nechť γ_1, γ_2 jsou základní kružnice v T a γ_1', γ_2' v T'.



Souvislý součet vytvoříme tak, že nejprve odstraníme otevřené kruhy D, D' z T, T' a spojíme je válcem C jako na $\boxed{\text{OBR.}}$. Uděláme to tak, aby kruhy D, D' neprotínaly kružnice γ_i, γ_i'.

Položme $\phi(\alpha) := \left(\int_{\gamma_1}\alpha, \int_{\gamma_2}\alpha, \int_{\gamma_1'}\alpha, \int_{\gamma_2'}\alpha\right)$, $\alpha \in \mathcal{E}^1_{cl}(X)$.

1.) Potom $\phi : \mathcal{E}^1_{cl}(X) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}^4$ a

2.) $\phi(\alpha) = 0 \iff \alpha$ je exaktní

Z 1.) a 2.) dostaneme, že $\Phi([\alpha]) := \phi(\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{E}^1_{cl}(X)$ je izomorfismus $H^1(X)$ na $\mathbb{R}^4$, tzn.

$$\boxed{H^1(X) \simeq \mathbb{R}^4}$$

ad 2.) $\boxed{\Leftarrow}$ Stokes; $\boxed{\Rightarrow}$ Nechť $\phi(\alpha) = 0$.

Potom $\int_\delta \alpha = 0$ ze Stokese, kde δ je kružnice na válci C jako na $\boxed{\text{OBR.}}$ Skutečně, δ je okraj např. "levé části" X.

Hom 6

Proto že α na C exaktní, tzn. na C je $\alpha = dg$ pro nějakou $g \in \mathcal{E}^\infty(C)$. Nechť $\varphi \in \mathcal{E}^\infty(X)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset C$ a $\varphi = 1$ na ot. okolí ∂. Potom $\tilde{\alpha} := \alpha - d(\varphi g) \in [\alpha]$ a $\tilde{\alpha} = 0$ na okolí ∂. To znamená, že $\tilde{\alpha}$ definuje 1-formy β, β' na T, T' přirozeným způsobem, které jsou nulové na okolí středů kruhů D, D'. Integrály z β, β' kolem kružnic γ, γ' v T, T' jsou stále nulové, tudíž $\beta = df$, $\beta' = df'$ pro nějaké hladké funkce f, f' na T, T' takové, že jsou konstantní na okolích středů D, D'. BÚNO: Lze předpokládat, že tyto konstanty jsou stejné a definovat pomocí f, f' hladkou funkci F na X taky, že $\alpha = dF$ na X.

ad 1.) Pro danou čtveřici reálných čísel existují uzavřené 1-formy β, β' na T, T', které je realizují jako $\underbrace{\text{integrály}}_{\text{(jejich)}}$ přes kružnice γ, γ'.

Protože $H^1(\mathbb{R}^2) = 0$, na otevř. okolích $\bar{D}, \bar{D}'$ můžeme vyjádřit $\beta = dg$, $\beta' = dg'$ pro nějaké hladké funkce g, g'. Podobně jako v ad 2.) najdeme $\tilde{\beta} \in [\beta]$ a $\tilde{\beta}' \in [\beta']$, které jsou nulové na D, D'. Potom $\tilde{\beta}, \tilde{\beta}'$ definují 1-formu α na X mající dané integrály přes kružnice γ, γ'. ∎

Obecně: Je-li $X \simeq \underbrace{T^2 \# \cdots \# T^2}$ souvislá, [Proč?]
kompaktní, orientovat. 2-rozměrná variety
rodu g, potom $H^0(X) = 0$, $H^1(X) = \mathbb{R}^{2g}$,
děr v X

$$H^2(X) = \mathbb{R}.$$

$X \simeq$