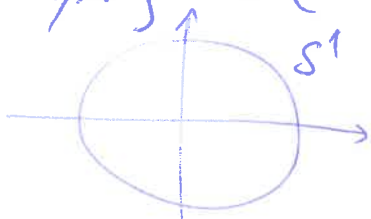
Najdite difeomorfizmy medzi nasledujúcimi difeomorfnými množinami! $\boxed{\text{DIF1}}$

1. Kružnice:

- $S^1 \simeq \mathbb{R}/\sim$, kde $x \sim x+1$, tzn. $x \sim y \iff y-x \in \mathbb{Z}$

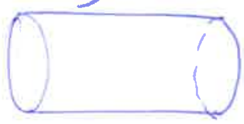


- $S^1 \simeq [0,1]/\sim$, kde $0 \sim 1$

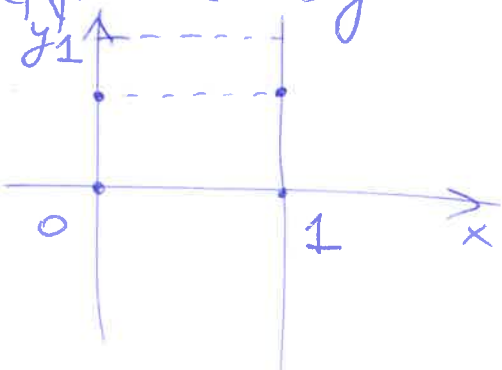
2. Valcová plocha:

Nech $V_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = \overset{r^2}{1},\ z \in \overset{\overset{\mathbb{R}}{(a,b)}}{(0,1)}\}$.

Potom V_2 je 2-plocha v $\mathbb{R}^3$ a



- $V_2 \simeq S^1 \times \underset{(0,1)}{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^2/\sim$, kde $(x,y) \sim (x+1,y)$

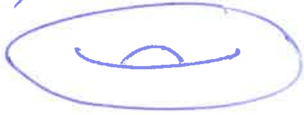


- $V_2 \simeq [0,1] \times (0,1)/\sim$, kde $(0,y) \sim (1,y)$

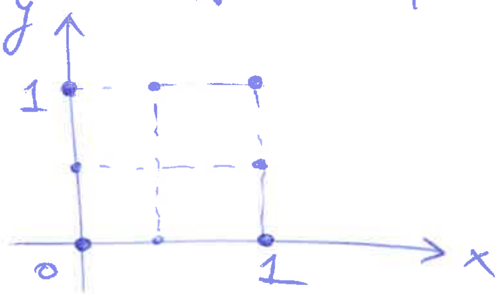
3. Torus:

Nech $0 < r < R$ a

$T_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$. Potom T_2 je 2-plocha v $\mathbb{R}^3$ a



- $T_2 \simeq S^1 \times S^1 \simeq \mathbb{R}^2/\sim$, kde $(x,y) \sim (x+1,y) \sim (x,y+1)$
- $T_2 \simeq [0,1]^2/\sim$, kde $(x,0) \sim (x,1)$ a $(0,y) \sim (1,y)$



<u>Pozn:</u> (i) Ukažte, že $f: \mathbb{R}^2/\sim \;\to Z$ je hladké, právě když ex. jediné hladké $F: \mathbb{R}^2 \to Z$ takové, že F je 1-periodické v obou proměnných (tzn. $F(x,y) = F(x+1,y) = F(x,y+1)$) a $f([(x,y)]) = F(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Podobně pro $\mathbb{R}/\sim$ z (1) a $\mathbb{R}^2/\sim$ z (2).

(ii) Je-li X souvislý (resp. kompakt.) top. prostor, potom i $X/\sim$ je souvislý (resp. kompakt.) protože projekce $\pi: X \xrightarrow{\text{na}} X/\sim$ je spojitá.

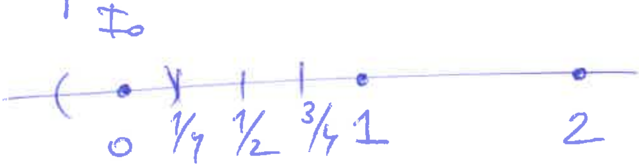
(iii) <u>POZOR</u>: Je-li X (top.) varieta, potom obecně $X/\sim$ nemusí být varieta.

Např. $\mathbb{R}/\sim \;\simeq$ , kde $0 \sim 1$.

<u>není</u> varieta

ad (1) Zobrazení $\phi: \mathbb{R}/\sim \xrightarrow{na} S^1$ definované jako $\phi([t]) := e^{2\pi i t}$, $t \in \mathbb{R}$, je difeomorfismus.

A) $\mathbb{R}/\sim$ je hl. varieta: Nechť $\pi: \mathbb{R} \xrightarrow{na} \mathbb{R}/\sim$ je projekce, tzn. $\pi(t) := [t]$, kde $[t] = t + \mathbb{Z}$.



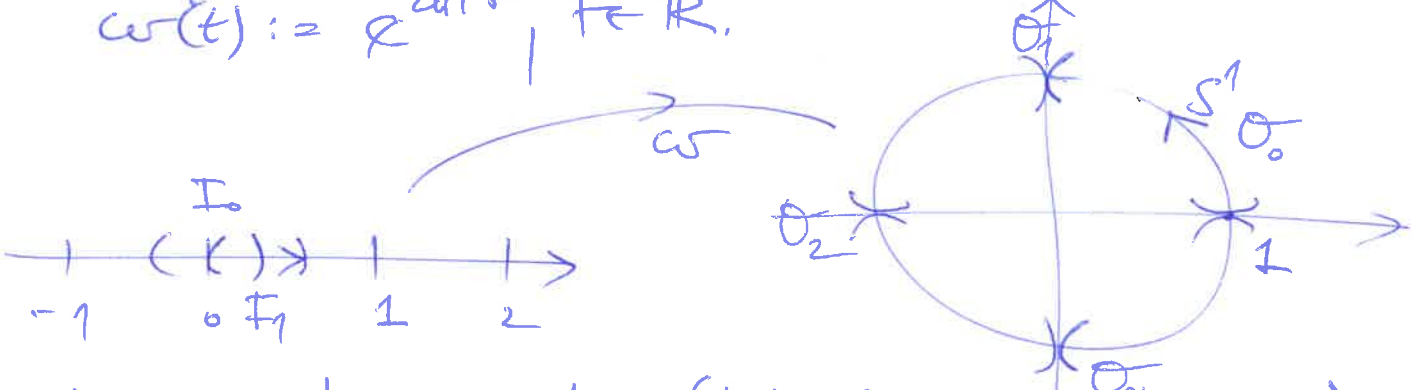
Položme $I_j := (j/4 - 1/4,\ j/4 + 1/4)$, $j = 0,1,2,3$ a

$$U_j := \pi(I_j)$$

$$\varphi_j := (\pi|_{I_j})^{-1} : U_j \xrightarrow{na} I_j.$$

Víme, že $\mathcal{A} := \{(U_j, \varphi_j) \mid j = 0,1,2,3\}$ je hladký atlas na $\mathbb{R}/\sim$.

B) S^1 je 1-plocha v $\mathbb{R}^2$: Uvažme $\omega: \mathbb{R} \xrightarrow{na} S^1$, $\omega(t) := e^{2\pi i t}$, $t \in \mathbb{R}$.

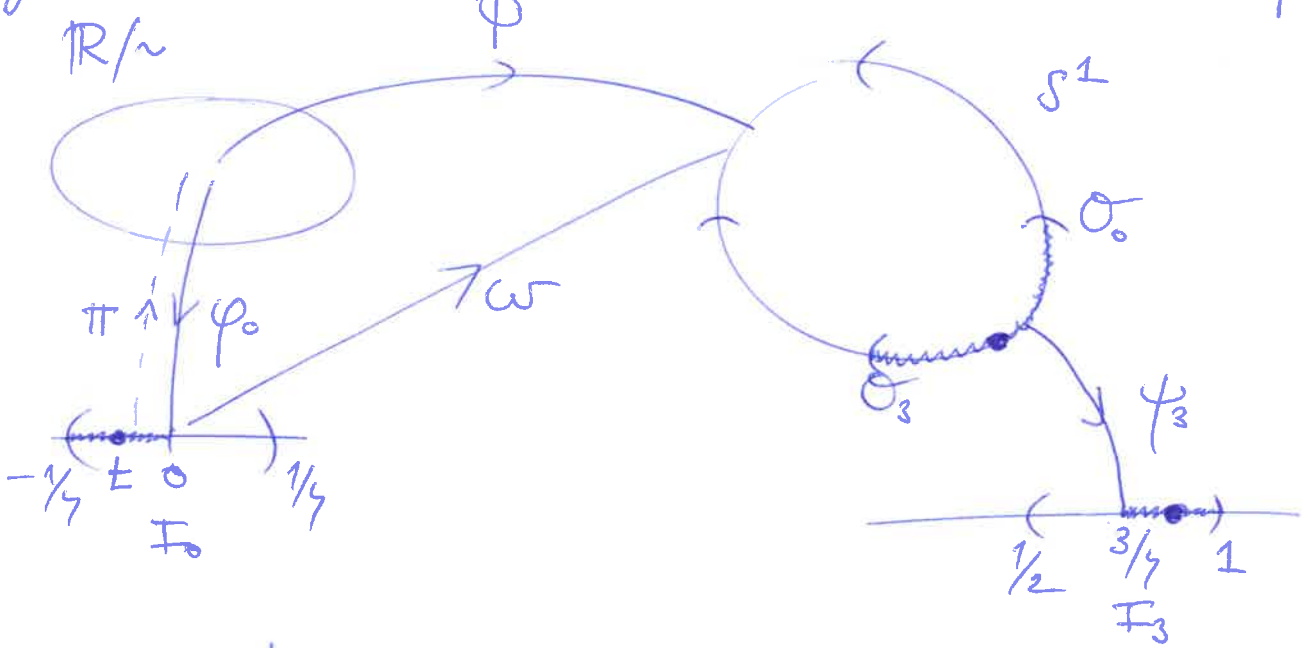


Pro $j = 0,1,2,3$ tvoří $\omega|_{I_j}$ 'lokál. parametrizaci' (tzn. 'atlas') na 1-ploše S^1, tzn.

$\mathcal{B} := \{(O_j, \psi_j) \mid j = 0,\dots,3\}$, kde $\psi_j := (\omega|_{I_j})^{-1}$ a

$O_j := \omega(I_j)$ je ot. oblouk na S^1, je hladký atlas na množinu S^1.

C) ϕ je difeomorfismus: Zřejmě je ϕ bijekce $\mathbb{R}/\sim$ na S^1. Navíc $\phi\circ\pi=\omega$. Zobrazení ϕ je hladké (difeom.). Skutečně, nejprve

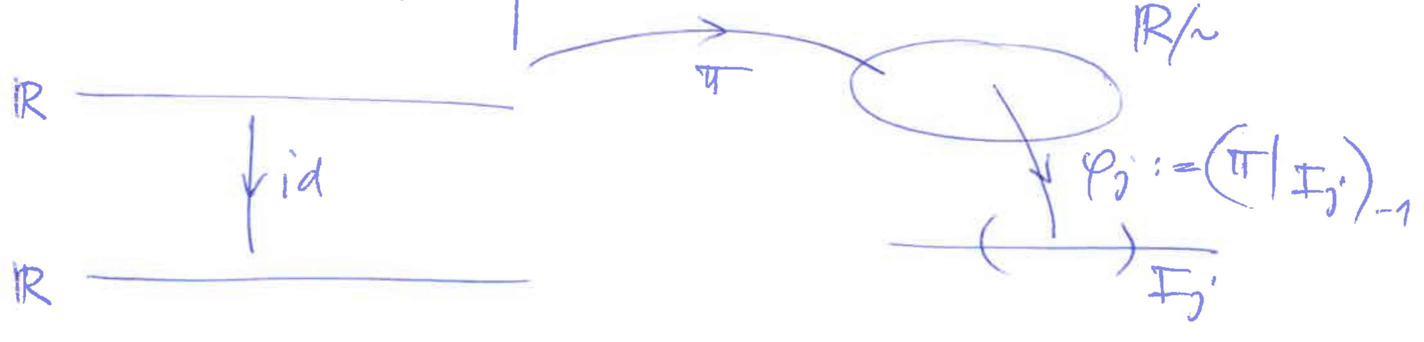


máme $\psi_3\circ\phi\circ\varphi_0^{-1}(t) = \psi_3\circ\omega(t) = t+1$, $t\in(-1/4,0)$, je hladké (difeom.).

Obecně, $\psi_k\circ\phi\circ\varphi_j^{-1} = \psi_k\circ\omega = \underbrace{\psi_k\circ\psi_j^{-1}}_{\text{přechod. funkce}}$ na I_j

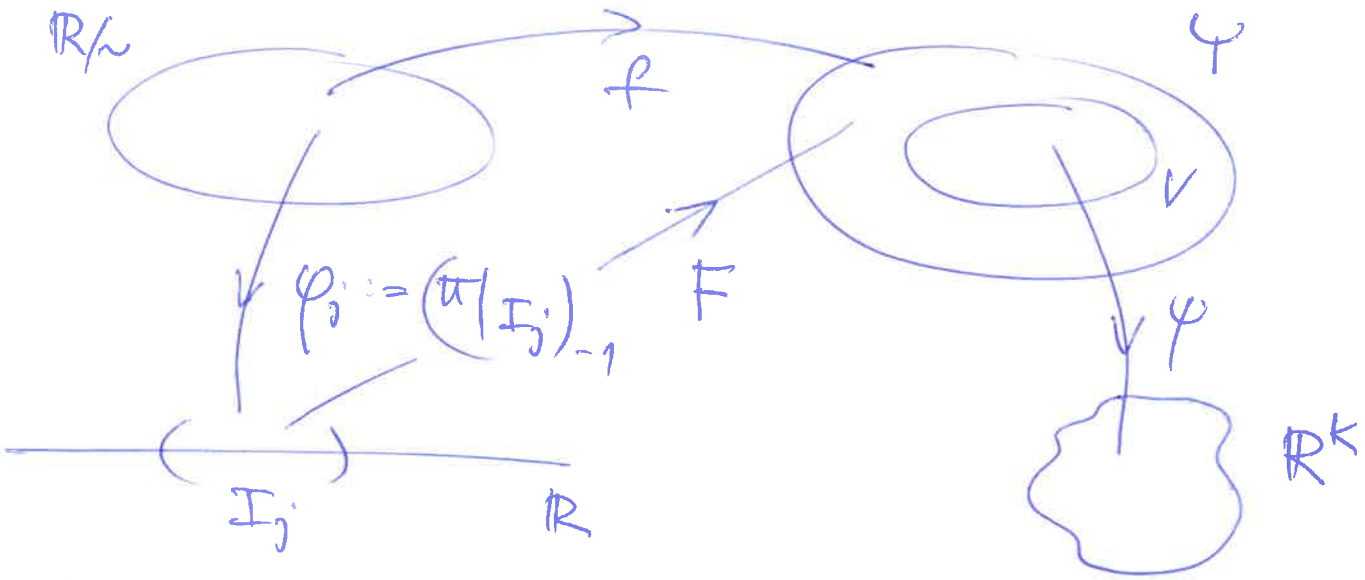
je difeom. na $\psi_j(O_j\cap O_k)$.

D) (1) Nechť $f:\mathbb{R}/\sim\;\to Y$ je hladké. Potom $F:=f\circ\pi:\mathbb{R}\to Y$ je hladké, 1-periodické, protože $\pi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\sim$ je hladké:



Máme $\varphi_j \circ \pi = \mathrm{id}$ na I_j je dôkaz.

(ii) Nech $F: \mathbb{R} \to Y$ je hladké a $F(x+1) = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Potom zobrazenie $f: \mathbb{R}/\sim \to Y$, $f([x]) = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, je dobre definované a hladké.

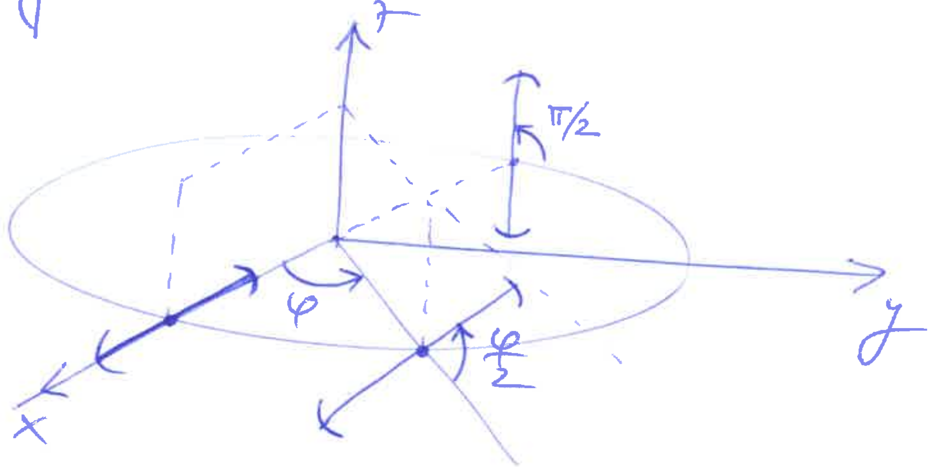


Máme $\psi \circ f \circ \underbrace{\varphi_j^{-1}}_{\text{na } I_j} = \psi \circ F$ na $F_{-1}(V) \cap I_j$ je hladké. $\blacksquare$

4. Möbiův list:

DIF3

Uvažme jednotkovou úsečku v $\mathbb{R}^3$, jejíž střed obíhá stejnoměrně po S^1 v rovině xy. Zároveň se tato úsečka stejnoměrně otáčí kolem svého středu v rovině, která je dána tímto středem a osou z. Při jednom oběhu středu se úsečka otáčí o úhel π. Označme 2-plochu v $\mathbb{R}^3$, kterou tato úsečka vykreslí, jako M_2.

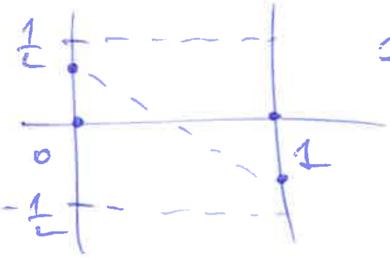


Potom M_2 je (např.) množina všech $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ takových, že

$$x = \cos\varphi\cdot\left(1+t\cdot\cos(\varphi/2)\right),$$
$$y = \sin\varphi\cdot\left(1+t\cdot\cos(\varphi/2)\right),\qquad \varphi\in\mathbb{R}$$
$$z = t\cdot\sin(\varphi/2).\qquad t\in(-1/2,1/2)$$

Potom $M_2 \simeq \mathbb{R}\times(-1/2,1/2)/\sim$, kde $(x+1,-y)\sim(x,y)$;

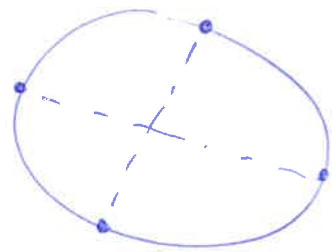
$\simeq [0,1]\times(-1/2,1/2)/\sim$, kde $(0,y)\sim(1,-y)$.



(J.) Reálna projektívna rovina:

Pripomeňme, že $P_2 = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim$, kde $y \sim x \iff \exists t \in \mathbb{R}, t \neq 0 : y = tx$. Potom

- $P_2 \simeq S^2/\sim$, kde $x \sim (-x)$, tzn. stotožňujeme protiľahlé body na S^2
- $P_2 \simeq \mathbb{D}/\sim$, kde $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ a $x \sim (-x)$, $x \in S^1$



NÁVOD: Zobr. $\phi : S^2/\sim \xrightarrow{\text{na}} P_2$ definované ako $\phi([\![x]\!]) := [x]$, $x \in S^2$, $[\![x]\!] := \{\pm x\}$ a $[x] := \{tx \mid t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$, je diffeomorfizmus.