III. Analýza na varietách

A. Tenzory

B. Topologické prostory

C. Variety

x

A. Multilineární algebra – tenzory

Úmluva: Všechny vektorové prostory jsou reálné a konečně dim., pokud nebude řečeno něco jiného.

$\boxed{\text{Problém}}$ Jak se dají násobit vektory?

Nechť V, W jsou vektor. prostory.

1. Nechť $\alpha \in V^*$ a $\beta \in W^*$, kde V^* je duál k V, tzn. $V^* := \{ f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ lineární forma} \}$.

kovektor

Potom definujeme

$(\alpha \otimes \beta)(v, w) := \alpha(v) \cdot \beta(w)$, $v \in V$ a $w \in W$.

Zřejmě je $\alpha \otimes \beta : V \times W \to \mathbb{R}$ bilineární.

Označme $V^* \otimes W^*$ jako vektor. prostor všech bilineárních zobrazení $\phi : V \times W \to \mathbb{R}$.

Označení: Nechť $V_1, \dots, V_k$ jsou vektor. prostory. Potom označme $\mathcal{L}_k(V_1, \dots, V_k)$ jako vektor. prostor všech k-lineárních zobrazení $\phi : V_1 \times \dots \times V_k \to \mathbb{R}$, tzn. $\phi(v_1, \dots, v_{i-1}, \cdot, v_{i+1}, \dots, v_k) \in V_i^*$, kdykoli $i = 1, \dots, k$ a $v_j \in V_j$ pro $j \neq i$.

$$\boxed{V \simeq (V^*)^* =: V^{**}}$$

Kanonické vnoření $\varkappa : V \to V^{**}$ definované

$$\varkappa(v)(f) := f(v), \quad v \in V \text{ a } f \in V^*$$

je izomorfismus V na V^{**}.

[Zřejmě je $\varkappa$ lineární, prosté a na, protože $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$]

(2.) Nechť $v \in V$ a $w \in W$. Položme

$$v \otimes w := \varkappa(v) \otimes \varkappa(w),$$

neboli

$$(v \otimes w)(f, g) := f(v) \cdot g(w), \quad f \in V^* \text{ a } g \in W^*.$$

Označme $V \otimes W := \mathcal{L}_2(V^*, W^*)$.

Cv. Dokaž $\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$.

Najdi bázi $V \otimes W$, pokud znáte báze V a W.

$e_i \otimes f_j$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ $\qquad$ e_i, $i = 1, \dots, n$ $\qquad$ f_j, $j = 1, \dots, m$

DEF. Nechť V je vektor. prostor.

(i) Jeho <u>k-tou tenzorovou mocninou</u> V^k definujeme jako
$$V^k := \mathcal{L}_k(V^*,\dots,V^*),$$
kde položíme $V^0 := \mathbb{R}$ a ztotožňujeme $V^1 = V^{**}$ s V.

(ii) Jeho <u>tenzorovou algebru</u> definujeme jako
$$T(V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^k.$$

Násobení $\otimes$ na $T(V)$ definujeme následovně:

(a) Je-li $\alpha \in V^k$ a $\beta \in V^m$, potom
$$(\alpha\otimes\beta)(f^1,\dots,f^k,f^{k+1},\dots,f^{k+m}) := \alpha(f^1,\dots,f^k)\cdot\beta(f^{k+1},\dots,f^{k+m}),$$
$f^j \in V^*$ a $j = 1,\dots,m+k$.

[Zřejmě $\alpha\otimes\beta \in V^{k+m}$.]

(b) násobení $\otimes$ rozšíříme na $T(V)$ bilineárně, tzn. je-li $\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ s $\alpha_k \in V^k$ a $\beta = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m$ s $\beta_m \in V^m$, potom
$$\alpha\otimes\beta := \sum_{k,m=0}^{\infty} \alpha_k \otimes \beta_m.$$

Pozn: Řady v (b) mají jen <u>konečně mnoho</u> nenulových členů.

Nechť V_α, $\alpha \in I$ (i nekonečné) jsou vektor. prostory. Potom se definuje

$$\bigoplus_{\alpha\in I} V_\alpha := \{(v_\alpha)_{\alpha\in I} \mid v_\alpha \in V_\alpha,\ v_\alpha \neq 0 \text{ pro konečně mnoho } \alpha \in I\}$$

jako vektor. prostor s vektor. operacemi po složkách.

Vlastnosti $T(V)$

(1.) $T(V)$ je ∞-dimen., nekomutat., asociat. algebra s jednotkou $1 \in V^0 = \mathbb{R}$ [zřejmé].

(2.) Nechť V má bázi $e_1, \dots, e_n$. Potom V^k má bázi

$$e_A := e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_k},$$

kde $A = (a_1, \dots, a_k) \in \{1, 2, \dots, n\}^k$.

Speciálně, $\dim V^k = (\dim V)^k = n^k$.

DŮKAZ: (2.) Nechť $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ je duální báze V^*, tzn. $\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j = 1,\ i=j;$
$= 0,\ i \neq j.$

(i) Nechť $\sum_A \alpha^A e_A = 0$ s $\alpha^A \in \mathbb{R}$. Potom

$$0 = \sum_A \alpha^A e_A(\varepsilon^{b_1}, \dots, \varepsilon^{b_k}) = \alpha^B,$$

je-li $B = (b_1, \dots, b_k)$, protože $e_A(\varepsilon^{b_1}, \dots, \varepsilon^{b_k}) = \varepsilon^{b_1}(e_{a_1}) \cdots \varepsilon^{b_k}(e_{a_k}) = \delta^B_A$.

kde $\delta_A^B = 1$ pro $A = B$,
$= 0$ pro $A \neq B$.

Neboli φ_A, $A \in \{1, \dots, m\}^k$ jsou lineárně nezávislé.

(ii) Nechť $\alpha \in V^k$. Pro $j = 1, \dots, k$ nechť

$$f^j = \sum_{a=1}^{m} \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{f_a^j}} \, \varepsilon^a \in V^*.$$

Potom
$$\alpha(f^1, \dots, f^k) = \sum_{a_1=1}^{m} \cdots \sum_{a_k=1}^{m} f^1_{a_1} \cdots f^k_{a_k} \underbrace{\alpha(\varepsilon^{a_1}, \dots, \varepsilon^{a_k})}_{\overset{\text{ozn.}}{=} \alpha^{(a_1, \dots, a_k)}}$$

Tedy $\alpha = \sum_A \alpha^A \varphi_A$, protože
$$\varphi_A(f^1, \dots, f^k) = f^1(\varphi_{a_1}) \cdots f^k(\varphi_{a_k}) = f^1_{a_1} \cdots f^k_{a_k}. \quad \blacksquare$$

Tenzory typu $\binom{s}{r}$

Nechť $\alpha \in V^s$ a $\beta \in (V^*)^r$. Potom definujeme

$$(\alpha \otimes \beta)(f^1, \dots, f^s, v_1, \dots, v_r) := \alpha(f^1, \dots, f^s) \cdot \beta(v_1, \dots, v_r),$$
$f^i \in V^*$ a $v_j \in V$.

Položme $V^s \otimes (V^*)^r := \mathcal{L}_{r+s}(\underbrace{V^*, \dots, V^*}_{s\times}, \underbrace{V, \dots, V}_{r\times})$.

Jiný název: tenzory r-krát kovariantní a
s-krát kontravariantní

Př. typu $\binom{1}{1}$: $V \otimes V^* \simeq \mathrm{End}(V) := \{L : V \to V \mid L \text{ lineární}\}$

Cv. Každý $\alpha \in V^s \otimes (V^*)^r$ lze jednoznačně psát

$$\alpha = \sum \underbrace{\alpha^{a_1,\dots,a_s}_{b_1,\dots,b_r}}_{\text{souřadnice} \,\in\, \mathbb{R}} \underbrace{e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_s} \otimes \varepsilon^{b_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{b_r}}_{\text{báze}},$$

kde sčítáme přes všechny indexy od 1 do n

Einsteinova sumační konvence: V tenzorovém počtu vynecháme symbol $\sum$ pro každý index od 1 do n, který je nahoře i dole

[nebudeme užívat]

Změna souřadnic tenzorů při změně báze

Nechť $e'_1, \dots, e'_n$ je jiná báze V a nechť $E = (E^a_b)$ je matice přechodu od $e_1, \dots, e_n$ k $e'_1, \dots, e'_n$, tzn.

(1) $\quad e'_b = \sum_{a=1}^{n} E^a_b e_a.$

Potom $F := E^{-1}$ je matice přechodu mezi příslušnými duálními bázemi $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ a $\varepsilon'^1, \dots, \varepsilon'^n$ prostoru V^*, tzn.

(2) $\quad \varepsilon'^b = \sum_{a=1}^{n} F^b_a \varepsilon^a$ $\quad$ [Víme z LA. Snadno z (1), (2).]

Nechť $\alpha \in V^s \otimes (V^*)^r$ a $\alpha = \sum_{A,B} \alpha^A_B \, e_A \otimes \varepsilon^B =$

$= \sum_{C,D} \alpha'^C_D \, e'_C \otimes \varepsilon'^D$. Potom máme

$$(3) \quad \alpha'^{a_1,\dots,a_s}_{b_1,\dots,b_r} = \sum \alpha^{c_1,\dots,c_s}_{d_1,\dots,d_r} \left(E^{d_1}_{b_1}\right)\cdots\left(E^{d_r}_{b_r}\right)\cdot\left(F^{a_1}_{c_1}\right)\cdots\left(F^{a_s}_{c_s}\right)$$

kde sčítáme od 1 do n přes $c_1,\dots,c_s, d_1,\dots,d_r$.

DŮKAZ: Dosadíme (1), (2) do

$$\alpha'^{a_1,\dots,a_s}_{b_1,\dots,b_r} = \alpha\left(\varepsilon'^{a_1},\dots,\varepsilon'^{a_s}, e'_{b_1},\dots,e'_{b_r}\right). \quad \blacksquare$$

Původní definice: Tenzor α typu $\binom{s}{r}$ je přiřazení, které každé bázi V, přiřadí sadu čísel $\alpha^{a_1,\dots,a_s}_{b_1,\dots,b_r}$, které se při změně báze transformují jako (3)

[takto rozumí tenzorům často fyzici]