JDS 1

Existence a jednoznačnost diferenc. struktur

Př. Na $\mathbb{R}^n$ standardně uvažujeme Euklidov. topologii a diferenc. strukturu $\tilde{\mathcal{A}}$ generovanou příslušným atlasem $\mathcal{A} := \{(\mathbb{R}^n, id)\}$. Potom

$\tilde{\mathcal{A}} = \{(U, \varphi) \mid \varphi$ je <u>difeom.</u> otevř. $U \subset \mathbb{R}^n$ na ot. $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n\}$ a

$\hat{\mathcal{A}} := \{(U, \varphi) \mid \varphi$ je <u>homeom.</u> —"— $\}$

je <u>maximální</u> C^0-atlas na $\mathbb{R}^n$.

<u>Existence</u>: Ex. topol. variety X, na které neexistuje žádná difer. struktura. (Kervaire, 1960)

<u>Jednoznačnost</u>: Téměř nikdy.

Př. Označme jako X standardní hlad. varietu $\mathbb{R}$ s hlad. atlasem $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, id)\}$ a jako Y hlad. varietu na $\mathbb{R}$ s hlad. atlasem $\mathcal{B} = \{(\mathbb{R}, h)\}$, kde $h(x) = x^3$. Potom

i) X, Y jsou <u>různé</u> hlad. variety, protože mapy $(\mathbb{R}, id)$ a $(\mathbb{R}, h)$ <u>nejsou</u> C^∞-kompatibilní.

Skutečně, přechodové funkce jsou
$h(x) = x^3$ a $h_{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, což není hladké.

(ii) X, Y jsou difeomorfní, protože $g: X \xrightarrow{\text{na}} Y$,
$g(x) = \sqrt[3]{x}$ je difeomorfismus.
Skutečně, v souřadnicích máme
$(h \circ g \circ id_{-1})(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, což je difeom.

Jednoznačnost až na difeomorfismus

Ex. na topol. varietě X dif. struktury, které nejsou difeomorfní?

1. Na $\mathbb{R}^n$ pro $n \neq 4$ nikoli.
Na $\mathbb{R}^4$ ex. nekonečně mnoho tříd diferenc. struktur. Zde difer. strukt. na X jsou ekvivalentní, pokud jsou difeomorfní.
(Exotické $\mathbb{R}^4$, Donaldson)

2. Kolik tříd ekvival. (orient.) difer. struktur je na S^n?

- pro $n = 1, 2, 3, 5, 6$: 1;
- pro $n = 7$: 28; (Milnor, Exotické sféry)
- pro $n = 4$: není známo.

Tenzory typu $\binom{s}{r}$

Nechť V má bázi $e_1, \dots, e_n$ a $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ je <u>duální</u> báze V^*, tzn. $\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j$.

$\binom{1}{0}$: vektory $v \in V$, $v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i$

$\binom{0}{1}$: kovektory $\alpha \in V^*$, $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon^i$

$\binom{0}{2}$: $\phi \in V^* \otimes V^*$, tzn. $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ je bilineární

$$\phi = \sum_{i,j=1}^{n} \phi_{ij}\, \varepsilon^i \otimes \varepsilon^j, \text{ kde } \phi_{ij} = \phi(e_i, e_j)$$

matice bilineár. formy ϕ

* ϕ je symetrické $\iff \phi_{ij} \overset{!}{=} \phi_{ji}$
* ϕ je <u>skalární součin</u> na V, je-li ϕ symetr. a <u>pozitivně definitní</u> (tzn. $\forall\, 0 \neq v \in V$: $\phi(v,v) > 0$).

$\binom{2}{0}$: bilineární formy na V^*

$\binom{1}{1}$: $\phi \in V \otimes V^* \simeq \mathrm{End}(V) := \{L : V \to V \text{ lineární}\}$

s přirozeným izomorfismem

$$L \longmapsto \phi_L : V^* \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi_L(\alpha, v) := \alpha(Lv)$$

Máme $\phi_L = \sum_{i,j=1}^{n} L^j_i\, \varepsilon^i \otimes e_j$, kde $\phi_L(\varepsilon^j, e_i) = \varepsilon^j(Le_i) = L^j_i$ ... prvky <u>matice</u> L.

Skutečně $Lv = \sum_{i=1}^{n} v^i L e_i = \sum_{i,j=1}^{n} L^j_i\, e_j\, \varepsilon^i(v)$.

Symetrické a antisymetr. tenzory

(1) Nechť $\alpha, \beta \in V^*$. Potom

$$\alpha \odot \beta = \alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha,$$
$$\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha,$$
$$\alpha \otimes \beta = \frac{1}{2}\alpha \odot \beta + \frac{1}{2}\alpha \wedge \beta.$$

⌈ Skutečně, máme např. $\forall u, v \in V$

$$(\alpha \odot \beta)(u,v) = (\alpha \otimes \beta)(u,v) + (\alpha \otimes \beta)(v,u) =$$
$$= \alpha(u)\cdot\beta(v) + \underbrace{\alpha(v)\beta(u)}_{(\beta\otimes\alpha)(u,v)}.$$
⌋

(2) Nechť $\alpha^1, \dots, \alpha^k \in V^*$. Potom

$$\alpha^1 \odot \dots \odot \alpha^k = \sum_{\pi \in S_k} \alpha^{\pi(1)} \otimes \dots \otimes \alpha^{\pi(k)} \quad a$$

$$\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k = \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sgn} \pi \; \alpha^{\pi(1)} \otimes \dots \otimes \alpha^{\pi(k)}.$$

⌈ Indukcí podle k. Např.

$$(\alpha^1 \odot \alpha^2) \odot \alpha^3 = \frac{1}{2}\operatorname{Sym}_3\left((\alpha^1 \odot \alpha^2) \otimes \alpha^3\right) \overset{(1)}{=}$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{Sym}_3\left(\alpha^1 \otimes \alpha^2 \otimes \alpha^3 + \alpha^2 \otimes \alpha^1 \otimes \alpha^3\right) =$$
$$= \operatorname{Sym}_3(\alpha^1 \otimes \alpha^2 \otimes \alpha^3) \quad \text{atd.}$$
⌋

Neboli
$$\alpha^1 \odot \dots \odot \alpha^k = \operatorname{Sym}_k(\alpha^1 \otimes \dots \otimes \alpha^k),$$
$$\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k = \operatorname{Alt}_k(\alpha^1 \otimes \dots \otimes \alpha^k).$$

Element objemu

(1) Nechť V má bázi $e_1,\dots,e_n$ a $\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n$ je duální bázi V^*, tzn. $\varepsilon^i(e_j)=\delta^i_j$. Položme

(*) $\omega := \varepsilon^1\wedge\dots\wedge\varepsilon^n$.

Nechť $v_1,\dots,v_n\in V$ a $v_i=\sum_{j=1}^{n} v_i^j e_j$, $i=1,\dots,n$.

Potom $\omega(v_1,\dots,v_n)=\det(v_i^j)$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{array}\right)$$

matice, která má v i-tém sloupci souřadnice v_i

Skutečně, máme

$$\omega(v_1,\dots,v_n)=\sum_{j_1,\dots,j_n} v_1^{j_1}\dots v_n^{j_n}\,\overset{\text{antisym.}}{\omega(e_{j_1},\dots,e_{j_n})}$$

$=$ stačí sčítat přes různé $j_1,\dots,j_n$

$$\underbrace{\sum_{\pi\in S_n} v_1^{\pi(1)}\dots v_n^{\pi(n)}\,(\operatorname{sgn}\pi)}_{\det(v_i^j)}\;\underbrace{\omega(e_1,\dots,e_n)}_{=1 \text{ viz (2) z } \boxed{\text{TEN2}}}$$

(2) Nechť na V máme skalární součin a $e_1,\dots,e_n$ je ON-báze V. Potom ω jako v (*) nazýváme <u>element objemu</u> na V.

VOL2

a) ω nezávisí na volbě ON-báze v následujícím smyslu. Nechť $e_1',\dots,e_n'$ je jiná ON-báze V, která má stejnou/opačnou orientaci. Potom

$$(\times) \qquad \omega = \pm\, \varepsilon'^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon'^n.$$

Skutečně, je-li $e_b' = \sum_{a=1}^{n} E^a_b e_a$ matice přechodu, potom je $E = (E^a_b)$ ortogonální a $\det E = \pm 1$. Podle ① $\omega(e_1',\dots,e_n') = \det E$ a platí $(\times)$.

(ii) Pro Eukleidovský prostor $V = \mathbb{R}^n$ je $|\omega(v_1,\dots,v_n)|$ rovno objemu rovnoběžnostěnu v $\mathbb{R}^n$ se stranami $v_1,\dots,v_n$, jak víme z Geom. 2. Tedy i na obecném prostoru V, protože $V \simeq \mathbb{R}^n$.