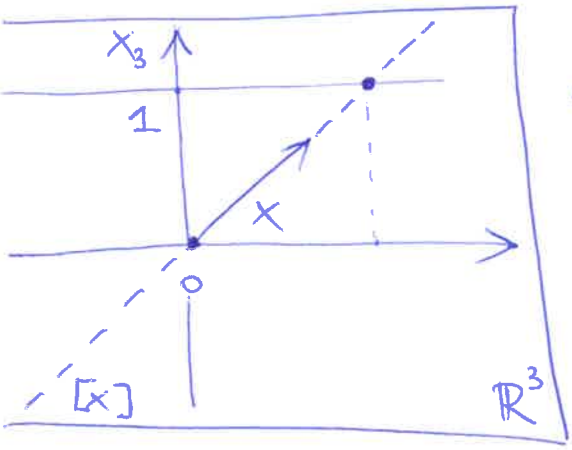
Př. V. Reálná projektivní rovina

Na $\mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$ uvažme ekvivalenci

$$x \sim y \iff \exists\, t \in \mathbb{R},\ t \neq 0 : \ y = tx$$

Ukažte, že $P_2 := \mathbb{R}^3 \setminus \{o\} / \sim$ je hladká varieta dim 2, tzn. P_2 je topol. varieta dim 2 a na P_2 najdete přirozený hladký atlas.

NÁVOD: Máme $P_2 = \{[x] \mid x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{o\}\}$, kde $[x] = \{tx \mid t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$ je 1-dim. podprostor v $\mathbb{R}^3$ (bez počátku) generovaný x.



Mapy: Na $U_3 := \{[x] \mid x \in \mathbb{R}^3, x_3 \neq 0\}$ položme $\varphi_3([x]) := \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$, protože $[x] = [(x_1, x_2, x_3)] = \left[\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1\right)\right]$.

Na $U_2 := \{[x] \mid x \in \mathbb{R}^3, x_2 \neq 0\}$ polož $\varphi_2([x]) := \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}\right)$,
na $U_1 := \{[x] \mid -\|-, x_1 \neq 0\}$ $-\|-$ $\varphi_1([x]) := \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right)$.

Ukaž, že $\mathcal{A} := \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), (U_3, \varphi_3)\}$ je hladký atlas na topol. varietě P_2.