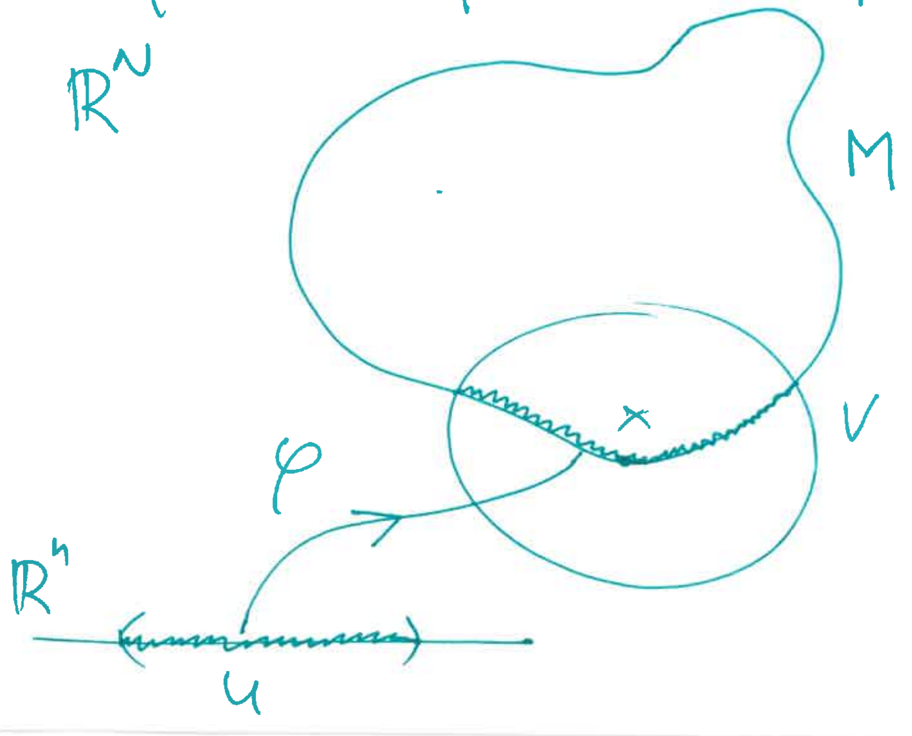
ÚVOD DO ANALÝZY NA VARIETÁCH

UAV1

V **Geometrii 2** jste vybudovali základy analýzy na n-plochách v $\mathbb{R}^N$. Studovali jste např. tečné prostory, diferenciál zobrazení a formy, jejich integrály. V tomto předmětu vše zobecníme na tzv. variety.

Připomenutí n-plocha v $\mathbb{R}^N$ je $M \subset \mathbb{R}^N$ taková, že $\forall x \in M$ $\exists$ ot. $V \subset \mathbb{R}^N$, $x \in V$ $\exists$ ot. $U \subset \mathbb{R}^n$ $\exists\, \varphi : U \to \mathbb{R}^N$:

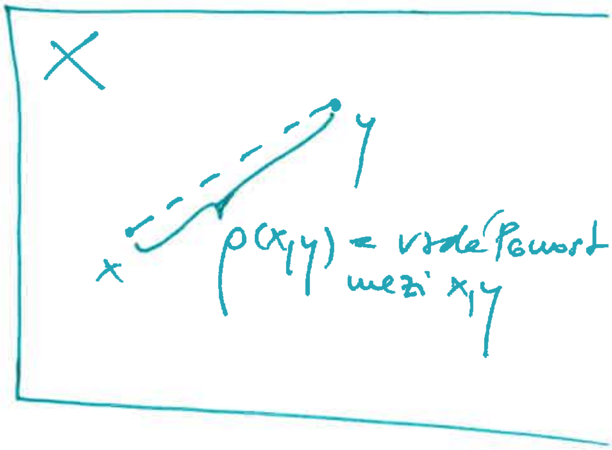
- φ je hladké (tj. tř. C^∞) na U;
- $\operatorname{rank} D\varphi = n$ na U
  hodnost totálního diferenciálu
- $\varphi : U \xrightarrow{\text{na}} \varphi(U) = M \cap V$ je homeomorf.



Varieta M dimenze n je takový prostor, který jako n-plocha vypadá lokálně jako $\mathbb{R}^n$, ale narozdíl od n-plochy není apriori vnořen do žádného vnějšího Euklid. prostoru $\mathbb{R}^N$. Protože $\cancel{M \subset \mathbb{R}^N}$, na M musíme mít nějakou strukturu, a to topologii.

Topologické prostory (stručný úvod)

$\boxed{\text{Motivace}}$ Nechť (X,ρ) je metrický prostor a ρ je metrika na X.



Víme: Nechť $\mathcal{T}$ je systém všech otevřených množin v (X,ρ). Potom

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

(O2) je-li A libovolná množina a $G_\alpha \in \mathcal{T}$ pro každé $\alpha \in A$, potom $\bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha \in \mathcal{T}$;

(O3) je-li A konečná a $G_\alpha \in \mathcal{T}$ pro každé $\alpha \in A$, potom $\bigcap_{\alpha\in A} G_\alpha \in \mathcal{T}$

DEF. Nechť X je libovolná množina a $\mathcal{P}(X)$ je systém všech podmnožin X. Potom $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ nazveme topologií na X, pokud platí (O1), (O2), (O3). Dvojici $(X,\mathcal{T})$ nazýváme topologický prostor a množiny z $\mathcal{T}$ otevřenými množinami v $(X,\mathcal{T})$.

Pozn: Každý metrický prostor (X,ρ) chápeme jako prostor topologický s <u>topologií</u> T_ρ <u>generovanou</u> ρ, kde

$$T_\rho := \{G \subset X \mid G \text{ je otevřená v } (X,\rho)\}.$$

Řada pojmů z metrických prostorů lze zobecnit do prostorů topologických, pokud se dají zavést jen pomocí otevřených množin (tzv. topologické pojmy). Např.

DEF. Nechť (X,T) je topologický prostor. Potom

(i) $F \subset X$ je <u>uzavřená</u>, je-li $X \setminus F$ otevřená.

(ii) $U \subset X$ je <u>okolí</u> $x \in X$, ex.-li otevřená $G \subset X$ tak, že $x \in G \subset U$.

(iii) Je-li $M \subset X$, potom <u>vnitřek</u> $\operatorname{int} M$ je sjednocení všech otevřených množin obsažených v M, <u>uzávěr</u> $\overline{M}$ je průnik všech uzavřených množin obsahujících M a <u>hranice</u> $\partial M := \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$.

Pozn: <u>Omezenost</u> M v (X,ρ) <u>není</u> topologická vlastnost.

LEMMA (Vlastnosti uzavřených množin)

Nechť $\mathcal{F}$ je systém všech uzavřených množin v $(X, \mathcal{T})$. Potom

(U1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$

(U2) je-li A libov. množina a $F_\alpha \in \mathcal{F}$, $\alpha \in A$, potom $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \in \mathcal{F}$,

(U3) je-li A konečná a $F_\alpha \in \mathcal{F}$, $\alpha \in A$, potom $\bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha \in \mathcal{F}$.

DŮKAZ: Snadno z De Morganových pravidel.

Např. (U2): Máme $X \setminus \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \underbrace{\bigcup_{\alpha \in A} (X \setminus F_\alpha)}_{} \in \mathcal{T}$. $\boxtimes$

DEF. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topol. prostor a $Y \subset X$. Položme $\mathcal{T}_Y := \{ G \cap Y \mid G \in \mathcal{T} \}$. Potom $\mathcal{T}_Y$ je topologie na Y a $(Y, \mathcal{T}_Y)$ je tzv. topologický podprostor $(X, \mathcal{T})$.

Př. Pokud není řečeno něco jiného, TP 4

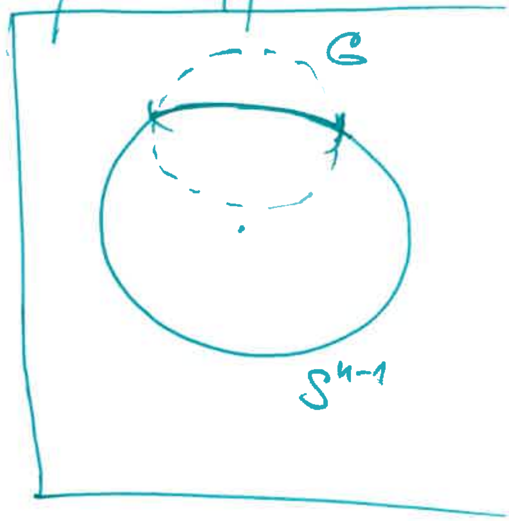
na $\mathbb{R}^n$ uvažujeme tzv. Eukleidovskou topologii,
tzn. topologii generovanou Euklid. metrikou ρ_e.

Připomeňme, že $\|x\| := (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
je Euklid. norma a $\rho_e(x,y) := \|x-y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

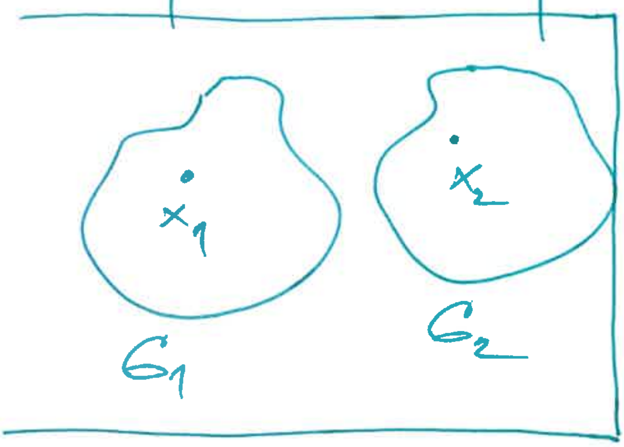
Např. $(n-1)$-sféru

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

chápeme jako topologický podprostor $\mathbb{R}^n$.



LEMMA Nechť topologie $\mathcal{T}$ na X je generována metrikou ρ. Potom $(X, \mathcal{T})$ je Hausdorffův, tzn. pro každé $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ existují $G_1, G_2 \in \mathcal{T}$ tak, že $x_1 \in G_1$, $x_2 \in G_2$ a $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.



Pozn: Hausdorffova topologie odděluje body.

Důkaz: Pro $\delta := \frac{1}{2}\rho(x_1, x_2)$ a $i = 1, 2$ položme

$$G_i = B(x_i, \delta) := \{x \in X \mid \rho(x, x_i) < \delta\}. \quad \blacksquare$$

Př. Nechť X je libovol. množina. Potom **TP $\mathcal{T}$**

(i) $\mathcal{T}_0 := \{\emptyset, X\}$ je tzv. <u>indiskrétní topologie</u> (<u>triviální</u>)

(ii) $\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(X)$ je tzv. <u>diskrétní topologie</u>.

(iii) Je-li $\mathcal{T}$ topologie na X, potom $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1$.
Tedy $\mathcal{T}_0$ je <u>nejmenší</u> (nejhrubší) topologií na X a
$\mathcal{T}_1$ je <u>největší</u> (nejjemnější) topol. na X.
Topologie na X jsou částečně uspořádány množinou $\subset$.

(iv) Je-li X aspoň dvoubodová, potom $\mathcal{T}_0$ není Hausdorffova, spec. $\mathcal{T}_0$ není generována žádnou metrikou na X.

DEF Říkáme, že $\mathcal{B}$ je <u>báze</u> topologie $\mathcal{T}$ na X, pokud $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ a pro každou $G \in \mathcal{T}$ existují $G_\alpha \in \mathcal{B}$, $\alpha \in A$ (libov.) takové, že

$$G = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha .$$

Př. Euklidovská topologie na $\mathbb{R}^n$ má <u>spočetnou bázi</u>. Skutečně,

$$\mathcal{B} = \{ B(x,r) \mid x \in \mathbb{Q}^n \text{ a } r \in \mathbb{Q} \cap (0,+\infty) \}$$

je její spočetná (ot. koule) báze. Pro $G \in \mathcal{T}$ je $G = \bigcup \{ B \in \mathcal{B} \mid B \subset G \}$.

Př. Každá báze $\mathcal{B}$ diskrétního topol. prostoru $(X, \mathcal{T}_1)$ obsahuje všechny jednobodové množiny. Je-li X <u>nespočetný</u>, že tedy každá báze $\mathcal{B}$ topologie $\mathcal{T}_1$ také <u>nespočetná</u>.

TP6

DEF. Nechť $(X_i, \mathcal{T}_i)$ jsou topol. prostory pro $i=1,2$.

(i) Potom $f: X_1 \to X_2$ je <u>spojité</u>, pokud pro každé $G \in \mathcal{T}_2$ je $f^{-1}(G) \in \mathcal{T}_1$.

(ii) Prosté zobrazení $f: X_1 \xrightarrow{na} X_2$ nazveme <u>homeomorfismem</u>, pokud f i f_{-1} jsou spojitá.

(iii) Prostory $(X_1, \mathcal{T}_1)$ a $(X_2, \mathcal{T}_2)$ jsou <u>homeomorfní</u>, pokud existuje homeomorfismus $f: X_1 \xrightarrow{na} X_2$. Píšeme $X_1 \simeq X_2$.

<u>Pozn:</u> (a) $\simeq$ je relace ekvivalence pro topol. prostory

(b) Jako topolog. prostory jsou homeomorfní prostory stejné, tzn. mají stejné topologické vlastnosti.