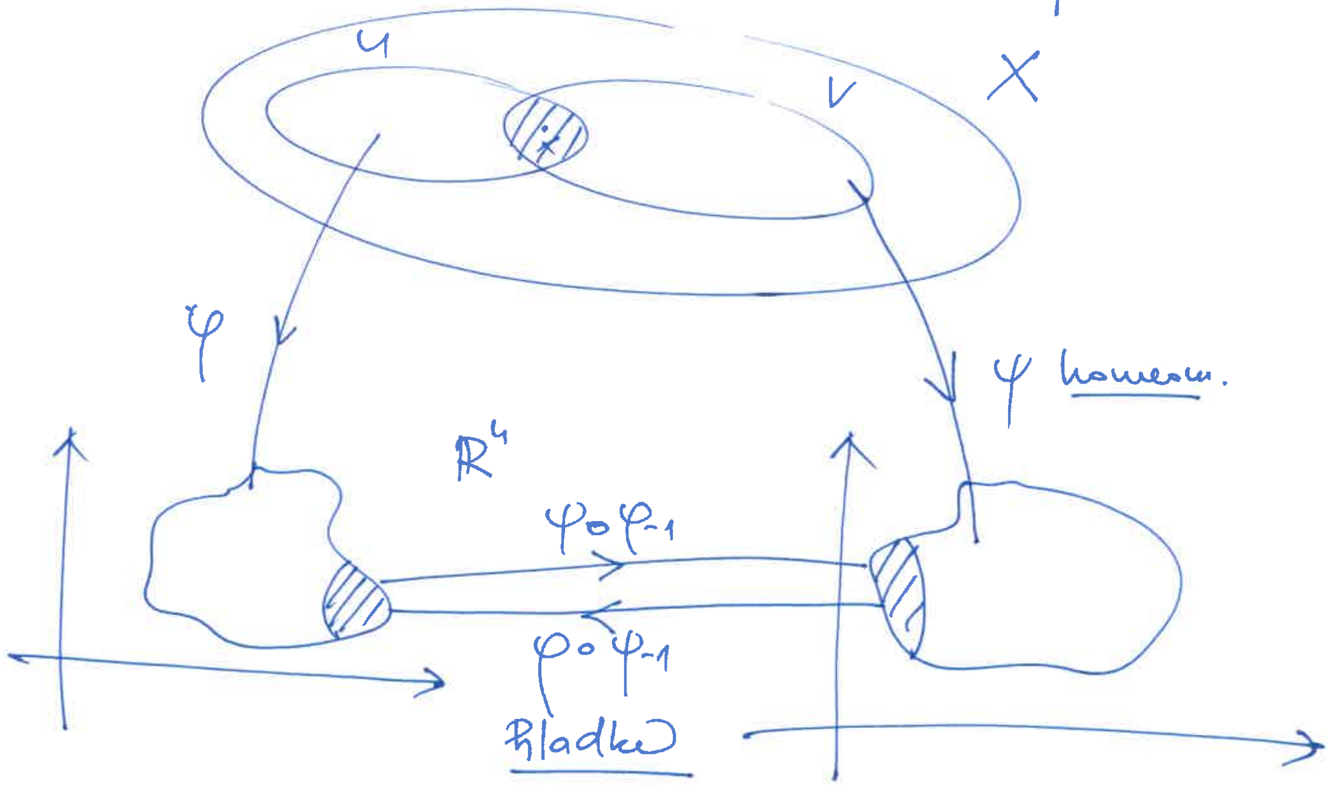
Minule: (Hladká) varieta $(X, \mathcal{A})$ dim n

hladký atlas



Příklady ① $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená s atlasem

$\mathcal{A} := \{(U, \underbrace{id}_{\text{identita}})\}$ je (hladká) varieta dim n.

Obecněji: Nechť $(X, \mathcal{A})$ je varieta dim n.

Je-li $Y \subset X$ otevřená, potom

$$\mathcal{A}_Y := \{(U \cap Y, \varphi|_{U \cap Y}) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$$

je atlas na Y a $(Y, \mathcal{A}_Y)$ je varieta dim n.

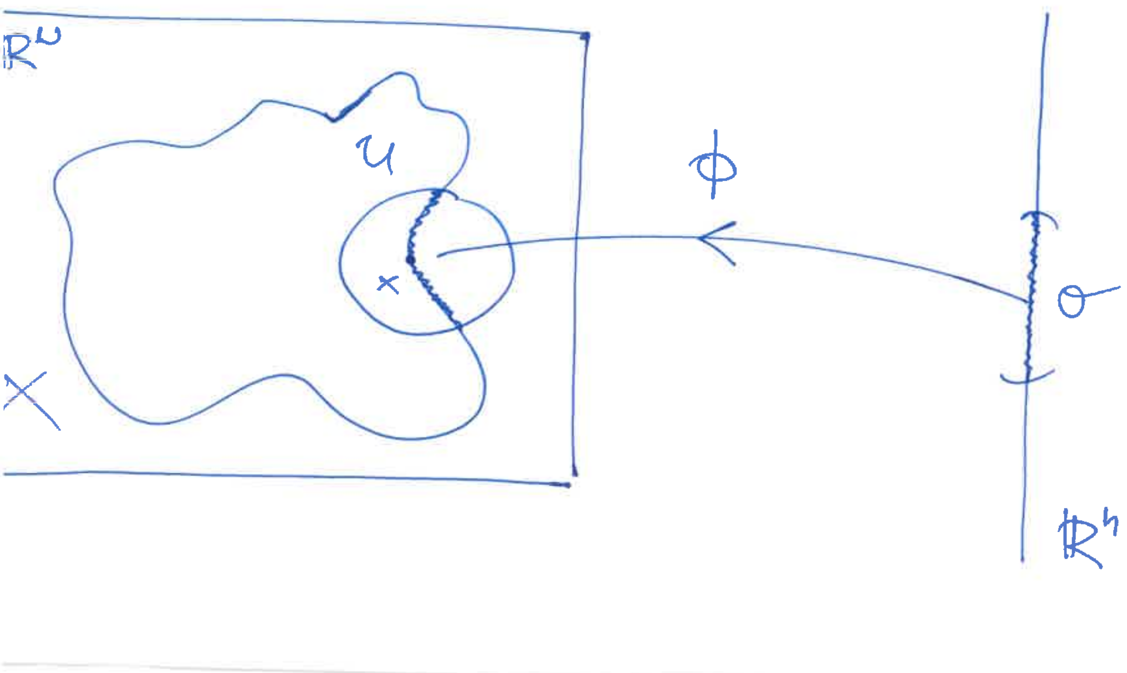
2. Hladké n-plochy v $\mathbb{R}^N$ (Geom. 2) VAR

jsou hladké variety dim n.

Pozn: žádné jiné příklady variet vlastně nejsou!

Whitneyho věta o vložení: každou hladkou varietu dim n lze $\underbrace{\text{vložit}}_{\text{lze přirozeně definovat, není kanonické}}$ do $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Připomenu: Hladká n-plocha v $\mathbb{R}^N$ je $X \subset \mathbb{R}^N$, kterou lze lokálně parametrizovat n souřadnicemi, tzn. pro každé $x \in X$ existuje otevřené okolí $U \subset \mathbb{R}^N$, ex. otevřená $O \subset \mathbb{R}^n$ a hladké zobrazení $\phi : O \to \mathbb{R}^N$ tak, že $\phi(O) = X \cap U$ a ϕ je homeomorfismus O na $X \cap U$.



Zde ϕ je regulární na O, pokud všude na O má Jacobiho matice ϕ hodnost n. Zřejmě $n \leq N$. $\boxed{\text{VAR}}$

Takové X má strukturu hladké variety dim n. Skutečně, uvažme mapy tvaru $(U \cap X, \phi^{-1})$, viz Geom. 2.

Pro různé 'lokální parametrizace' X zadávají na X obecně dva různé hladké atlasy $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}'$! Tzn. podle naší dosavadní definice dvě různé hladké variety $(X, \mathcal{A})$ a $(X, \mathcal{A}')$!?*)

$\boxed{\text{LEMMA}}$ Každý atlas $\mathcal{A}$ na topol. varietě X je obsažen v jediném maximálním (vzhledem k inkluzi) atlasu $\tilde{\mathcal{A}}$ na X.

Důkaz: Položme

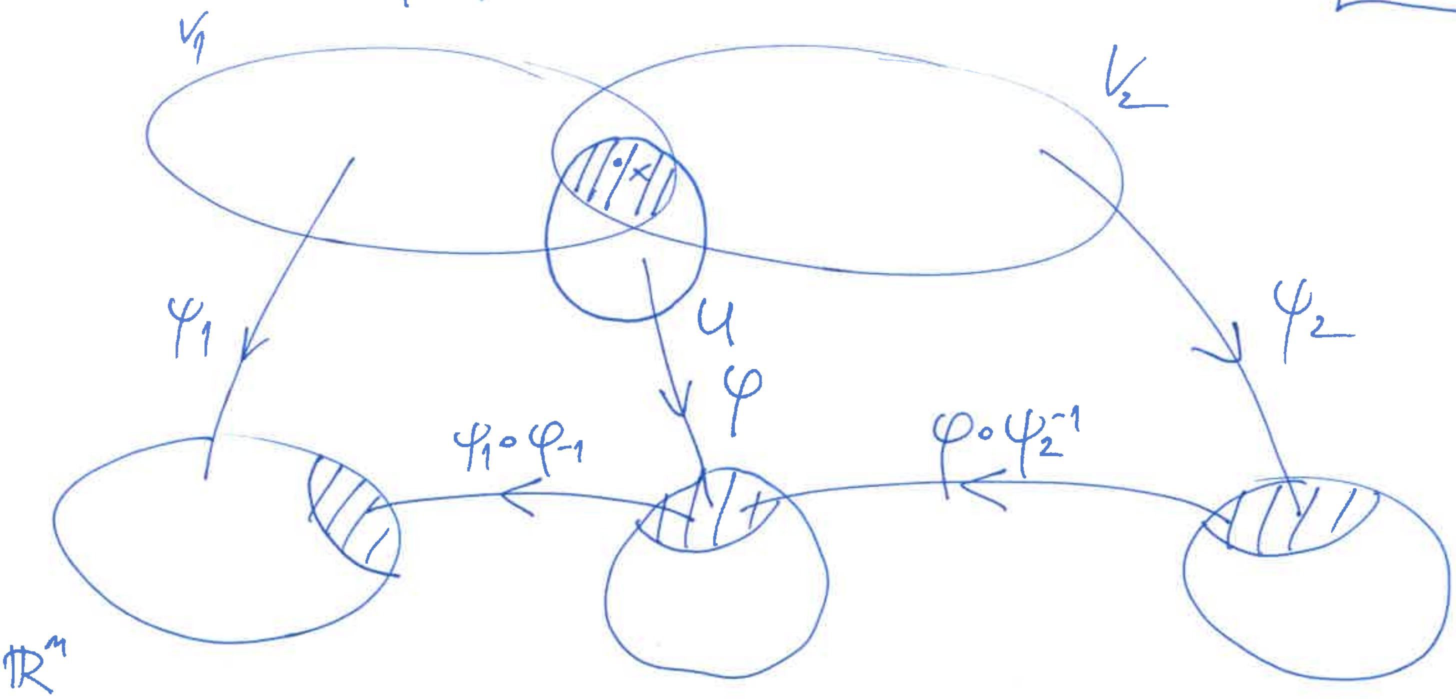
$$\tilde{\mathcal{A}} := \{ (V, \psi) \mid \underset{\text{mapa}}{(V,\psi)} \text{ je } C^\infty\text{-kompat. s každou mapou z } \mathcal{A} \}.$$

(i) zřejmě $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$.

(ii) $\tilde{\mathcal{A}}$ je atlas na X:

*) Ale stejnou diferenciální strukturu, viz $\boxed{\text{VAR 11}}$

Nechť $(V_1, \varphi_1), (V_2, \varphi_2) \in \tilde{\mathcal{A}}$.



Dokažme, že $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ je hladké na $\varphi_2(V_1 \cap V_2)$. Hladkost $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ se ukáže podobně.

Nechť $x \in V_1 \cap V_2$. Potom ex.! $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, že $x \in U$. Dále na $\varphi_2(U \cap V_1 \cap V_2)$ je

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = \underbrace{(\varphi_1 \circ \varphi^{-1})}_{\text{hladké}} \circ \underbrace{(\varphi \circ \varphi_2^{-1})}_{\text{hladké}} \quad \text{hladké.}$$

(iii) Je-li $\mathcal{B}$ atlas na X a $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$, potom $\mathcal{B} \subset \tilde{\mathcal{A}}$. ■

$\boxed{\text{DEFINITIVNÍ DEFINICE}}$ **Hladká varieta** $\boxed{\text{VARI}}$

dimenze n je topolog. varieta X dim n, na které je zadán **maximální hladký atlas $\tilde{\mathcal{A}}$**, tzn. **diferenciální struktura** na X.

Pozn: (i) Díky $\boxed{\text{LEMMATU}}$ lze diferenciál. strukturu $\tilde{\mathcal{A}}$ na X zadat libovolným (často menším, konečným apod.) atlasem $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$ na X. (ii) Na X zadávají dva atlasy $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}'$ **stejnou** diferenc. strukturu (tzn. stejnou hladkou varietu), právě když $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ je rovněž atlas na X.

Př **Kartézský součin variet**

Nechť M je (hlad.) varieta dim m a
N —||— dim n.

Potom $M \times N$ má přirozenou strukturu (hlad.) variety dim $(m+n)$. Cv.

Uvažme mapy tvaru $(U \times V, \Phi)$, kde (U, φ) je mapa na M, (V, ψ) je mapa na N a $\Phi := (\varphi, \psi)$.

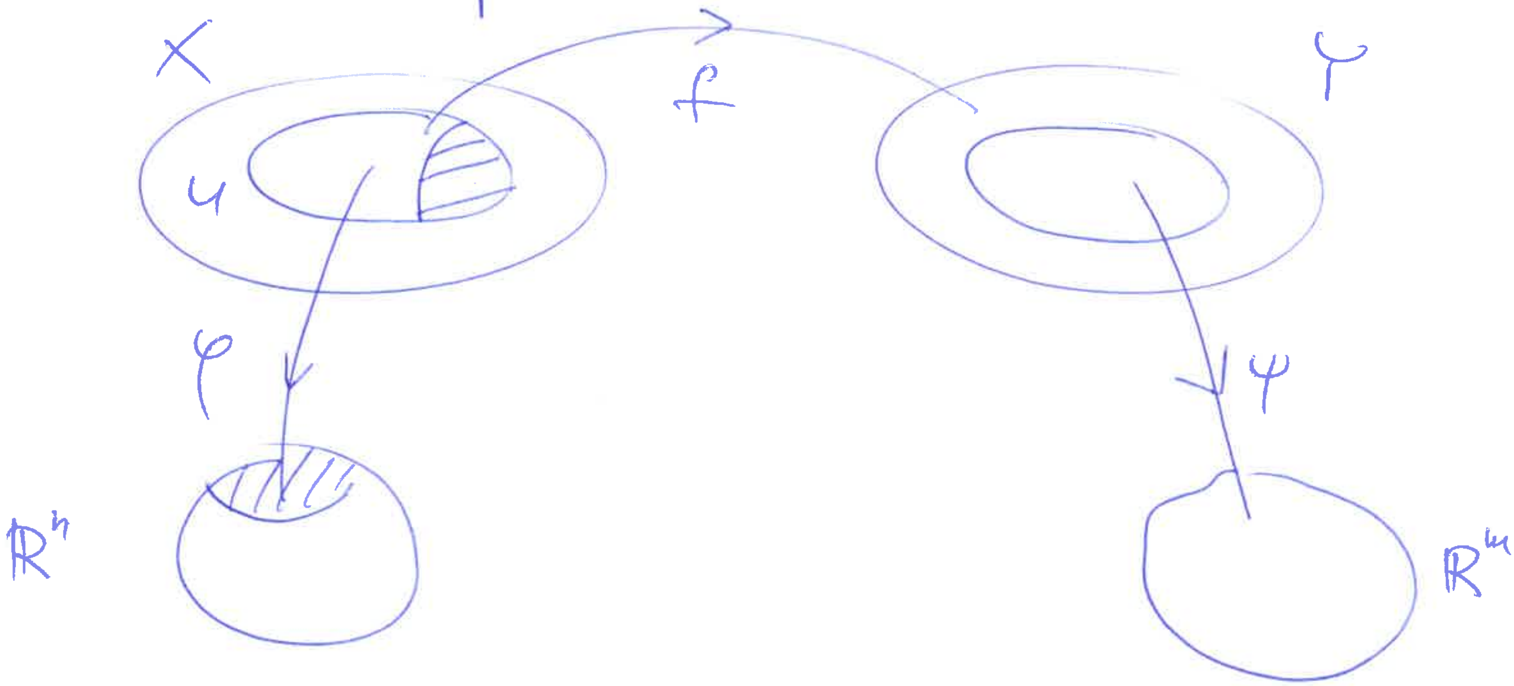
Př. n-torus $T^n := \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ krát}}$ je kompaktní varieta dim n

Hladká zobrazení

DEF. Řekneme, že zobrazení $f: X \to Y$ mezi varietami je <u>hladké</u>, pokud je f spojité a v lokálních souřadnicích je f hladké, tzn. pro každou mapu (U,φ) na X a každou mapu (V,ψ) na Y je

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

hladké na $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$.

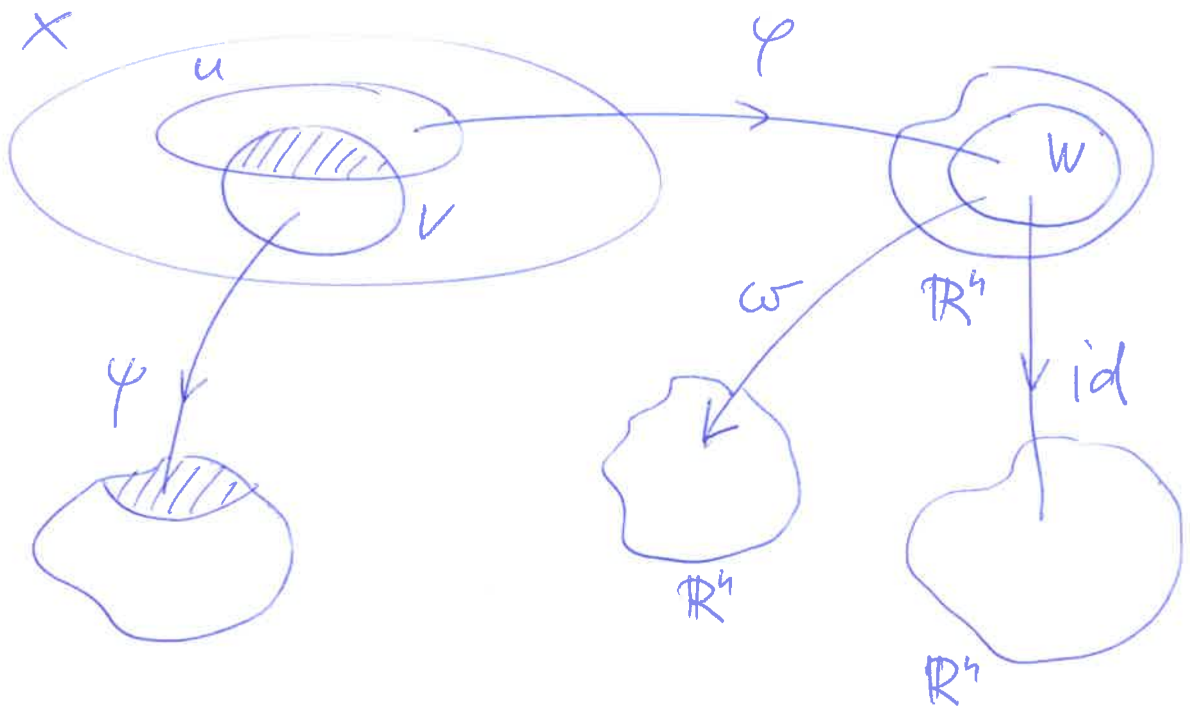


DEF. Zobrazení $f: X \to Y$ je <u>difeomorfismus</u> mezi varietami, pokud je f bijekce X na Y a f i f^{-1} jsou hladké. Variety X a Y jsou <u>difeomorfní</u>, pokud mezi nimi existuje difeomorfismus. Píšeme $X \simeq Y$.

Pozn: (i) Je-li X hladká varieta a (U,φ) je mapa na X, potom je $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ difeom. na otevřenou $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Na U uvažujeme diferenc. strukturu indukovanou z X.

(ii) Je-li U otevřená podmnožina hladké variety X a $f: X \to Y$ je hladké zobrazení, potom $f|_U : U \to Y$ je hladké.

ad (i)



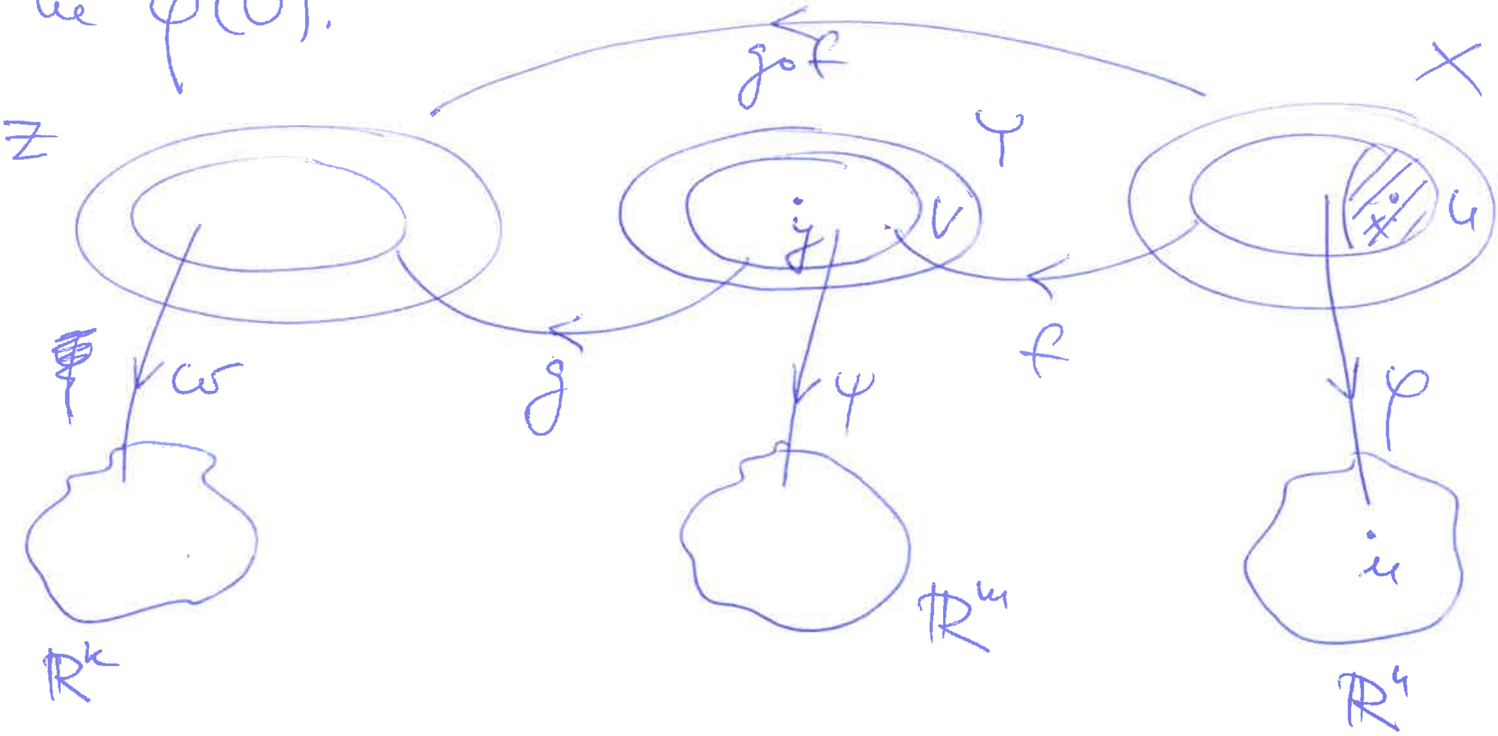
přechod. zobr.

$id \circ \varphi \circ \psi^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1}$; obecně: $\omega \circ \varphi \circ \psi^{-1}$ je hladké

difeom. na $\mathbb{R}^n$

(iii) Jsou-li $f: X \to Y$ a $g: Y \to Z$ hladká zobrazení mezi varietami, potom $g \circ f : X \to Z$ je hladké.

Skutečně, nechť (U, φ) je mapa na X a (W, ω) je mapa na Z. Ukážeme, že pro $\tilde{U} := U \cap (g \circ f)_{-1}(W)$ je $\omega \circ g \circ f \circ \varphi_{-1}$ hladká na $\varphi(\tilde{U})$.



Nechť $x \in U$, $f(x) = y \in Y$ a $\varphi(x) = u \in \mathbb{R}^n$.
Volme mapu (V, ψ) na Y, aby $y \in V$.
Potom na $\varphi(\tilde{U} \cap f_{-1}(V))$ je

$$\omega \circ g \circ f \circ \varphi_{-1} = \underbrace{\omega \circ f \circ \psi_{-1}}_{\substack{\text{hladké} \\ \text{z } \mathbb{R}^m \text{ do } \mathbb{R}^k}} \circ \underbrace{\psi \circ f \circ \varphi_{-1}}_{\substack{\text{hladké} \\ \text{z } \mathbb{R}^n \text{ do } \mathbb{R}^m}} \quad \text{hladká.}$$

∎