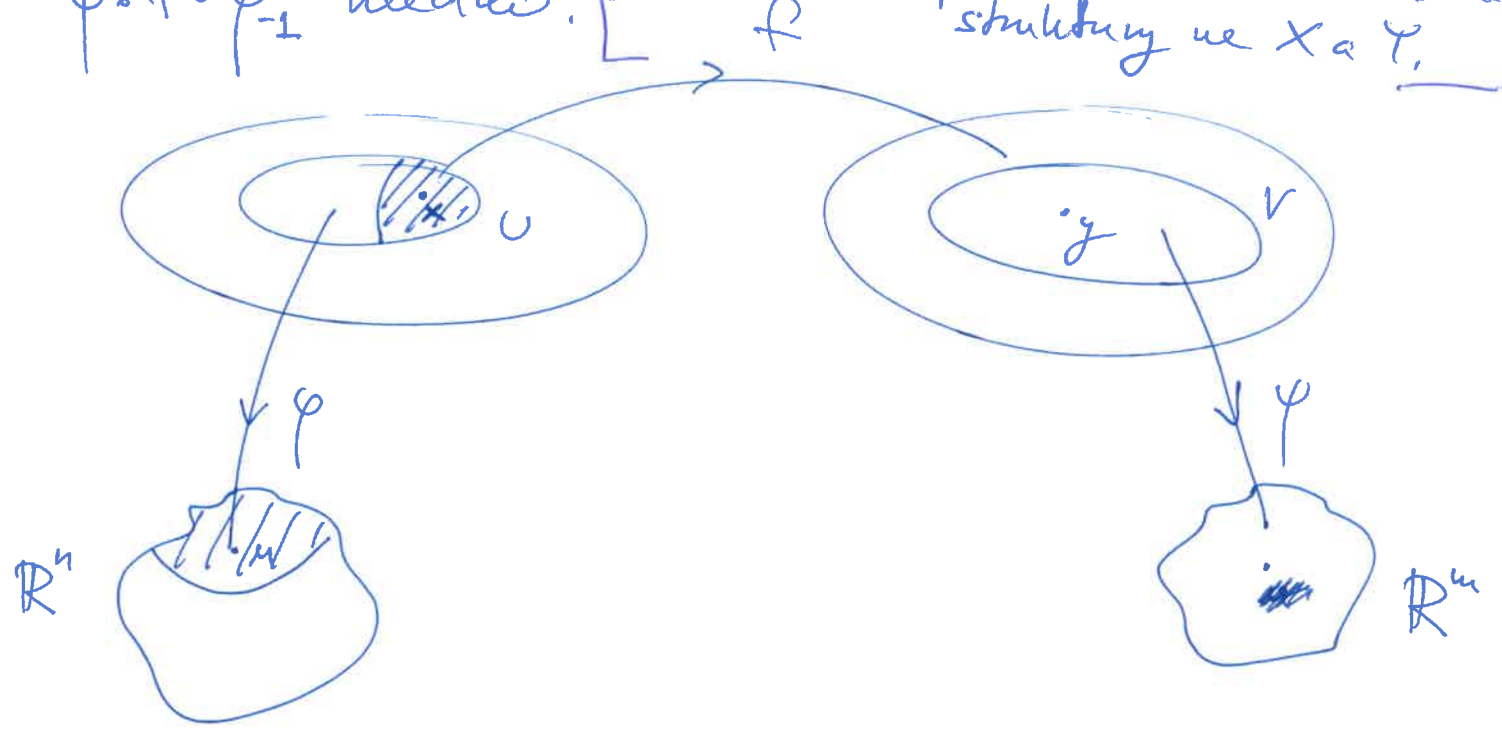
**Fakt** Nechť $f: X \to Y$ je zobrazení mezi hl. varietami. NTJE:

1. $f$ je hladké
2. Pro každé $x \in X$ existuje otevřené okolí $U_x \subset X$ takové, že $f|_{U_x} : U_x \to Y$ je hladké.
3. Nechť $\mathcal{A}$ je atlas na $X$ a $\mathcal{B}$ je atlas na $Y$.* Pro každou mapu $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$ a $(V,\psi) \in \mathcal{B}$ platí, že $f_{-1}(V)$ je otevřená v $X$ a na $\varphi(U \cap f_{-1}(V))$ je $\psi \circ f \circ \varphi_{-1}$ hladké.

Pozn: *) generující příslušné diferenciální struktury na $X$ a $Y$.




**Důkaz:** (1) $\Rightarrow$ (3) jasné; (3) $\Rightarrow$ (2): Nechť $x \in X$ a $y = f(x)$. Volme $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$ a $(V,\psi) \in \mathcal{B}$, aby $x \in U$ a $y \in V$. Pak pro $U_x := U \cap f_{-1}(V)$ je $f|_{U_x}$ hladké, protože na $U_x$ je $f = \underbrace{\psi_{-1}}_{\text{difeom.}} \circ \underbrace{(\psi \circ f \circ \varphi_{-1})}_{\text{hl.}} \circ \underbrace{\varphi}_{\text{difeom.}}$ hladké.

(2.) $\Rightarrow$ (1.): Ukažme, že $f$ je spojité.
Nechť $G$ je otevřená v $Y$. Potom

$$f_{-1}(G) = \bigcup_{x\in X} \underbrace{f_{-1}(G)\cap U_x}_{\substack{\parallel \\ (f|U_x)_{-1}(G) \text{ je ot. v } U_x,\, X}} \quad \text{je otevř. v } X.$$

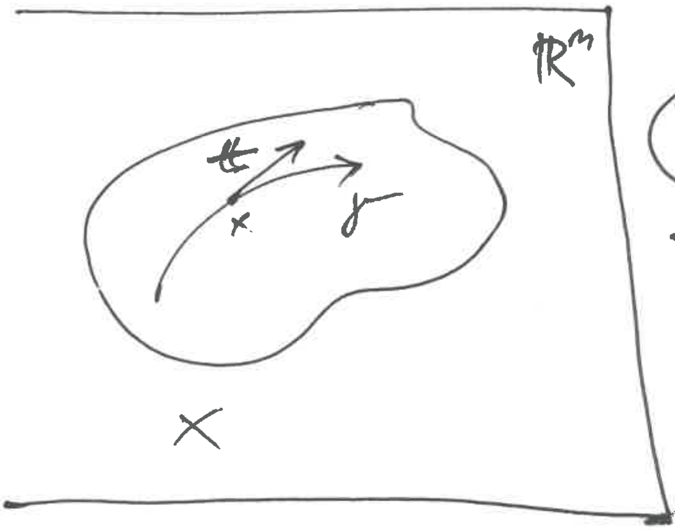
Dále nechť $(U,\varphi)$ je mapa na $X$ a $(V,\psi)$ na $Y$.
Nechť $u\in \varphi(U\cap f_{-1}(V))$. Ukažme, že $\psi\circ f\circ\varphi_{-1}$ je hladké v $u$. Položme $u=\varphi(x)$ ($x := \varphi_{-1}(u)$) a $y=f(x)$.
Potom $f|U_x\cap U$ je hladké, tudíž i zobrazení

$$\psi\circ f\circ \varphi_{-1}$$

je hladké na $\varphi(U_x\cap U\cap f_{-1}(V))\ni u$. ∎

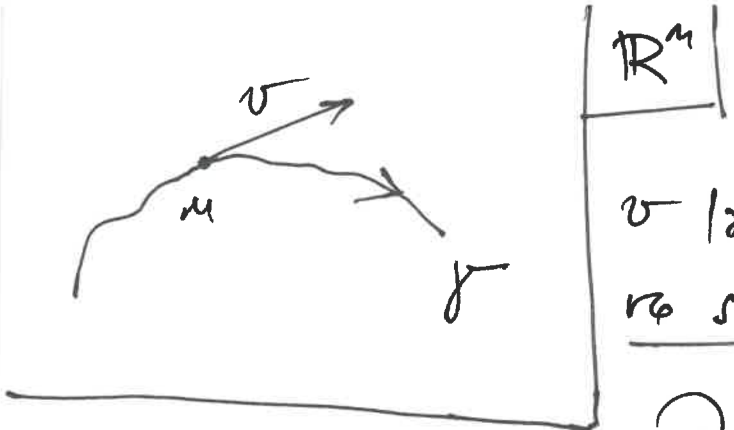
# Tečný prostor

**MOTIVACE** Nechť $X$ je ~~regulární~~ hladká plocha v $\mathbb{R}^n$. Potom $v \in \mathbb{R}^n$ se nazývá *tečný vektor* v $x \in X$, pokud existuje hladká křivka $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$ taková, že $\gamma(0) = x$ a $\gamma'(0) = v$.




**Cv.** Popište tečný prostor $T_x X$, je-li $X$ zadána lokální parametrizací, resp. implicitně. ~~Nejdříve pro $k=2$, $n=3$~~

**OTÁZKA** Jak definovat tečný vektor pro variety?




Nechť $v \in \mathbb{R}^n$ je vektor v bodě $u \in \mathbb{R}^n$! Potom $v$ lze ztotožnit s <u>derivací ve směru</u> $v$

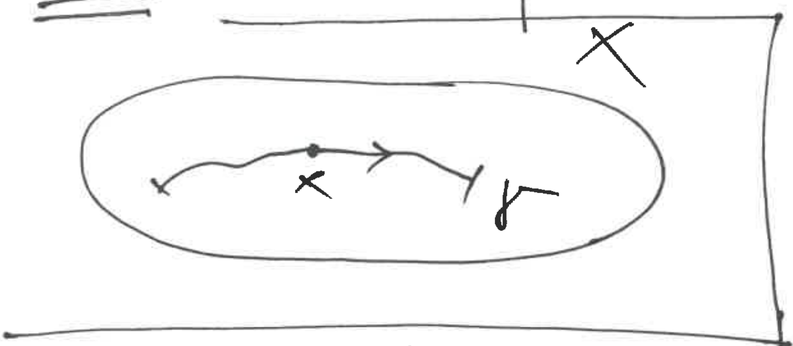
$$\partial_v(f)(u) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i}(u)\, v_i,$$

kde $f \in \mathcal{E}_u$ a $\mathcal{E}_u$ je množina všech reálných hladkých funkcí $f$ na nějakém ot. okolí $u \in \mathbb{R}^n$.

Nechť $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ je hladká křivka, $\gamma(0) = u$ a $\gamma'(0) = v$, např. $\gamma(t) = u + tv$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Potom pro každé $f \in \mathcal{E}_u$ je

$$(*) \quad \underbrace{\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0)}_{\text{"derivace } f \text{ podél } \gamma\text{"}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i}(u)\, \underbrace{\gamma_i'(0)}_{= v_i} = \underbrace{\partial_v f(u)}.$$

**DEF.** Nechť $X$ je hladká varieta a $x \in X$.




Nechť $\mathcal{E}_x$ je množina všech reálných hladkých funkcí $f$ definovaných na nějakém ot. okolí $x$.

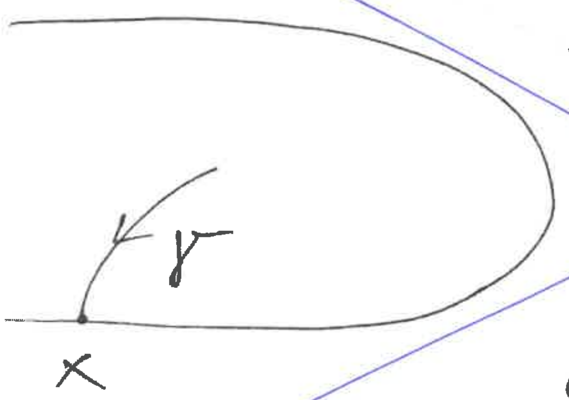
Potom <u>tečným vektorem</u> k $X$ v bodě $x$ nazveme zobrazení $v : \mathcal{E}_x \to \mathbb{R}$ takové, že existuje $\varepsilon > 0$,

hladkou křivku $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$, $\gamma(0) = x$,
zobrazení

pro kterou $v(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0)$, $f \in \mathcal{E}_x$.

Označme $T_xX$ množinu všech tečných vektorů v $x$ k $X$ a $T_xX$ nazýváme <u>tečný prostor</u> k $X$ v $x$.

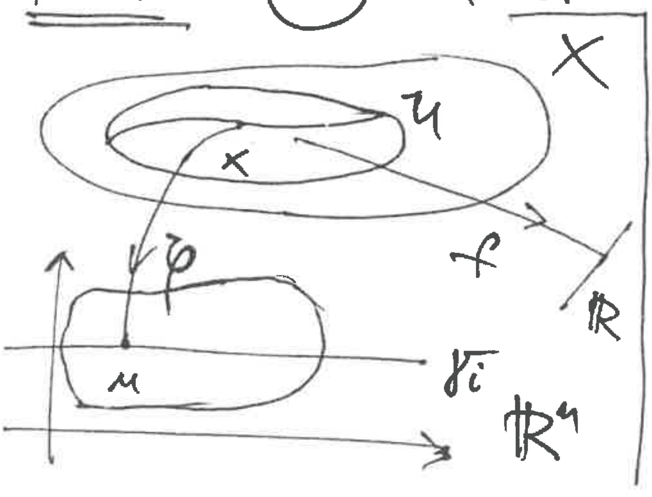
~~<u>Pozn.</u>: Je-li $x \in \partial X$, potom definujeme $v \in T_xX$ jako zobrazení $v : \mathcal{E}_x \to \mathbb{R}$ takové, že existuje hladká křivka $\gamma : (-\varepsilon, 0] \to X$, $\gamma(0) = x$,~~




~~pro kterou $v(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0-)$, $f \in \mathcal{E}_x$.~~

<u>VĚTA</u>: Tečný prostor $T_xX$ je reálný vektorový prostor a $\dim(T_xX) = \dim X$.

<u>DŮKAZ</u>: 1. Nechť $(U, \varphi)$ je mapa na $X$, $x \in U$ a $u = \varphi(x)$.




Pro $i = 1, \dots, n$ uvažme $i$-tou souřadnic. křivku v $\mathbb{R}^n$

$$\gamma_i(t) = u + te_i, \ t \in \mathbb{R},$$

kde $e_1, \dots, e_n$ je standardní báze $\mathbb{R}^n$

Pro $i=1,\dots,n$ položme

$$\mathfrak{t}_i(f) := \frac{d}{dt}\left(f\circ(\varphi_{-1}\circ\gamma_i)\right)(0), \quad f\in\mathcal{E}_x.$$

Potom ~~...~~ $\mathfrak{t}_i\in T_xX$ a $\forall f\in\mathcal{E}_x$:

$$\mathfrak{t}_i(f) = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{(f\circ\varphi_{-1})}_{\substack{f \text{ v lokálních} \\ \text{souřadnicích,} \\ \text{hladká na okolí } u\in\mathbb{R}^n}}\circ\gamma_i\Big)(0) = \frac{\partial}{\partial u_i}(f\circ\varphi_{-1})(u).$$

Speciálně, máme $\mathfrak{t}_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$. Zde $\varphi_j$ je $j$-tá složka $\varphi$.

(2) Nechť $\mathfrak{t}\in T_xX$. Potom existuje hladká $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to X$ taková, že $\gamma(0)=x$ a $\forall f\in\mathcal{E}_x$: $\mathfrak{t}(f) = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(0) =$

$$= \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{(f\circ\varphi_{-1})}_{\substack{\text{hladká,} \\ \text{na okolí} \\ u\in\mathbb{R}^n}}\circ\underbrace{(\varphi\circ\gamma)}_{\substack{\text{křivka} \\ \text{v } \mathbb{R}^n}}\Big) \overset{(*)}{=} \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathfrak{t}_i(f)\cdot v_i}_{= \partial_v(f\circ\varphi_{-1})(u)},$$

kde $v = (\varphi\circ\gamma)'(0)\in\mathbb{R}^n$. Neboli $\mathfrak{t} = \sum_{i=1}^n v_i\mathfrak{t}_i$.

Obráceně, nechť $v \in \mathbb{R}^n$. Potom $\sum_{i=1}^{n} v_i \mathbb{t}_i =: \mathbb{t} \in T_x X$, protože $\mathbb{t}(f) \overset{(*)}{=} \frac{d}{dt}\left(f \circ (\varphi^{-1} \circ \gamma_v)\right)(0)$, $f \in \mathcal{E}_x$, kde $\gamma_v(t) := u + tv$, $t \in \mathbb{R}$ je křivka v $\mathbb{R}^n$.

3. Konečně $\mathbb{t}_1, \dots, \mathbb{t}_n$ tvoří bázi $T_x X$, protože jsou lineárně nezávislé.

Skutečně, nechť $0 = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbb{t}_i$.

Dosadíme-li $\varphi_j$, dostaneme

$$0 = \sum_{i=1}^{n} v_i \underbrace{\mathbb{t}_i(\varphi_j)}_{= \delta_{ij}} = v_j. \quad \blacksquare$$

**Označení:** Bázové vektory $T_x X$ z důkazu pro mapu $(U, \varphi)$ značíme

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\Big|_x = \frac{\partial}{\partial u_i} := \mathbb{t}_i, \quad \text{kde } u = \varphi(x), \ x \in U, \ u \in \mathbb{R}^n$$

**Pozn:** Věta platí i pro $x \in \partial X$. Dov.

Pozn: $\mathcal{E}_x$ můžu chápat jako vektorový prostor, nebo dokonce algebru, když ztotožníme hladké funkce $f, g \in \mathcal{E}_x$, které se shodují na nějakém okolí $x$. Potom zřejmě $t \in T_xX$ má následující vlastnosti:

1. $t$ je lineární;
2. $t$ je derivace, tzn. $\forall f, g \in \mathcal{E}_x$:

(LEIBNIZ) $t(f \cdot g) = f(x)\, t(g) + t(f) \cdot g(x)$.

Potom lze dokázat, že $t : \mathcal{E}_x \to \mathbb{R}$ patří do $T_xX$, právě když splňuje 1., 2.

Pozn: Zřejmě $t(f) = t(g)$, je-li $t \in T_xX$, $f, g \in \mathcal{E}_x$ a $f = g$ na nějakém okolí $x$.